i v

ıd Physik

ksicht

Lehrer an
ıstalten.

ert,

Archiv

der

Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höhern Unterrichtsanstalten.



Herausgegeben

von

Johann August Grunert,

Professor zu Greifswald.

10

Zehnter Theil.

Mit sieben lithographirten Tafeln.

Greifswald.

C. A. Koch's Separat-Conto.

1847.

Inhaltsverzeichniss des zehnten Theils.

Arithmetik.

Geometrie.

Trigonometrie.

Geodäsie.

Mechanik.

Optik.

Astronomie.

Physik.

Uebungs-Aufgaben für Schüler.

Literarische Berichte*).

*) Ich bemerke hierbei, dass die Literarischen Berichte mit besonderen fortlaufenden Seitenzahlen versehen sind.

I.

Ueber die atmosphärische, vorzüglich die terrestrische Refraction, und über Refractionscurven im Allgemeinen.

Von

dem Herausgeber.

Einleitung.

Die Theorie der atmosphärischen Refraction ist schon sehr häufig und mit einem grossen Aufwande von Scharfsinn und analytischem Calcul behandelt worden. Im Allgemeinen lassen sich aber zwei Hauptrichtungen, welche man bei der Entwickelung dieser in vielen Beziehungen so wichtigen Theorie verfolgt hat, von einander unterscheiden, von denen ich die eine mit dem Namen der geometrischen, die andere mit dem Namen der physikalischen belegen möchte. Der bedeutendste Repräsentant der ersten Richtung ist Lambert, dessen zu damaliger Zeit allerdings sehr elegante Schrift: Les propriétés remarquables de la route de la lumière par les airs et en général par plusieurs milieux réfringens sphériques et concentriques, avec la solution des problèmes, qui y ont du rapport, comme sont les réfractions astronomiques et terrestres, et ce qui en depend. Par J. H. Lambert. A la Haye. 1758. 8., die auch in einer deutschen Uebersetzung: Eigenschaften der Bahn des Lichts. Von J. H. Lambert. Berlin. 1772. 8. erschienen ist, nach meiner Meinung auch jetzt immer noch Beachtung verdient. Der bedeutendste Repräsentant der zweiten Richtung ist Laplace, welcher bekanntlich im zehnten Buche der Mécanique céleste. T. IV. p. 231. die Theorie der sogenannten astronomischen und terrestrischen Refraction aus dem physikalischen Gesichtspunkte auf eine höchst scharfsinnige und ein wahres Muster für derartige physikalische Untersuchungen darbietende Weise behandelt hat *).

---

*) In dem Mémoire sur la mesure théorique et expérimentale de la réfraction terrestre, avec son application a

Der geometrischen Behandlung dieses Gegenstandes, wenn dieselbe auch allerdings keineswegs so tief in die eigentliche Natur desselben einzuführen geeignet ist wie die physikalische Behandlung, scheint mir immer der Vorzug zu gebühren, dass sie sich ohne alle hypothetischen Voraussetzungen durchführen lässt und nur einige durch die genauesten Versuche mehrerer Physiker ausser allem Zweifel gesetzte Erfahrungssätze als Grundlagen in Anspruch nimmt, überdies aber zugleich zu mehreren auch in geometrischer Rücksicht interessanten Resultaten führt, und Anfängern in der Astronomie und Geodäsie zugänglicher sein dürfte als die Behandlung aus dem physikalischen Gesichtspunkte. Da nun die Methode, nach welcher dieser wichtige Gegenstand in der oben angeführten Schrift von Lambert sich behandelt findet, gegenwärtig als veraltet zu betrachten ist, überhaupt auch diese Schrift rücksichtlich ihrer Verständlichkeit Anfängern manche Schwierigkeiten darbieten dürfte; so habe ich versucht, die Theorie der atmosphärichen Refraction aus dem geometrischen Gesichtspunkte in der vorliegenden Abhandlung einer ganz neuen Behandlung zu unterwerfen, und dabei namentlich auch einige allgemeine Eigenschaften der Refractionscurven deutlich hervorzuheben und streng zu beweisen. Bemerken muss ich jedoch, dass ich bei dieser Untersuchung mein Augenmerk hauptsächlich auf die sogenannte terrestrische Refraction gerichtet habe, weil die astronomische Refraction überhaupt schon öfter und tiefer eingehend als jene behandelt worden ist. Auch muss ich offen gestehen, dass es mir immer wenig naturgemäss geschienen hat, die terrestrische Refraction bloss dem Horizontalabstande der beiden Stationen oder dem von deren Vertikalen am Mittelpunkte der Erde eingeschlossenen Winkel, ohne alle Rücksicht auf die Zenithdistanz, proportional zu setzen, wie gegenwärtig nach Lambert (a. a. O. p. 75. Théorème XXVIII.) und Laplace (a. a. O. p. 278.) allgemein geschieht. Ja ich bin selbst der Meinung, dass die geringe Uebereinstimmung in den von verschiedenen Gelehrten bestimmten Werthen des Coefficienten der terrestrischen Refraction *) nicht bloss, wie gewöhnlich behauptet wird, der grossen Veränderlichkeit der Luftbeschaffenheit in den der Erde näher liegenden Schichten der Atmosphäre, sondern zum Theil gewiss auch der

---

la détermination exacte des différences de niveau, d'après les observations des distances zénithales simples ou réciproques. Par M. Biot. Paris. 1842. 8., der neuesten mir bekannten Schrift über diesen Gegenstand, schliesst sich der Verfasser in den Grundlehren und im Princip an Laplace an. Jedenfalls aber verdient diese Schrift über die physikalische Theorie der Refraction Beachtung und allgemeiner bekannt zu werden, als sie bis jetzt geworden zu sein scheint.

*) Den Coefficienten der terrestrischen Strahlenberechnung setzen

die Engländer	0,2000,
die Franzosen	0,1600,
Corabeuf	0,1285,
die ostpreussische Gradmessung	0,1370,
Gauss	0,1306,
Struve	0,1237.

Mangelhaftigkeit der Theorie der terrestrischen Refraction und manchen Auslassungen, welche man sich bei der Entwickelung derselben gestattet hat, anheim fällt. In der That werden auch, wie ich wenigstens hoffe, die in dieser Abhandlung gegebenen Entwickelungen deutlich in's Licht setzen, dass nicht bloss die astronomische, sondern allerdings auch die terrestrische Refraction auf eine bestimmte Weise von der Zenithdistanz abhängt, und dass die vorher erwähnte gewöhnliche Annahme, nach welcher dieselbe bloss dem Horizontalabstande der beiden Stationen oder dem von deren Vertikalen am Mittelpunkte der Erde eingeschlossenen Winkel proportional sein soll, nur als eine rohere Annäherung betrachtet werden muss. Daher bin ich auch der Meinung, dass eine neue, auf eine möglichst grosse Anzahl genauer Beobachtungen gegründete Bestimmung des Coefficienten der terrestrischen Refraction, mit Anwendung der in dieser Abhandlung entwickelten Formeln und gehöriger Berücksichtigung der Zenithdistanzen, so wie dieselben in diesen Formeln hervortreten, ferner auch mit strenger Rücksicht auf den zeitigen Stand der meteorologischen Instrumente, Bedürfniss ist und Noth thut, und stehe nicht an, hier den Wunsch auszusprechen, dass ein mit allen nöthigen Hülfsmitteln gehörig ausgerüsteter, in einer zu solchen Beobachtungen geeigneten Gegend wohnender Gelehrter sich dieser Untersuchung unterziehen, oder eine gelehrte Gesellschaft oder eine Regierung dieselbe zu veranlassen sich geneigt fühlen möchte, da mir selbst in dem hiesigen völligen Flachlande jede Gelegenheit zur erfolgreichen Durchführung derselben mangelt.

Was ich ausser der vollständigern Behandlung der terrestrischen Refraction am Schluss dieser Abhandlung noch über die astronomische Refraction gesagt habe, ist nur der Vollständigkeit wegen und Anfängern zu Liebe beigefügt worden, und hat keineswegs den Zweck, diesem schon so vielfach und in vielen Beziehungen mit so glücklichem Erfolge behandelten höchst wichtigen Gegenstande eine neue Ansicht abzugewinnen, oder denselben auf irgend eine Weise einen Schritt weiter zu führen. Hierüber findet man Alles, was zu wissen wünschenswerth sein kann, in Laplace's berühmtem Werke, und in Bessel's, Carlini's und anderer Astronomen allgemein bekannten Schriften.

Erfahrungssätze.

Wir werden im Folgenden bei der Entwickelung der Theorie der atmosphärischen Refraction von einigen Erfahrungssätzen ausgehen, deren Richtigkeit durch viele mit grosser Sorgfalt und Genauigkeit von mehreren Physikern angestellte Versuche als ausser allem Zweifel gesetzt betrachtet werden kann. Diese Sätze wollen wir, um eine sichere Grundlage für das Folgende zu gewinnen, jetzt hier in der Kürze zusammenstellen, wenn dieselben auch allgemein bekannt sind, und sich in jedem etwas vollständigern physikalischen Lehrbuche sämmtlich finden.

I.

Der erste dieser Sätze ist das bekannte Fundamentaltheorem der gesammten Dioptrik, dass nämlich für jede zwei brechende Körper das Verhältniss des Sinus des Einfallswinkels und des Sinus des Brechungwinkels zu einander constant ist, und dass dieses Verhältniss jederzeit seinen reciproken Werth erhält, wenn die beiden brechenden Körper mit einander verwechselt werden. Wird also für zwei brechende Körper überhaupt der Einfallswinkel durch ω, der Brechungswinkel durch ω' bezeichnet, und

$$\frac{\sin \omega}{\sin \omega'} = n$$

gesetzt, so ist die Grösse n, welche bekanntlich der Brechungsexponent für die beiden in Rede stehenden brechenden Körper genannt wird, constant oder verändert ihren Werth nicht, wie sich auch die beiden Winkel ω und ω' ändern mögen. Werden aber die beiden brechenden Körper mit einander verwechselt, so erhält der Brechungsexponent seinen reciproken Werth, und wird also in der vorhergehenden Bezeichnung durch den Bruch $\frac{1}{n}$ dargestellt. Auch hat die Erfahrung gelehrt, dass der Brechungsexponent immer grösser oder kleiner als die Einheit ist, jenachdem der Strahl aus einem dünnern in einen dichtern, oder aus einem dichtern in einen dünnern Körper übergeht. Im ersten Falle ist also jederzeit der Einfallswinkel grösser als der Brechungswinkel; im zweiten Falle ist dagegen der Einfallswinkel immer kleiner als der Brechungswinkel.

II.

Ferner haben die Versuche gelehrt, dass, wenn A und B zwei einander berührende, von parallelen Ebenen begränzte brechende Körper sind, und ein Strahl aus der Luft in den Körper A, hier-

auf aus dem Körper A in den Körper B, und dann aus dem Körper B wieder in die Luft übergeht, jederzeit der erste einfallende und der letzte ausfahrende Strahl, die beide in der Luft liegen, einander parallel sind. Bezeichnen wir also den Einfallswinkel und den Brechungswinkel für die Luft und den Körper A durch ω und ω', für den Körper A und den Körper B durch ω' und ω'', für den Körper B und die Luft durch ω'' und ω, wobei man nicht zu übersehen hat, dass die Körper A und B nach der Voraussetzung von parallelen Ebenen begränzt werden und der erste einfallende und letzte ausfahrende Strahl einander parallel sind, die entsprechenden Brechungsexponenten aber durch m, k, n; so ist nach I.

$$\frac{\sin\omega}{\sin\omega'}=m,\quad \frac{\sin\omega'}{\sin\omega''}=k,\quad \frac{\sin\omega''}{\sin\omega}=n;$$

also, wenn man diese Gleichungen in einander multiplicirt:

$$mkn=1,$$

oder

$$k=\frac{1}{mn}=\frac{1}{n}:m,$$

wo m der Brechungsexponent für Luft und den Körper A, ferner $\frac{1}{n}$ der Brechungsexponent für Luft und den Körper B, endlich k der Brechungsexponent für die Körper A und B ist. Dies hat überhaupt auf den folgenden, auch noch durch viele andere Versuche ausser allem Zweifel gesetzten Satz geführt:

Wenn für die beiden brechenden Körper A und B der Brechungsexponent λ, für die beiden brechenden Körper A und C der Brechungsexponent μ ist, so ist jederzeit $\frac{\mu}{\lambda}$ der Brechungsexponent für die beiden brechenden Körper B und C.

Namentlich ist die Richtigkeit dieses Satzes auch in allen den Fällen, wo A der leere Raum ist, und B und C verschiedene Luftarten oder Gasarten sind, durch Versuche ausser allem Zweifel gesetzt worden.

III.

Wenn wir die Dichtigkeit der atmosphärischen Luft bei der Temperatur 0 und dem barometrischen Drucke $0^m,76$ als Einheit der Dichtigkeiten der atmosphärischen Luft annehmen; so ist nach allgemein bekannten physikalischen Gesetzen die Dichtigkeit der atmosphärischen Luft bei der Temperatur t nach dem Centesimalthermometer und bei dem in Metern ausgedrückten barometrischen Drucke b:

$$\frac{b}{0^m,76.(1+0,00375.t)}.$$

Bezeichnen wir nun den Brechungsexponenten für den leeren

Raum und atmosphärische Luft bei der Temperatur t und dem barometrischen Drucke b durch n, so zeigen bei verschiedenen Temperaturen und Barometerständen angestellte Versuche, dass der Quotient

$$(n^2-1):\frac{b}{0^m,76.(1+0,00375.t)},$$

oder der Bruch

$$\frac{0^m,76.(1+0,00375.t)(n^2-1)}{b}$$

sehr nahe eine constante Grösse ist, d. h. dass die Grösse n^2-1, welche man gewöhnlich die brechende Kraft zu nennen pflegt, der Dichtigkeit der Luft proportional, oder dass der Quotient der brechenden Kraft durch die Dichtigkeit der Luft, welchen man gewöhnlich das Brechungsvermögen zu nennen pflegt, eine constante Grösse ist. Bezeichnen wir also, dies vorausgesetzt, den Brechungsexponenten für den leeren Raum und atmosphärische Luft bei der Temperatur 0 und der Barometerhöhe $0^m,76$ durch N, so ist $n=N$ für $t=0$ und $b=0^m,76$; folglich, weil der obige Bruch eine constante Grösse ist:

$$\frac{0^m,76.(1+0,00375.t)(n^2-1)}{b}=N^2-1,$$

also, wie man hieraus leicht findet:

$$N=\sqrt{1+\frac{0^m,76.(1+0,00375.t)(n^2-1)}{b}},$$

mittelst welcher Formel der Brechungsexponent für den leeren Raum und atmosphärische Luft bei der Temperatur 0 und der Barometerhöhe $0^m,76$ aus den durch unmittelbare Versuche bestimmten Werthen des Brechungsexponenten n für den leeren Raum und atmosphärische Luft bei der Temperatur t und Barometerhöhe b berechnet werden kann.

Nach Biot ist bis auf sieben Decimalstellen genau

$$N=1,0002943$$

und

$$N^2-1=0,0005888.$$

Aus der obigen Gleichung zwischen n und N folgt auch

$$n=\sqrt{1+\frac{b(N^2-1)}{0^m,76.(1+0,00375.t)}},$$

d. i., wenn wir die Dichtigkeit der atmosphärischen Luft bei d[er] Temperatur t und der Barometerhöhe b durch D bezeichnen, w[ird] nach dem Obigen

$$D = \frac{b}{0^m,76.(1+0,00375.t)}$$

ist,

$$n = \sqrt{1+(N^2-1)D},$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$K = N^2 - 1 = 0,0005888$$

setzen, wo also K eine constante Grösse ist:

$$n = \sqrt{1+KD}.$$

Ist n_1 der Brechungsexponent für den leeren Raum und atmosphärische Luft von der Dichtigkeit D_1, so ist nach der vorhergehenden Gleichung

$$n_1 = \sqrt{1+KD_1};$$

also ist nach II.

$$\frac{n_1}{n} = \frac{\sqrt{1+KD_1}}{\sqrt{1+KD}} = \sqrt{\frac{1+KD_1}{1+KD}}$$

der Brechungsexponent für atmosphärische Luft von der Dichtigkeit D und atmosphärische Luft von der Dichtigkeit D_1.

Dies sind die Erfahrungssätze, welche wir unserer folgenden Entwickelung der Theorie der atmosphärischen Refraction zum Grunde legen werden.

Entwickelung des allgemeinen Begriffs der Refractionscurven.

In Taf. I. Fig. 1. sei C der Mittelpunkt der Erde, welche wir hier als eine Kugel betrachten. Die Atmosphäre der Erde denke man sich von dem Punkte s in derselben an bis zu der Oberfläche der Erde in n mit der Oberfläche der Erde concentrische Schichten von gleicher Höhe eingetheilt, und nehme in jeder dieser Schichten die Luft als gleichförmig dicht an. Die Brechungsexponenten für den leeren Raum und die Luft in der

1sten, 2ten, 3ten, 4ten,.... $n$ten

Schicht von oben nach unten seien respective

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \ldots. \lambda_n.$$

Stellen wir uns nun vor, dass ein von dem Punkte s in der Atmosphäre ausgehender Lichtstrahl nach und nach bei den Punkten

$$s_1, s_2, s_3, s_4, \ldots. s_{n-1}$$

respective in die

2te, 3te, 4te, 5te,.... $n$te

Schicht übergeht, und bei dem Punkte s_n an der Oberfläche der Erde anlangt, so wird wegen der bekanntlich von oben nach unten hin wachsenden Dichtigkeit der Luft in der Atmosphäre der Erde der ganze Weg

$$ss_1 s_2 s_3 s_4 \ldots. s_n$$

des Strahls nach dem Erfahrungssatze I. offenbar eine nach der Oberfläche der Erde hin concave gebrochene Linie sein, wobei man nur nicht zu übersehen hat, dass die in der Figur von dem Mittelpunkte C der Erde nach den Punkten $s_1, s_2, s_3, s_4, \ldots. s_{n-1}$ gezogenen geraden Linien die diesen Punkten entsprechenden Einfallslothe sind. Bezeichnen wir nun bei den Punkten

$$s_1, s_2, s_3, s_4, \ldots. s_{n-1}$$

die Einfallswinkel und Brechungswinkel respective durch

$$z_1, z_2, z_3, z_4, \ldots. z_{n-1}$$

und

$$\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \ldots. \zeta_{n-1};$$

so haben wir, weil nach dem Erfahrungssatze II. die denselben Punkten entsprechenden Brechungsexponenten

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1},\ \frac{\lambda_3}{\lambda_2},\ \frac{\lambda_4}{\lambda_3},\ \frac{\lambda_5}{\lambda_4},\ldots \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}$$

sind, nach dem Erfahrungssatze I. die folgenden Gleichungen:

$$\frac{\sin z_1}{\sin \zeta_1}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1},$$

$$\frac{\sin z_2}{\sin \zeta_2}=\frac{\lambda_3}{\lambda_2},$$

$$\frac{\sin z_3}{\sin \zeta_3}=\frac{\lambda_4}{\lambda_3},$$

$$\frac{\sin z_4}{\sin \zeta_4}=\frac{\lambda_5}{\lambda_4}.$$

u. s. w.

$$\frac{\sin z_{n-1}}{\sin \zeta_{n-1}}=\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}.$$

Multiplicirt man aber alle diese Gleichungen in einander und hebt auf, was sich aufheben lässt, so erhält man die Gleichung:

$$1)\quad \frac{\sin z_1 \sin z_2 \sin z_3 \sin z_4 \ldots \sin z_{n-1}}{\sin \zeta_1 \sin \zeta_2 \sin \zeta_3 \sin \zeta_4 \ldots \sin \zeta_{n-1}}=\frac{\lambda_n}{\lambda_1}.$$

Bezeichnen wir nun noch analog mit dem Vorhergehenden die in den Punkten s und s_n von den Strahlen ss_1 und $s_{n-1}s_n$ mit den von dem Mittelpunkte C der Erde nach den Punkten s und s_n gezogenen Einfallslothen eingeschlossenen spitzen Winkel respective durch ζ und z_n; so haben wir in den Dreiecken

$$sCs_1,\ s_1Cs_2,\ s_2Cs_3,\ s_3Cs_4,\ldots s_{n-1}Cs_n$$

nach einem bekannten trigonometrischen Elementarsatze die folgenden Proportionen:

$$\sin\zeta : \sin z_1 = Cs_1 : Cs,$$

$$\sin\zeta_1 : \sin z_2 = Cs_2 : Cs_1,$$

$$\sin\zeta_2 : \sin z_3 = Cs_3 : Cs_2,$$

$$\sin\zeta_3 : \sin z_4 = Cs_4 : Cs_3,$$

u. s. w.

$$\sin\zeta_{n-2} : \sin z_{n-1} = Cs_{n-1} : Cs_{n-2},$$

$$\sin\zeta_{n-1} : \sin z_n = Cs_n : Cs_{n-1};$$

aus denen sich auf der Stelle durch Zusammensetzung die Proportion

$$\sin\zeta \sin\zeta_1 \sin\zeta_2 \sin\zeta_3 \ldots \sin\zeta_{n-2} \sin\zeta_{n-1}$$
$$: \sin z_1 \sin z_2 \sin z_3 \sin z_4 \ldots \sin z_{n-1} \sin z_n = Cs_n : Cs,$$

oder die Gleichung

$$2)\quad \frac{\sin z_1 \sin z_2 \sin z_3 \sin z_4 \ldots \sin z_{n-1}}{\sin\zeta_1 \sin\zeta_2 \sin\zeta_3 \sin\zeta_4 \ldots \sin\zeta_{n-1}} \cdot \frac{\sin z_n}{\sin\zeta} = \frac{Cs}{Cs_n}$$

ergiebt. Aus der Vergleichung der Gleichungen 1) und 2) mit einander erhält man aber auf der Stelle die Gleichung

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \cdot \frac{\sin z_n}{\sin\zeta} = \frac{Cs}{Cs_n},$$

oder die Gleichung

$$3)\quad \frac{\sin\zeta}{\sin z_n} = \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \cdot \frac{Cs_n}{Cs}.$$

Denken wir uns nun noch von dem Mittelpunkte der Erde auf die gehörig verlängerte Linie ss_1 ein Perpendikel gefällt, und bezeichnen dasselbe durch P, so ist

$$\sin\zeta = \frac{P}{Cs};$$

also nach der Gleichung 3) offenbar

$$\frac{P}{\sin z_n} = \frac{\lambda_n}{\lambda_1} . Cs_n,$$

und folglich, wenn wir den Erdhalbmesser Cs_n durch a bezeichnen:

$$4)\quad P = a\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\sin z_n.$$

Denken wir uns jetzt, dass die Anzahl n der gleich hohen Schichten, in welche wir die Atmosphäre von dem Punkte s bis zum Punkte s_n, d. h. bis zur Oberfläche der Erde, getheilt haben, in's Unendliche wächst, so geht die gebrochene Linie

$$s\, s_1\, s_2\, s_3\, s_4 \ldots s_n$$

in eine stetig gekrümmte Linie über; P geht in das von dem Mittelpunkte C der Erde auf die Berührende dieser Curve in dem Punkte s gefällte Perpendikel, und der Winkel z_n geht in den von der Berührenden dieser Curve in dem Punkte s_n, wo sie die Oberfläche der Erde trifft, mit dem von dem Mittelpunkte der Erde nach dem Punkte s_n gezogenen Einfallslothe eingeschlossenen spitzen Winkel, welchen wir im Folgenden durch Z bezeichnen wollen, über; ferner gehen λ_1 und λ_n respective in die Brechungsexponenten für den leeren Raum und die atmosphärische Luft in dem Punkte s, und für den leeren Raum und die atmosphärische

Luft in dem Punkte s_n, d. h. an der Erdoberfläche, welche wir im Folgenden respective durch λ und L bezeichnen wollen, über, und es ist also nach der Gleichung 4), wenn jetzt P das von dem Mittelpunkte C der Erde auf die dem Punkte s entsprechende Berührende gefällte Perpendikel bezeichnet, für ein unendlich grosses n:

$$5)\quad P = a\frac{L}{\lambda}\sin Z,$$

welche Gleichung also eigentlich die Gränzgleichung ist, der sich die Gleichung 4) bis zu jedem beliebigen Grade nähert, wenn die ganze Zahl n in's Unendliche wächst.

Auf der Stelle erhellet aber, dass bei der vorhergehenden Betrachtung für den Punkt s auch jeder andere Punkt der zwischen den Punkten s und s_n liegenden atmosphärischen Refractionscurve gesetzt werden kann, so dass also die Gleichung 5) überhaupt für jeden Punkt dieser Curve gilt, was einer weiteren Erläuterung nicht bedürfen wird, da es sich aus der vorhergehenden Betrachtung ganz von selbst ergiebt.

Ueberlegen wir nun, welche Grössen in der Gleichung 5) constant und variabel sind, so fällt auf der Stelle in die Augen, dass — natürlich bloss für dieselbe atmosphärische Refractionscurve — die auf den an der Oberfläche der Erde liegenden constanten, vorher durch s_n bezeichneten Punkt sich beziehenden Grössen a, L, Z constant, dagegen die auf den vorher durch s bezeichneten veränderlichen Punkt der Curve sich beziehenden Grössen λ, P variabel sind. Setzen wir also der Kürze wegen

$$6)\quad \mu = aL\sin Z,$$

wo μ eine für dieselbe Refractionscurve constante Grösse ist, wegen seiner Abhängigkeit von dem Winkel Z aber natürlich für verschiedene Refractionscurven seinen Werth ändert, so erhält die Gleichung 5) die Form

$$7)\quad P = \frac{\mu}{\lambda}.$$

Der Brechungsexponent λ für den leeren Raum und die Luft in dem als ein Repräsentant aller Punkte der Refractionscurve zu betrachtenden Punkte s derselben, und also auch der reciproke Brechungsexponent $\frac{1}{\lambda}$ für den leeren Raum und die Luft in diesem Punkte, hängt nach dem Erfahrungssatze III. bloss von der Dichtigkeit der Luft in dem Punkte s ab, und diese Dichtigkeit hängt nach Gesetzen, welche wir hier als aus der Physik bekannt voraussetzen müssen, und gewiss auch als bekannt vorauszusetzen berechtigt sind, wieder bloss von der Höhe des Punktes s über der Oberfläche der Erde, oder, was natürlich im Wesentlichen ganz dasselbe ist, von der Entfernung dieses Punktes von dem Mittelpunkte der Erde ab. Also hängt auch der reciproke Brechungs-

exponent $\frac{1}{\lambda}$ für den leeren Raum und die atmosphärische Luft in dem Punkte s bloss von der Entfernung dieses Punktes von dem Mittelpunkte der Erde ab, so dass also, wenn wir die Entfernung des Punktes s vom Mittelpunkte der Erde durch u bezeichnen,

$$8)\ \frac{1}{\lambda}=f(u),$$

wo $f(u)$ eine bloss von u als unabhängige veränderliche Grösse abhängende Function bezeichnet, gesetzt werden kann. Und unter dieser Voraussetzung erhält nun die für alles Folgende sehr wichtige Gleichung 7) die Form

$$9)\ P=\mu f(u).$$

Diese Betrachtungen führen uns auf den folgenden allgemeinen Begriff einer besondern Klasse von Curven, welche wir überhaupt mit dem Namen Refractionscurven zu belegen für zweckmässig halten.

Eine *Refractionscurve* heisst jede Curve von solcher Beschaffenheit, dass man das von einem gegebenen bestimmten Punkte, welcher der *Pol* der Refractionscurve genannt werden soll, auf ihre Berührende in einem beliebigen ihrer Punkte gefällte Perpendikel jederzeit erhält, wenn man eine bloss von der Entfernung dieses Punktes der Refractionscurve von ihrem Pole als unabhängige veränderliche Grösse abhängende Function mit einer Grösse multiplicirt, welche für dieselbe Refractionscurve — d. h. für alle Punkte derselben — constant ist, für verschiedene Refractionscurven aber ihren Werth ändert.

Von diesem allgemeinen Begriffe ausgehend, wollen wir nun zuvörderst im folgenden Abschnitte einige merkwürdige geometrische Eigenschaften aller Refractionscurven entwickeln.

Allgemeine geometrische Eigenschaften der Refractionscurven.

Wir wollen den Pol der Refractionscurve im Folgenden als den Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystems annehmen, und die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Refractionscurve in Bezug auf dieses System durch x, y bezeichnen.

Bezeichnen wir nun die veränderlichen Coordinaten durch X, Y; so ist nach den Principien der analytischen Geometrie

$$10)\quad Y-y=\frac{\partial y}{\partial x}(X-x)$$

die Gleichung der Berührenden der Refractionscurve in dem Punkte (xy). Bringt man diese Gleichung auf die Form

$$11)\quad Y=\frac{\partial y}{\partial x}X+y-x\frac{\partial y}{\partial x},$$

so ergiebt sich, wenn P seine ihm im vorhergehenden Abschnitte beigelegte Bedeutung auch jetzt behält, und folglich das von dem Pol oder Anfange der Coordinaten auf die durch die Gleichung 10) oder 11) charakterisirte Berührende gefällte Perpendikel bezeichnet, aus einer andern bekannten Grundformel der analytischen Geometrie auf der Stelle die Gleichung

$$12)\quad P^2=\frac{(y-x\frac{\partial y}{\partial x})^2}{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2},$$

wobei man nicht aus den Augen lassen darf, dass der Pol als Anfang der Coordinaten angenommen worden ist. Also haben wir nach dem im vorhergehenden Abschnitte entwickelten allgemeinen Begriffe der Refractionscurven, wenn auch die Symbole μ und u ihre ihnen dort beigelegten Bedeutungen behalten, die folgende Gleichung:

$$13)\quad \frac{(y-x\frac{\partial y}{\partial x})^2}{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}=\mu^2(f(u))^2,$$

oder, weil bekanntlich

$$14)\quad u=\sqrt{x^2+y^2}$$

ist, die Gleichung

$$15)\quad \frac{\left(y-x\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}=\mu^2(f(\sqrt{x^2+y^2}))^2$$

Die Gleichung 13) bringt man leicht auf die Form

$$16)\quad \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2-\frac{2xy}{x^2-\mu^2(f(u))^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{y^2-\mu^2(f(u))^2}{x^2-\mu^2(f(u))^2},$$

und erhält ferner, wenn man diese Gleichung in Bezug auf $\frac{\partial y}{\partial x}$ als unbekannte Grösse wie eine gewöhnliche quadratische Gleichung auflöst, nach einigen leichten Reductionen für $\frac{\partial y}{\partial x}$ den Ausdruck:

$$17)\quad \frac{\partial y}{\partial x}=\frac{xy\pm\sqrt{x^2y^2-\{x^2-\mu^2(f(u))^2\}\{y^2-\mu^2(f(u))^2\}}}{x^2-\mu^2(f(u))^2}.$$

Weil aber

$$\{x^2-\mu^2(f(u))^2\}\{y^2-\mu^2(f(u))^2\}$$
$$=x^2y^2-\mu^2(x^2+y^2)(f(u))^2+\mu^4(f(u))^4,$$

und folglich nach 14)

$$\{x^2-\mu^2(f(u))^2\}\{y^2-\mu^2(f(u))^2\}$$
$$=x^2y^2-\mu^2u^2(f(u))^2+u^4(f(u))^4$$
$$=x^2y^2-\mu^2(f(u))^2\{u^2-\mu^2(f(u))^2\}$$

ist, so ist

$$18)\quad \frac{\partial y}{\partial x}=\frac{xy\pm\mu f(u)\sqrt{u^2-\mu^2(f(u))^2}}{x^2-\mu^2(f(u))^2}.$$

Hieraus ergiebt sich aber ferner mittelst leichter Rechnung mit gehöriger Beziehung der obern und untern Zeichen auf das obere und untere Zeichen in der vorhergehenden Gleichung 18):

$$19)\quad y-x\frac{\partial y}{\partial x}=-\mu f(u).\frac{\mu y f(u)\pm x\sqrt{u^2-\mu^2(f(u))^2}}{x^2-\mu^2(f(u))^2}$$

und

$$20)\quad x+y\frac{\partial y}{\partial x}$$
$$=\pm\frac{\mu y f(u)\pm x\sqrt{u^2-\mu^2(f(u))^2}}{x^2-\mu^2(f(u))^2}\sqrt{u^2-\mu^2(f(u))^2},$$

wobei man immer die Gleichung 14) gehörig zu berücksichtigen hat. Ferner erhält man auch leicht

$$1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

$$=\frac{x^2u^2-\mu^2(x^2-y^2)(f(u))^2 \pm 2\mu xyf(u)\sqrt{u^2-\mu^2(f(u))^2}}{\{x^2-\mu^2(f(u))^2\}^2},$$

oder

$$1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

$$=\frac{\mu^2y^2(f(u))^2 \pm 2\mu xyf(u)\sqrt{u^2-\mu^2(f(u))^2}+x^2\{u^2-\mu^2(f(u))^2\}}{\{x^2-\mu^2(f(u))^2\}^2},$$

also offenbar

$$21)\quad 1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=\left\{\frac{\mu yf(u)\pm x\sqrt{u^2-\mu^2(f(u))^2}}{x^2-\mu^2(f(u))^2}\right\}^2.$$

Weil aber nach 13)

$$22)\quad 1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=\left\{\frac{y-x\frac{\partial y}{\partial x}}{\mu f(u)}\right\}^2$$

ist, so ist auch

$$23)\quad \left\{\frac{y-x\frac{\partial y}{\partial x}}{\mu f(u)}\right\}^2=\left\{\frac{\mu yf(u)\pm x\sqrt{u^2-\mu^2(f(u))^2}}{x^2-\mu^2(f(u))^2}\right\}^2.$$

Weil nach 14)

$$u=\sqrt{x^2+y^2}$$

ist, so ist, wie man leicht durch Differentiation nach x findet:

$$24)\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x+y\frac{\partial y}{\partial x}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x+y\frac{\partial y}{\partial x}}{u}.$$

Der Differentialquotient der Grösse

$$\frac{(y-x\frac{\partial y}{\partial x})^2}{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}$$

in Bezug auf x als unabhängige veränderliche Grösse ist, wie man nach einigen leichten Reductionen findet:

$$-\frac{2(x+y\frac{\partial y}{\partial x})(y-x\frac{\partial y}{\partial x})\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}{\{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\}^2};$$

und der Differentialquotient von $\mu^2(f(u))^2$ in Bezug auf x als unabhängige veränderliche Grösse ist nach den Principien der Differentialrechnung:

$$2\mu^2 f(u)\frac{\partial f(u)}{\partial x}=2\mu^2 f(u)\frac{\partial f(u)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x},$$

d. i. in der bekannten Bezeichnung der Differentialquotienten als derivirte Functionen und nach 24):

$$2\mu^2 f(u)f'(u)\cdot\frac{x+y\frac{\partial y}{\partial x}}{u}.$$

Also haben wir wegen 13) die Gleichung:

$$-\frac{2(x+y\frac{\partial y}{\partial x})(y-x\frac{\partial y}{\partial x})\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}{\{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\}^2}=2\mu^2 f(u)f'(u)\cdot\frac{x+y\frac{\partial y}{\partial x}}{u},$$

aus der sich

$$25)\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-\mu^2\frac{f(u)f'(u)}{u}\cdot\frac{\{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\}^2}{y-x\frac{\partial y}{\partial x}},$$

oder, weil nach 13)

$$26)\quad \mu^2=\frac{(y-x\frac{\partial y}{\partial x})^2}{\{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\}(f(u))^2}$$

ist,

$$27)\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-(y-x\frac{\partial y}{\partial x})\{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\}\cdot\frac{f'(u)}{uf(u)},$$

und folglich auch

$$28)\quad \frac{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}=-\frac{uf(u)}{(y-x\frac{\partial y}{\partial x})f'(u)}$$

ergiebt.

Bezeichnen wir jetzt die Coordinaten des Mittelpunkts des Krümmungskreises der Refractionscurve in dem Punkte (xy) der-

selben durch p, q, und den Halbmesser des Krümmungskreises oder den demselben Punkte entsprechenden Krümmungshalbmesser durch r; so ist nach den Principien der analytischen Geometrie bekanntlich

$$29)\quad \begin{cases} p = x - \dfrac{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial x}, \\[2ex] q = y + \dfrac{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}; \end{cases}$$

und

$$30)\quad r^2 = \frac{\left\{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\}^3}{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2}.$$

Also ist nach 28):

$$31)\quad \begin{cases} p = x + \dfrac{uf(u)}{(y - x\frac{\partial y}{\partial x})f'(u)} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial x}, \\[2ex] q = y - \dfrac{uf(u)}{(y - x\frac{\partial y}{\partial x})f'(u)}; \end{cases}$$

und folglich, wenn man für

$$\frac{\partial y}{\partial x} \text{ und } y - x\frac{\partial y}{\partial x}$$

ihre Ausdrücke aus 18) und 19) in diese Formeln einführt:

$$32)\quad \begin{cases} p = x - \dfrac{u}{\mu f'(u)} \cdot \dfrac{xy \pm \mu f(u)\sqrt{u^2 - \mu^2(f(u))^2}}{\mu y f(u) \pm x\sqrt{u^2 - \mu^2(f(u))^2}}, \\[2ex] q = y + \dfrac{u}{\mu f'(u)} \cdot \dfrac{x^2 - \mu^2(f(u))^2}{\mu y f(u) \pm x\sqrt{u^2 - \mu^2(f(u))^2}}. \end{cases}$$

Ferner ist nach 30) und 27):

$$r^2 = \frac{\left\{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\}^3}{(y - x\frac{\partial y}{\partial x})^2\left\{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\}^2 \cdot \left\{\frac{f'(u)}{uf(u)}\right\}^2},$$

d. i.

$$r^2 = \frac{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}{(y-x\frac{\partial y}{\partial x})^2} \cdot \left\{\frac{uf(u)}{f'(u)}\right\}^2,$$

und folglich nach 13)

$$r^2 = \frac{1}{\mu^2(f(u))^2} \cdot \left\{\frac{uf(u)}{f'(u)}\right\}^2,$$

d. i.

$$33) \quad r^2 = \left\{\frac{u}{\mu f'(u)}\right\}^2.$$

Weil in der Atmosphäre der Erde die Dichtigkeit der Luft abnimmt, wenn die Entfernung vom Mittelpunkte der Erde, d. i. die Grösse u, zunimmt, so nimmt nach dem Erfahrungssatze III. die Grösse λ ab, wenn u zunimmt. Also nimmt

$$f(u) = \frac{1}{\lambda}$$

zu, wenn u zunimmt. Folglich ist der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta f(u)}{\Delta u},$$

und also offenbar auch die Gränze, welcher derselbe sich nähert, wenn Δu sich der Null nähert, d. h. der Differentialquotient

$$\frac{\partial f(u)}{\partial u} = f'(u),$$

stets eine positive Grösse: und weil nun offenbar auch u und

$$\mu = aL \sin Z$$

positive Grössen sind, so ist nach 33) für die Erdatmosphäre

$$34) \quad r = \frac{u}{\mu f'(u)}.$$

Die Gleichung der durch den Pol oder den Anfang der Coordinaten und den Punkt (xy) der Refractionscurve gehenden geraden Linie ist

$$35) \quad Y = \frac{y}{x} X.$$

Die Gleichung der auf dieser Linie senkrecht stehenden und durch den Mittelpunkt (pq) des dem Punkte (xy) entsprechenden Krümmungskreises der Refractionscurve gehenden geraden Linie ist nach den Principien der analytischen Geometrie, wie leicht erhellen wird:

$$36)\quad Y-q=-\frac{x}{y}(X-p).$$

Lassen wir nun X, Y die Coordinaten des Durchschnittspunkts der beiden durch die Gleichungen 35) und 36) charakterisirten geraden Linien bezeichnen, so erhalten wir durch Auflösung dieser beiden Gleichungen in Bezug auf X und Y als unbekannte Grössen mittelst leichter Rechnung:

$$X=\frac{x(px+qy)}{x^2+y^2},\quad Y=\frac{y(px+qy)}{x^2+y^2};$$

d. i. nach 14):

$$37)\quad X=\frac{x(px+qy)}{u^2},\quad Y=\frac{y(px+qy)}{u^2}.$$

Nun ist aber nach 32)

$$px+qy$$
$$=x^2+y^2-\frac{u}{\mu f'(u)}\cdot\mu f(u).\frac{\mu yf(u)\pm x\sqrt{u^2-\mu^2(f(u))^2}}{\mu yf(u)\pm x\sqrt{u^2-\mu^2(f(u))^2}},$$

d. i.

$$px+qy=u^2-\frac{uf(u)}{f'(u)}=u^2\{1-\frac{f(u)}{uf'(u)}\};$$

folglich nach 37):

$$38)\quad X=x\{1-\frac{f(u)}{uf'(u)}\},\quad Y=y\{1-\frac{f(u)}{uf'(u)}\}.$$

Diese beiden Gleichungen enthalten einen sehr merkwürdigen allgemeinen Satz, welcher eine Eigenschaft der Refractionscurven ausspricht, die als die Haupteigenschaft dieser Klasse von Curven zu betrachten ist. Beachtet man nämlich, dass in Folge der beiden vorhergehenden Gleichungen die Coordinaten X, Y des Durchschnittspunkts der beiden durch die Gleichungen 35) und 36) charakterisirten geraden Linien bloss von den Grössen x, y, $u=\sqrt{x^2+y^2}$, gar nicht von der im Vorhergehenden durch μ bezeichneten Grösse, welche bekanntlich für verschiedene Refractionscurven verschiedene Werthe erhält, abhängen; so ergiebt sich auf der Stelle der folgende merkwürdige

Lehrsatz.

Wenn verschiedene auf denselben Pol bezogene Refractionscurven in beliebiger Anzahl durch einen und denselben Punkt gehen, so liegen die Mittelpunkte aller diesem Punkte entsprechenden Krümmungskreise derselben in einer und derselben auf der durch den gemeinschaftlichen Pol und den allen Refractionscur-

ven gemeinschaftlichen Punkt gehenden geraden Linie senkrecht stehenden geraden Linie; oder wenn verschiedene auf denselben Pol bezogene Refractionscurven in beliebiger Anzahl durch einen und denselben Punkt gehen, so ist der geometrische Ort der Mittelpunkte der diesem Punkte entsprechenden Krümmungskreise derselben jederzeit eine auf der durch den gemeinschaftlichen Pol und den allen Refractionscurven gemeinschaftlichen Punkt gehenden geraden Linie senkrecht stehende gerade Linie.

Die Lage dieses geometrischen Orts ist durch die Gleichungen 38) vollkommen bestimmt.

Bezeichnen wir die Entfernung des Mittelpunkts (pq) des dem Punkte (xy) der Refractionscurve entsprechenden Krümmungskreises derselben von dem Pol oder dem Anfange der Coordinaten durch Q, so ist bekanntlich

$$Q = \sqrt{p^2 + q^2}.$$

Nach 32) ist aber

$$p^2 + q^2 = x^2 - \frac{2u}{\mu f'(u)} \cdot \frac{x^2 y \pm \mu x f(u) \sqrt{u^2 - \mu^2 (f(u))^2}}{\mu y f(u) \pm x \sqrt{u^2 - \mu^2 (f(u))^2}}$$

$$+ \left\{\frac{u}{\mu f'(u)}\right\}^2 \cdot \frac{\left\{\begin{array}{c} x^2 y^2 \pm 2\mu x y f(u) \sqrt{u^2 - \mu^2 (f(u))^2} \\ + \mu^2 (f(u))^2 \{u^2 - \mu^2 (f(u))^2\} \end{array}\right\}}{\{\mu y f(u) \pm x \sqrt{u^2 - \mu^2 (f(u))^2}\}^2}$$

$$+ y^2 + \frac{2u}{\mu f'(u)} \cdot \frac{x^2 y - \mu^2 y (f(u))^2}{\mu y f(u) \pm x \sqrt{u^2 - \mu^2 (f(u))^2}}$$

$$+ \left\{\frac{u}{\mu f'(u)}\right\}^2 \cdot \frac{x^4 - 2\mu^2 x^2 (f(u))^2 + \mu^4 (f(u))^4}{\{\mu y f(u) \pm x \sqrt{u^2 - \mu^2 (f(u))^2}\}^2}$$

$$= u^2 - \frac{2u}{\mu f'(u)} \cdot \mu f(u) \cdot \frac{\mu y f(u) \pm x \sqrt{u^2 - \mu^2 (f(u))^2}}{\mu y f(u) \pm x \sqrt{u^2 - \mu^2 (f(u))^2}}$$

$$+ \left\{\frac{u}{\mu f'(u)}\right\}^2 \cdot \frac{x^2 u^2 - \mu^2 (x^2 - y^2)(f(u))^2 \pm 2\mu x y f(u) \sqrt{u^2 - \mu^2 (f(u))^2}}{\{\mu y f(u) \pm x \sqrt{u^2 - \mu^2 (f(u))^2}\}^2},$$

und folglich, weil, wie wir schon aus dem Obigen wissen,

$$x^2 u^2 - \mu^2 (x^2 - y^2)(f(u))^2 \pm 2\mu x y f(u) \sqrt{u^2 - \mu^2 (f(u))^2}$$
$$= \{\mu y f(u) \pm x \sqrt{u^2 - \mu^2 (f(u))^2}\}^2$$

ist,

$$p^2 + q^2 = u^2 - \frac{2u f(u)}{f'(u)} + \left\{\frac{u}{\mu f'(u)}\right\}^2,$$

also nach dem Vorhergehenden

$$39)\quad Q=\sqrt{u^2-\frac{2uf(u)}{f'(u)}+\left\{\frac{u}{\mu f'(u)}\right\}^2}.$$

Für die Erdatmosphäre ist nach 34)

$$r=\frac{u}{\mu f'(u)},$$

also

$$40)\quad Q=\sqrt{u^2-2\mu rf(u)+r^2}.$$

Bezeichnen wir die Entfernung der Punkte (xy) und (XY) von einander durch R, so ist

$$R=\sqrt{(x-X)^2+(y-Y)^2}.$$

Nach 38) ist aber

$$x-X=\frac{xf(u)}{uf'(u)},\ y-Y=\frac{yf(u)}{uf'(u)};$$

also

$$(x-X)^2+(y-Y)^2=(x^2+y^2)\left\{\frac{f(u)}{uf'(u)}\right\}^2,$$

oder nach 14)

$$(x-X)^2+(y-Y)^2=\left\{\frac{f(u)}{f'(u)}\right\}^2,$$

und folglich

$$41)\quad R^2=\left\{\frac{f(u)}{f'(u)}\right\}^2.$$

Die Grösse $f(u)$ ist immer positiv, und für die Erdatmosphäre ist nach dem Obigen auch $f'(u)$ positiv; also ist für diese

$$42)\quad R=\frac{f(u)}{f'(u)}.$$

Bezeichnen wir die Entfernung der Punkte (pq) und (XY) von einander durch S, so ist

$$S=\sqrt{(p-X)^2+(q-Y)^2}.$$

Nach dem Obigen ist aber

$$p-X=p-\frac{x(px+qy)}{x^2+y^2}=\frac{y(py-qx)}{x^2+y^2}=\frac{y(py-qx)}{u^2},$$
$$q-Y=q-\frac{y(px+qy)}{x^2+y^2}=\frac{x(qx-py)}{x^2+y^2}=\frac{x(qx-py)}{u^2};$$

also, wie leicht erhellen wird,

$$(p-X)^2+(q-Y)^2=\left(\frac{py-qx}{u}\right)^2.$$

Weil nun nach 31)

$$py-qx=\frac{uf(u)}{f'(u)}\cdot\frac{x+y\frac{\partial y}{\partial x}}{y-x\frac{\partial y}{\partial x}},$$

also

$$\frac{py-qx}{u}=\frac{f(u)}{f'(u)}\cdot\frac{x+y\frac{\partial y}{\partial x}}{y-x\frac{\partial y}{\partial x}}$$

ist, so ist nach 19) und 20)

$$\frac{py-qx}{u}=\mp\frac{f(u)}{f'(u)}\cdot\frac{\sqrt{u^2-\mu^2(f(u))^2}}{\mu f(u)}$$

d. i.

$$\frac{py-qx}{u}=\mp\frac{\sqrt{u^2-\mu^2(f(u))^2}}{\mu f'(u)},$$

folglich nach dem Obigen

$$43)\quad S^2=\frac{u^2-\mu^2(f(u))^2}{\mu^2(f'(u))^2},$$

oder

$$44)\quad S^2=\left\{\frac{u}{\mu f'(u)}\right\}^2-\left\{\frac{f(u)}{f'(u)}\right\}^2,$$

was man auch hätte unmittelbar aus 33) und 41) schliessen können, da natürlich

$$S^2=r^2-R^2$$

sein muss. Für die Erdatmosphäre ist $f'(u)$ nach dem Obigen bekanntlich positiv, und folglich

$$45)\quad S=\frac{\sqrt{u^2-\mu^2(f(u))^2}}{\mu f'(u)}$$

oder

$$46)\quad S=\frac{1}{\mu f'(u)}\sqrt{u^2-\mu^2(f(u))^2}.$$

Durch die Punkte s und s_n der in der Erdatmosphäre liegenden Refractionscurve ss_n in Taf. I. Fig. 2. wollen wir uns jetzt an dieselbe die Berührenden ss' und s_ns_n' gezogen denken. Der Durchschnittspunkt dieser beiden Berührenden sei O, und der von

denselben bei O eingeschlossene Winkel sOs_n' sei Θ. Die von C aus parallel mit $s_n s_n'$ und mit dieser Linie auf einer Seite der dem Punkte s_n entsprechenden Vertikale gezogene Linie CA werde jetzt als der positive Theil der Axe der x angenommen, und die in der Figur von C aus auf CA senkrecht gezogene Linie CB sei der positive Theil der Axe der y; so ist, wenn x, y die Coordinaten des Punktes s in Bezug auf das angenommene System bezeichnen, nach den Principien der analytischen Geometrie

$$47)\quad \operatorname{tang}\Theta = \frac{\partial y}{\partial x},$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$48)\quad w = \frac{\partial y}{\partial x}$$

setzen,

$$49)\quad \operatorname{tang}\Theta = w.$$

Also ist, wenn man nach Θ differentiirt:

$$50)\quad \frac{\partial\Theta}{\cos\Theta^2} = \partial w,$$

und folglich, weil

$$\cos\Theta^2 = \frac{1}{1+\operatorname{tang}\Theta^2} = \frac{1}{1+w^2}$$

ist:

$$51)\quad \partial\Theta = \frac{\partial w}{1+w^2}.$$

Nun ist aber nach 12)

$$52)\quad P = \pm\frac{y - x\frac{\partial y}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}},$$

indem man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem die Grösse $y - x\frac{\partial y}{\partial x}$ positiv oder negativ ist; d. i. in der eingeführten Bezeichnung

$$53)\quad P = \pm\frac{y - xw}{\sqrt{1+w^2}}.$$

Also ist, indem alle Differentiale in Bezug auf w genommen werden:

$$\partial P = \pm\frac{(1+w^2)(\partial y - w\partial x - x\partial w) - (y - xw)w\partial w}{(1+w^2)\sqrt{1+w^2}},$$

und folglich, weil nach 48)

$$\partial y - w\partial x = 0$$

ist:

$$54)\quad \partial P = \mp \frac{(x+yw)\partial w}{(1+w^2)\sqrt{1+w^2}};$$

also nach 51):

$$55)\quad \partial P = \mp \frac{x+yw}{\sqrt{1+w^2}}\partial\Theta.$$

Bezeichnet nun wie gewöhnlich u die Entfernung des Punktes s oder (xy) von dem Mittelpunkte C der Erde, so ist

$$u^2 - P^2 = x^2 + y^2 - P^2,$$

und folglich nach 53)

$$u^2 - P^2 = x^2 + y^2 - \frac{(y-xw)^2}{1+w^2},$$

d. i., wie man nach leichter Rechnung findet:

$$u^2 - P^2 = \frac{(x+yw)^2}{1+w^2}.$$

Nach (55) ist aber

$$\partial P^2 = \frac{(x+yw)^2}{1+w^2}\partial\Theta^2,$$

also nach dem Vorhergehenden

$$\partial P^2 = (u^2 - P^2)\partial\Theta^2,$$

und folglich

$$56)\quad \partial\Theta = \pm \frac{\partial P}{\sqrt{u^2-P^2}},$$

wo sich nun noch frägt, wie in dieser Gleichung das Zeichen zu nehmen ist. Aus einer blossen Ansicht von Taf. I. Fig. 3. wird aber auf der Stelle erhellen, dass P und Θ gleichzeitig zunehmen und abnehmen, und dass also ∂P und $\partial\Theta$ gleiche Vorzeichen haben, in der vorhergehenden Gleichung folglich das obere Zeichen genommen, also

$$57)\quad \partial\Theta = \frac{\partial P}{\sqrt{u^2-P^2}}$$

gesetzt werden muss.

Weil nach 9) aber

$$P = \mu f(u)$$

ist, so ist

$$\partial P = \mu f'(u)\partial u,$$

und folglich

$$58)\quad \partial\Theta = \frac{\mu f'(u)\partial u}{\sqrt{u^2 - \mu^2(f(u))^2}}.$$

Terrestrische Refraction.

In Taf. I. Fig. 4. sei der um den Punkt C, welcher den Mittelpunkt der Erde vorstellen soll, beschriebene Kreis die Meeresfläche, d. h. die wahre oder eigentliche Oberfläche der Erde, und a sei der Halbmesser dieses Kreises, d. h. der Erdhalbmesser. Die Punkte A und B seien zwei Punkte auf der Erde, und in dem Punkte A sei die scheinbare Zenithdistanz Z des Punktes B gemessen worden, welche der von der Berührenden AB' der Refractionscurve AB zwischen A und B in dem Punkte A mit der Vertikale AA' dieses Punktes eingeschlossene Winkel $A'AB'$ ist. Die Höhen der Punkte A und B über der Meeresfläche seien h und H, so dass also $a+h$ und $a+H$ die Entfernungen dieser beiden Punkte von dem Mittelpunkte der Erde sind. Den von den Vertikalen der Punkte A und B am Mittelpunkte der Erde eingeschlossenen Winkel ACB wollen wir in der Kürze durch C bezeichnen.

Weil man das Gesetz der Abnahme der Temperatur in der Atmosphäre von unten nach oben, und also auch das Gesetz der Abnahme der Dichtigkeit der Luft in der Atmosphäre von unten nach oben gar nicht kennt, und wohl auch schwerlich Hoffnung haben darf, jemals zur Kenntniss dieses Gesetzes zu gelangen, es auch selbst fraglich bleibt, ob überhaupt ein solches ganz bestimmtes Gesetz in der Natur existirt; so bleibt nichts anderes übrig, als sich bei der Bestimmung der terrestrischen Refraction mit einer Annäherung zu begnügen, wozu auch alle Schriftsteller über diesen Gegenstand bis jetzt genöthigt gewesen sind. Da nun aber bei terrestrischen Messungen der zwischen den beiden Stationspunkten A und B liegende Bogen AB der Refractionscurve in allen Fällen immer nur sehr wenig gekrümmt und im Verhältniss zu den Dimensionen der Erde nur sehr klein ist, so wird man denselben mit hinreichender Annäherung als einen mit dem Krümmungshalbmesser der Refractionscurve in dem Punkte A als Halbmesser beschriebenen Kreisbogen betrachten können, von welcher freilich nur annähernd richtigen Voraussetzung auch Lambert a. a. O. p. 64. ausgeht. Bezeichnet man den Mittelpunkt dieses Kreisbogens durch O und zieht auch noch durch den Punkt B eine Berührende BD an denselben, so sind offenbar, wenn man sich noch die Sehne AB gezogen denkt, nach bekannten Eigenschaften des Kreises die beiden Winkel BAD und ABD einander gleich, und der Winkel BDB' ist also als Aussenwinkel des Dreiecks ABD doppelt so gross als der Winkel BAD oder BAB', durch welchen offenbar die Grösse der Refraction in dem Punkte A dargestellt wird. Sehr leicht erhellet aber auch aus bekannten Sätzen vom Viereck die Gleichheit der beiden Winkel BDB' und AOB, so dass

also auch der Winkel AOB die doppelte Refraction BAB', oder, wenn wir die Refraction von jetzt an durch φ bezeichnen, der Winkel $AOB = 2\varphi$ ist. Also ist in dem Dreiecke AOB:

$$AB = 2 . AO . \sin\varphi,$$

und folglich, weil nach der Gleichung 34) in den im Vorhergehenden eingeführten Bezeichnungen offenbar

$$AO = \frac{a+h}{\mu f'(a+h)}$$

ist:

$$AB = \frac{2(a+h)}{\mu f'(a+h)} \sin\varphi.$$

In dem Dreiecke ABC ist aber nach einem bekannten trigonometrischen Satze

$$AB^2 = (a+h)^2 + (a+H)^2 - 2(a+h)(a+H)\cos C$$

oder

$$AB^2 = (a+h)^2 + (a+H)^2 - 2(a+h)(a+H)(1 - 2\sin\tfrac{1}{2}C^2),$$

d. i., wie leicht erhellet:

$$AB^2 = (H-h)^2 + 4(a+h)(a+H)\sin\tfrac{1}{2}C^2.$$

Vergleicht man dies mit dem Vorhergehenden, so erhält man die Gleichung

$$\frac{4(a+h)^2}{\mu^2\{f'(a+h)\}^2}\sin\varphi^2$$

$$= (H-h)^2 + 4(a+h)(a+H)\sin\tfrac{1}{2}C^2,$$

also

$$\sin\varphi^2 = \tfrac{1}{4}\mu^2\{f'(a+h)\}^2\left\{\left(\frac{H-h}{a+h}\right)^2 + 4\frac{a+H}{a+h}\sin\tfrac{1}{2}C^2\right\},$$

oder, wie leicht erhellet:

$$\sin\varphi^2 = \tfrac{1}{4}\mu^2\{f'(a+h)\}^2\left\{\left(\frac{H-h}{a+h}\right)^2 + 4\left(1 + \frac{H-h}{a+h}\right)\sin\tfrac{1}{2}C^2\right\},$$

folglich

59) $$\sin\varphi = \tfrac{1}{2}\mu f'(a+h)\sqrt{\left(\frac{H-h}{a+h}\right)^2 + 4\left(1 + \frac{H-h}{a+h}\right)\sin\tfrac{1}{2}C^2},$$

wobei man nicht zu vergessen hat, dass $f'(a+h)$ in der Erdatmosphäre nach dem vorhergehenden Abschnitte bekanntlich eine positive Grösse ist.

Weil nun aber, wenn jetzt L den Brechungsexponenten für den leeren Raum und die Luft am Beobachtungsorte A bezeichnet, nach 6) offenbar

$$60)\quad \mu=(a+h)\,L\sin Z$$

zu setzen ist; so ist nach dem Vorhergehenden

$$61)\quad \sin\varphi=$$

$$\sin Z.\tfrac{1}{2}L(a+h)f'(a+h)\sqrt{\left(\frac{H-h}{a+h}\right)^2+4(1+\frac{H-h}{a+h})\sin\tfrac{1}{2}C^2}.$$

Bezeichnen wir jetzt die Dichtigkeit der Luft in der Entfernung u vom Mittelpunkte der Erde überhaupt durch $\varpi(u)$, so erhellet aus der Gleichung 8) und dem Erfahrungssatze III. auf der Stelle die Richtigkeit der Gleichung

$$62)\quad f(u)=\frac{1}{\sqrt{1+K\varpi(u)}},$$

oder

$$63)\quad f(u)=\{1+K\varpi(u)\}^{-\frac{1}{2}},$$

wo nach dem Erfahrungssatze III.

$$64)\quad K=0{,}0005888$$

ist. Also ist

$$f'(u)=-\tfrac{1}{2}\{1+K\varpi(u)\}^{-\frac{3}{2}}.K\varpi'(u),$$

d. i.

$$65)\quad f'(u)=-\frac{K\varpi'(u)}{2\{1+K\varpi(u)\}\sqrt{1+K\varpi(u)}},$$

und folglich

$$66)\quad f'(a+h)=-\frac{K\varpi'(a+h)}{2\{1+K\varpi(a+h)\}\sqrt{1+K\varpi(a+h)}}.$$

Weil nun aber, wie aus der Bedeutung der Grösse L und dem Erfahrungssatze III. erhellet,

$$67)\quad L=\sqrt{1+K\varpi(a+h)}$$

ist, so ist

$$Lf'(a+h)=-\frac{K\varpi'(a+h)}{2\{1+K\varpi(a+h)\}},$$

und folglich nach dem Obigen

68) $\sin\varphi =$

$$-\sin Z.\frac{K(a+h)\overline{\omega}'(a+h)}{4\{1+K\overline{\omega}(a+h)\}}\sqrt{\left(\frac{H-h}{a+h}\right)^2+4\left(1+\frac{H-h}{a+h}\right)\sin\tfrac{1}{2}C^2}$$

oder auch

69) $\sin\varphi =$

$$-\sin Z.\frac{\frac{1}{4}K(a+h)\overline{\omega}'(a+h)}{1+K\overline{\omega}(a+h)}\sqrt{\left(\frac{H-h}{a+h}\right)^2+4\left(1+\frac{H-h}{a+h}\right)\sin\tfrac{1}{2}C^2}.$$

Die Temperatur der Luft nach dem Centesimalthermometer und die Barometerhöhe nach dem metrischen Barometer in dem Stationspunkte A wollen wir nun respective durch t und b bezeichnen. Wird dann ferner die Dichtigkeit der Luft bei der Temperatur 0 und der Barometerhöhe $0^m,76$ überhaupt durch Δ bezeichnet, so ist bekanntlich

$$\overline{\omega}(a+h)=\frac{b}{0^m,76.(1+0,00375.t)}\Delta.$$

Bezeichnen wir aber den Werth, welchen $\overline{\omega}'(a+h)$ haben würde, wenn in dem Punkte A die Luft die Temperatur 0 hätte und unter dem barometrischen Drucke $0^m,76$ stände, d. h. wenn in dem Punkte A die Dichtigkeit der Luft Δ wäre, durch G, so dass also gleichzeitig

$$\overline{\omega}(a+h)=\Delta,\ \overline{\omega}'(a+h)=G$$

wäre, so wird man offenbar nach den Principien der Differentialrechnung, wenn, wie es zur Zeit der Beobachtung in dem Punkte A nach dem Vorhergehenden wirklich der Fall ist,

$$\overline{\omega}(a+h)=\frac{b}{0^m,76.(1+0,00375.t)}\Delta$$

ist, gleichzeitig

$$\overline{\omega}'(a+h)=\frac{b}{0^m,76.(1+0,00375.t)}G$$

zu setzen berechtigt sein, oder es ist, weil nach dem Erfahrungssatze III. bekanntlich $\Delta=1$ ist:

$$\overline{\omega}(a+h)=\frac{b}{0^m,76.(1+0,00375.t)},$$

$$\overline{\omega}'(a+h)=\frac{b}{0^m,76.(1+0,00375.t)}G;$$

wo nach dem Vorhergehenden offenbar G eine Constante ist. Setzen wir nun der Kürze wegen

70) $\mathfrak{K}=-\frac{1}{4}KG,$

wo auch $\mathfrak{K}$ eine Constante ist, und

$$71)\quad F(b,t) = \frac{b}{0^m{,}76\,.(1+0{,}00375\,.\,t)};$$

so erhält man nach dem Obigen für $\sin\varphi$ den folgenden Ausdruck:

$$72)\quad \sin\varphi =$$

$$\sin Z\,.\,\frac{\mathfrak{K}(a+h)\,F(b,t)}{1+KF(b,t)}\sqrt{\left(\frac{H-h}{a+h}\right)^2+4\left(1+\frac{H-h}{a+h}\right)\sin\tfrac{1}{2}C^2}.$$

Man kann auch

$$73)\quad K_1 = a\mathfrak{K}$$

setzen, wo K_1 wieder eine Constante ist, und erhält dann nach dem Vorhergehenden

$$74)\quad \sin\varphi =$$

$$\sin Z\,.\,\frac{K_1\left(1+\frac{h}{a}\right)F(b,t)}{1+KF(b,t)}\sqrt{\left(\frac{H-h}{a+h}\right)^2+4\left(1+\frac{H-h}{a+h}\right)\sin\tfrac{1}{2}C^2}.$$

Will man sich verstatten, die immer sehr kleinen Grössen

$$\frac{h}{a} \text{ und } \frac{H-h}{a+h}$$

als verschwindend zu betrachten, so wird

$$75)\quad \sin\varphi = \frac{2K_1F(b,t)}{1+KF(b,t)}\sin\tfrac{1}{2}C\sin Z,$$

oder, weil φ und C immer sehr kleine Grössen sind, näherungsweise

$$76)\quad \varphi = \frac{K_1F(b,t)}{1+KF(b,t)}\,.\,C\sin Z.$$

Unter Voraussetzung derselben Temperatur und desselben barometrischen Drucks am Beobachtungsorte, wo die scheinbare Zenithdistanz Z gemessen worden ist, ist also die Refraction φ näherungsweise der Grösse $C\sin Z$ proportional, wo C bekanntlich der von den Vertikalen der beiden Stationen am Mittelpunkte der Erde eingeschlossene Winkel ist.

Bei der vorhergehenden Entwickelung sind wir von den beiden völlig genauen Formeln

$$\text{Chord}\,AB = \frac{2(a+h)}{\mu f'(a+h)}\sin\varphi$$

und

$$\text{Chord}\,AB = \sqrt{(H-h)^2 + 4(a+h)(a+H)\sin\tfrac{1}{2}C^2}$$

ausgegangen. Denkt man sich nun aber aus dem Mittelpunkte C der Erde mit dem Halbmesser CA durch den Punkt A den die Linie CB in dem Punkte B_1 schneidenden Bogen AB_1 beschrieben, und verstattet sich, diesen Bogen als eine auf CA in A und auf CB in B_1 senkrecht stehende gerade Linie zu betrachten, so ist in dem rechtwinkligen Dreiecke ABB_1 offenbar

$$\text{Chord}\,AB = \text{Arc}\,AB_1 . \operatorname{cosec}(Z+\varphi).$$

Nehmen wir aber an, dass der Winkel C in Graden ausgedrückt sei, so ist

$$(a+h)\pi : \text{Arc}\,AB_1 = 180 : C,$$

also

$$\text{Arc}\,AB_1 = \frac{(a+h)\pi C}{180},$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$\text{Chord}\,AB = \frac{(a+h)\pi C \operatorname{cosec}(Z+\varphi)}{180}.$$

Gestatten wir uns jetzt, diese Näherungsgleichung statt der im Obigen in Anwendung gebrachten genauen Gleichung

$$\text{Chord}\,AB = \sqrt{(H-h)^2 + 4(a+h)(a+H)\sin\tfrac{1}{2}C^2}$$

zu gebrauchen, so erhalten wir durch Vergleichung mit der genauen Gleichung

$$\text{Chord}\,AB = \frac{2(a+h)}{\mu f'(a+h)} \sin\varphi$$

die Gleichung

$$\frac{2(a+h)}{\mu f'(a+h} \sin\varphi = \frac{(a+h)\pi C \operatorname{cosec}(Z+\varphi)}{180},$$

also

$$77)\quad \sin\varphi = \frac{\mu\pi f'(a+h)}{360} . C \operatorname{cosec}(Z+\varphi);$$

folglich, weil nach 60)

$$\mu = (a+h) L \sin Z$$

ist:

$$78)\quad \sin\varphi = L(a+h) f'(a+h) . \frac{\pi C}{360} . \frac{\sin Z}{\sin(Z+\varphi)}.$$

Nach dem Obigen ist aber

$$Lf'(a+h) = -\frac{K\overline{\omega}'(a+h)}{2\{1+K\overline{\omega}(a+h)\}};$$

also

$$\sin\varphi = -\frac{K(a+h)\overline{\omega}'(a+h)}{4\{1+K\overline{\omega}(a+h)\}} \cdot \frac{\pi C}{180} \cdot \frac{\sin Z}{\sin(z+\varphi)};$$

oder nach dem Obigen,

$$\sin\varphi = -\frac{\frac{1}{4}KG(a+h)F(b,t)}{1+KF(b,t)} \cdot \frac{\pi C}{180} \cdot \frac{\sin Z}{\sin(Z+\varphi)},$$

d. i.

$$79) \quad \sin\varphi = \frac{\mathfrak{K}(a+h)F(b,t)}{1+KF(b,t)} \cdot \frac{\pi C}{180^0} \cdot \frac{\sin Z}{\sin(Z+\varphi)},$$

oder nach 73):

$$80) \quad \sin\varphi = \frac{K_1(1+\frac{h}{a})F(b,t)}{1+KF(b,t)} \cdot \frac{\pi C}{180^0} \cdot \frac{\sin Z}{\sin(Z+\varphi)}.$$

Setzt man aber φ für $\sin\varphi$, und nimmt nur an, dass φ und C in denselben Maasstheilen ausgedrückt sind, so erhält man näherungsweise

$$81) \quad \varphi = \frac{K_1(1+\frac{h}{a})F(b,t)}{1+KF(b,t)} \cdot \frac{\sin Z}{\sin(Z+\varphi)} \cdot C.$$

Aus der Gleichung 80) erhält man auch, unter der Voraussetzung, dass C in Theilen des Halbmessers oder der Einheit ausgedrückt ist:

$$\sin\varphi\sin(Z+\varphi) = \frac{K_1(1+\frac{h}{a})F(b,t)}{1+KF(b,t)} \cdot C\sin Z,$$

d. i. nach einer bekannten goniometrischen Formel:

$$\cos Z - \cos(Z+2\varphi) = \frac{2K_1(1+\frac{h}{a})F(b,t)}{1+KF(b,t)} \cdot C\sin Z,$$

also

$$\cos(Z+2\varphi) = \cos Z - \frac{2K_1(1+\frac{h}{a})F(b,t)}{1+KF(b,t)} \cdot C\sin Z.$$

Weil nun

$$\cos(Z+2\varphi) = \cos Z\cos 2\varphi - \sin Z\sin 2\varphi$$

ist, so ist, wenn man sich wegen der Kleinheit von φ verstattet, $\cos 2\varphi = 1$ und $\sin 2\varphi = 2\varphi$ zu setzen, wovon das Erste mit Vernachlässigung von Gliedern der zweiten, das Zweite mit Vernachlässigung von Gliedern der dritten Ordnung zulässig ist, näherungsweise

$$\cos(Z+2\varphi) = \cos Z - 2\varphi \sin Z,$$

und folglich, wenn man dies für $\cos(Z+2\varphi)$ in die obige Gleichung setzt:

$$82)\quad \varphi = \frac{K_1 (1+\frac{h}{a}) F(b,t)}{1+KF(b,t)} . C,$$

oder, wenn man nun noch $\frac{h}{a}$ als verschwindend betrachtet:

$$83)\quad \varphi = \frac{K_1 F(b,t)}{1+KF(b,t)} . C.$$

Hiernach ist also unter Voraussetzung derselben Temperatur und desselben barometrischen Drucks am Beobachtungsorte die Refraction dem von den Vertikalen der beiden Stationen am Mittelpunkte der Erde mit einander eingeschlossenen Winkel proportional, welches der Satz ist, auf welchen bekanntlich nach Lambert und Laplace die Berechnung der terrestrischen Refraction allgemein gegründet wird. Ich hoffe aber, durch die vorhergehenden Entwickelungen die Richtigkeit meiner in der Einleitung ausgesprochenen Behauptung, dass dieser Satz nur als eine rohere Annäherung betrachtet werden dürfe, jetzt deutlich nachgewiesen zu haben. Es ergiebt sich dies auch auf unzweideutige Weise, wenn man sich die Mühe nimmt, die Betrachtungen, auf welche Lambert a. a. O. seine Entwickelungen gegründet hat, genauer zu verfolgen und sorgfältig zu analysiren; und dass auch Laplace bei seiner Theorie der atmosphärischen Refraction sich eine ziemliche Anzahl von Vernachlässigungen und Auslassungen kleiner Grössen zu gestatten genöthigt gewesen ist, glaube ich hier als hinreichend bekannt voraussetzen zu dürfen.

Vorzüglich kommt es nun noch darauf an, zu zeigen, wie der aus dem Obigen bekannte constante Coefficient K_1 durch Beobachtungen bestimmt werden kann. Das zweckmässigste und der ganzen obigen Theorie, bei welcher der zwischen den beiden Stationspunkten liegende Bogen der Refractionscurve näherungsweise als ein Kreisbogen betrachtet worden ist, am besten entsprechende und überhaupt die consequenteste Durchführung dieser ganzen Lehre gestattende Mittel, zu dieser Bestimmung zu gelangen, scheinen mir jedenfalls die Messungen oder Beobachtungen sogenannter gegenseitiger Zenithdistanzen zu sein.

Hat man nämlich in den beiden Stationspunkten A und B, wobei jetzt Taf. I. Fig. 5. zu vergleichen ist, gleichzeitig die scheinbaren Zenithdistanzen Z und $\mathfrak{Z}$ gemessen, und bezeichnet die entsprechenden Refractionen durch $\varDelta Z$ und $\varDelta \mathfrak{Z}$, die wahren

ren Zenithdistanzen also durch $Z+\Delta Z$ und $\mathfrak{Z}+\Delta\mathfrak{Z}$; so hat man in dem Dreiecke ABC offenbar die Proportion

$$a+h:a+H=\sin(\mathfrak{Z}+\Delta\mathfrak{Z}):\sin(Z+\Delta Z).$$

Nun ist aber

$$C+\{180^0-(Z+\Delta Z)\}+\{180^0-(\mathfrak{Z}+\Delta\mathfrak{Z})\}=180^0,$$

also

$$\Delta Z+\Delta\mathfrak{Z}=C-(Z+\mathfrak{Z})+180^0,$$

und aus der obigen Proportion ergiebt sich nach einem bekannten Satze

$$\begin{aligned}2a+H+h:H-h\\ &=\sin(Z+\Delta Z)+\sin(\mathfrak{Z}+\Delta\mathfrak{Z}):\sin(Z+\Delta Z)-\sin(\mathfrak{Z}+\Delta\mathfrak{Z})\\ &=\sin\{\tfrac{1}{2}(Z+\mathfrak{Z})+\tfrac{1}{2}(\Delta Z+\Delta\mathfrak{Z})\}\cos\{\tfrac{1}{2}(Z-\mathfrak{Z})+\tfrac{1}{2}(\Delta Z-\Delta\mathfrak{Z})\}\\ &\quad:\cos\{\tfrac{1}{2}(Z+\mathfrak{Z})+\tfrac{1}{2}(\Delta Z+\Delta\mathfrak{Z})\}\sin\{\tfrac{1}{2}(Z-\mathfrak{Z})+\tfrac{1}{2}(\Delta Z-\Delta\mathfrak{Z})\}\\ &=\tang\{\tfrac{1}{2}(Z+\mathfrak{Z})+\tfrac{1}{2}(\Delta Z+\Delta\mathfrak{Z})\}:\tang\{\tfrac{1}{2}(Z-\mathfrak{Z})+\tfrac{1}{2}(\Delta Z-\Delta\mathfrak{Z})\},\end{aligned}$$

d. i. nach dem Vorhergehenden

$$\begin{aligned}2a+H+h:H-h&=\tang(90^0+\tfrac{1}{2}C):\tang\{\tfrac{1}{2}(Z-\mathfrak{Z})+\tfrac{1}{2}(\Delta Z-\Delta\mathfrak{Z})\}\\ &=\cot\tfrac{1}{2}C:\tang\{\tfrac{1}{2}(\mathfrak{Z}-Z)+\tfrac{1}{2}(\Delta\mathfrak{Z}-\Delta Z)\}.\end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung aber, dass der Bogen AB der Refractionscurve zwischen den beiden Stationspunkten A und B ein Kreisbogen sei, welche der ganzen vorhergehenden Theorie der terrestrischen Refraction zum Grunde liegt, ist offenbar $\Delta Z=\Delta\mathfrak{Z}$, weil die Gesichtslinien oder die Visirlinien in A und B als Berührende dieses Kreisbogens zu betrachten und folglich gegen die Sehne AB unter gleichen Winkeln geneigt sind; also ist unter dieser Voraussetzung nach dem Vorhergehenden

$$2a+H+h:H-h=\cot\tfrac{1}{2}C:\tang\tfrac{1}{2}(\mathfrak{Z}-Z),$$

oder auch

$$2(a+h)+H-h:H-h=\cot\tfrac{1}{2}C:\tang\tfrac{1}{2}(\mathfrak{Z}-Z).$$

Bestimmt man aus dieser Proportion $H-h$, so erhält man

$$H-h=\frac{2(a+h)\tang\tfrac{1}{2}(\mathfrak{Z}-Z)}{\cot\tfrac{1}{2}C-\tang\tfrac{1}{2}(\mathfrak{Z}-Z)}$$

oder

$$H-h=\frac{2(a+h)\sin\tfrac{1}{2}C\sin\tfrac{1}{2}(\mathfrak{Z}-Z)}{\cos\tfrac{1}{2}C\cos\tfrac{1}{2}(\mathfrak{Z}-Z)-\sin\tfrac{1}{2}C\sin\tfrac{1}{2}(\mathfrak{Z}-Z)},$$

d. i.

$$84)\quad H-h=\frac{2(a+h)\sin\tfrac{1}{2}C\sin\tfrac{1}{2}(\mathfrak{Z}-Z)}{\cos\tfrac{1}{2}(C+\mathfrak{Z}-Z)},$$

also

$$85)\quad H = h + \frac{2(a+h)\sin\frac{1}{2}C\sin\frac{1}{2}(\mathfrak{Z}-Z)}{\cos\frac{1}{2}(C+\mathfrak{Z}-Z)}.$$

Um mittelst dieser Formel H berechnen zu können, muss ausser den gemessenen scheinbaren Zenithdistanzen Z und $\mathfrak{Z}$ der Erdhalbmesser a bekannt sein, für welchen man am besten den Krümmungshalbmesser des Erdsphäroids unter der Breite setzt, welche das arithmetische Mittel zwischen den Breiten der beiden Stationspunkte ist, wobei wir die Formeln, nach welchen dieser Krümmungshalbmesser am leichtesten berechnet werden kann, die sich ohne Schwierigkeit aus der Theorie der Ellipse entwickeln lassen, hier als bekannt annehmen. Ferner muss die Höhe h der Station A über der Meeresfläche bekannt sein, welche durch barometrische Höhenmessungen oder durch ein Nivellement bestimmt werden muss, weshalb sich Beobachtungen in der Nähe des Meeres zu den Bestimmungen, von welchen hier die Rede ist, am besten eignen dürften. Endlich muss der Winkel C am Mittelpunkte der Erde, welcher aus dem gemessenen Horizontalabstande der beiden Stationspunkte, wie weiter zu erläutern hier nicht nöthig sein wird, immer leicht berechnet werden kann, bekannt sein, aus welchem Grunde gleichfalls Beobachtungen in der Nähe des Meeres zu solchen Bestimmungen wie die obigen die geeignetsten sein dürften.

Hat man nun auf diese Weise H bestimmt, so sind in dem Dreiecke ABC zwei Seiten $a+h$, $a+H$ und der eingeschlossene Winkel C bekannt, und es können also in diesem Dreiecke die beiden andern Winkel, deren Supplemente die wahren Zenithdistanzen in den beiden Stationspunkten A und B sind, nach bekannten Regeln der ebenen Trigonometrie berechnet werden. Zieht man nun von diesen so berechneten wahren Zenithdistanzen die gemessenen scheinbaren Zenithdistanzen ab, so erhält man die terrestrische Refraction, welche im Obigen überhaupt durch φ bezeichnet worden ist.

Wenn nun auch noch auf der Station A das Barometer und Thermometer beobachtet worden ist, wobei wir die beobachtete Barometerhöhe auf bekannte Weise gehörig reducirt voraussetzen, so sind in der Hauptgleichung 74) mit Ausnahme des constanten Coefficienten K_1 alle Grössen bekannt, und dieser Coefficient kann folglich mittelst der aus 74) unmittelbar sich ergebenden Formel

$$86)\quad K_1 = \frac{\{1+KF(b,t)\}\sin\varphi}{(1+\frac{h}{a})F(b,t)\sin Z\sqrt{\left(\frac{H-h}{a+h}\right)^2+4(1+\frac{H-h}{a+h})\sin\frac{1}{2}C^2}}$$

berechnet werden.

Bei der so eben gegebenen Erläuterung der Bestimmung des constanten Coefficienten habe ich mich bloss an die Hauptformel 74) gehalten, weil die Art und Weise, wie man sich bei dieser Bestimmung mittelst der übrigen im Obigen entwickelten Nähe-

rungsformeln zu verhalten hat, nun ganz von selbst erhellen, und hier keiner weitern Erläuterung bedürfen wird.

Wenn aber auch der Refractionscoefficient nach der so eben gegebenen Anleitung bestimmt worden ist und daher als bekannt angenommen werden kann, so wird man bei wirklichen Höhenmessungen zur Bestimmung der gesuchten Höhe am besten und einfachsten doch nur auf dem Wege successiver Annäherungen gelangen können. Man wird nämlich die Refractionen zuerst mittelst einer der beiden Näherungsformeln 75) oder 76), welche von der Höhe nicht abhängen, berechnen und die gemessenen Zenithdistanzen wegen derselben corrigiren, mittelst welcher dann ein erster Näherungswerth der zu bestimmenden Höhe gesucht wird. Dieser erste Näherungswerth der gesuchten Höhe führt dann ferner mittelst der Formel 74) zu einer genauern Bestimmung der Refractionen, wegen welcher die gemessenen Zenithdistanzen von Neuem corrigirt werden, die dann zur Bestimmung eines zweiten Näherungswerths der gesuchten Höhe führen, wobei nun auch schon von selbst erhellen wird, wie man auf diesem Wege beliebig weit, in allen Fällen aber so weit fortschreiten kann, bis zwei auf einander folgende Näherungswerthe der gesuchten Höhe sich in der verlangten Anzahl von Decimalstellen nicht mehr von einander unterscheiden. Abkürzungen und Vereinfachungen dieses Verfahrens werden sich einem Jeden, wo sie zulässig sind, leicht von selbst darbieten; hier beabsichtigten wir nur eine allgemeine Erläuterung desselben, und hatten unser Augenmerk überhaupt zunächst mehr auf die weitere Entwickelung der Theorie der terrestrischen Refraction, als auf den praktischen Theil dieser wichtigen Lehre gerichtet.

Astronomische Refraction.

Wenn, wie Taf. I. Fig. 6. zeigt, ein von einem Sterne S ausgehender Strahl Ss die Atmosphäre der Erde in dem Punkte s trifft, und dann nach den in der Atmosphäre erlittenen Brechungen in dem Punkte s_n auf der Oberfläche der Erde anlangt, so ist offenbar Ss_ns_n' der Winkel, um welchen man die in dem Punkte s_n gemessene scheinbare Zenithdistanz Z dieses Sterns vergrössern muss, um seine wahre Zenithdistanz zu erhalten, also der Winkel, welchen man die astronomische Refraction zu nennen pflegt. Wegen der grossen Entfernungen der Sterne von der Erde kann man aber die Linien Ss_n und Ss oder Ss' ohne allen merklichen Fehler als einander parallel betrachten, woraus sich die Gleichheit der Winkel Ss_ns_n' und SOs_n' oder sOs_n' ergiebt, so dass also auch durch den Winkel sOs_n', welcher oben in dem Abschnitte über die allgemeinen geometrischen Eigenschaften der Refractionscurven durch Θ bezeichnet worden ist, die astronomische Refraction dargestellt wird, und wir daher nach 58) für dieselbe die Differentialgleichung

$$87)\quad \partial\Theta = \frac{\mu f'(u)\partial u}{\sqrt{u^2-\mu^2(f(u))^2}}$$

haben, wo jetzt u die Entfernung der äussersten Gränze der Atmosphäre von dem Mittelpunkte der Erde bezeichnet, und daher im Folgenden offenbar so lange als constant zu betrachten ist, so lange die Luft in der Atmosphäre in einem unveränderlichen Zustande vorausgesetzt wird.

Setzen wir nun

$$88)\quad \partial\Theta = \frac{\mu f'(u)\partial u}{u\sqrt{1-\mu^2\left(\frac{f(u)}{u}\right)^2}}$$

oder

$$\partial\Theta = \mu\left\{1-\mu^2\left(\frac{f(u)}{u}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}.\frac{f'(u)\partial u}{u};$$

und entwickeln die Grösse

$$\left\{1-\mu^2\left(\frac{f(u)}{u}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

nach dem Binomischen Lehrsatze, dessen Anwendung hier zulässig ist, weil die nothwendige Reellität von $\partial\Theta$ von selbst fordert,

dass die Grösse

$$\mu^2\left(\frac{f(u)}{u}\right)^2$$

kleiner als die Einheit ist, in eine Reihe, so erhalten wir

$$\partial\Theta=\mu\frac{f'(u)\partial u}{u}+\tfrac{1}{2}\mu^3\frac{(f(u))^2f'(u)\partial u}{u^3}$$
$$+\frac{1.3}{2.4}\mu^5\frac{(f(u))^4f'(u)\partial u}{u^5}$$
$$+\frac{1.3.5}{2.4.6}\mu^7\frac{(f(u))^6f'(u)\partial u}{u^7}$$
$$+\ldots\ldots\ldots$$

Weil aber die Grösse

$$\mu=aL\sin Z$$

von u ganz unabhängig ist, und Θ für $u=a$ offenbar verschwinden muss, so erhält man aus der obigen Gleichung durch Integration auf der Stelle:

$$\Theta=\mu\int_a^u\frac{f'(u)\partial u}{u}+\tfrac{1}{2}\mu^3\int_a^u\frac{(f(u))^2f'(u)\partial u}{u^3}$$
$$+\frac{1.3}{2.4}\mu^5\int_a^u\frac{(f(u))^4f'(u)\partial u}{u^5}$$
$$+\frac{1.3.5}{2.4.6}\mu^7\int_a^u\frac{(f(u))^6f'(u)\partial u}{u^7}$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ueberlegt man nun, dass die Grössen

$$aL\int_a^u\frac{f'(u)\partial u}{u},$$
$$\tfrac{1}{2}a^3L^3\int_a^u\frac{(f(u))^2f'(u)\partial u}{u^3},$$
$$\frac{1.3}{2.4}a^5L^5\int_a^u\frac{(f(u))^4f'(u)\partial u}{u^5},$$
$$\frac{1.3.5}{2.4.6}a^7L^7\int_a^u\frac{(f(u))^6f'(u)\partial u}{u^7},$$

u. s. w.

von der scheinbaren Zenithdistanz Z ganz unabhängig und also für alle scheinbaren Zenithdistanzen dieselben sind, so können wir dieselben nach der Reihe durch

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{D},\ldots.$$

bezeichnen, indem diese Symbole von der scheinbaren Zenithdistanz Z ganz unabhängige Grössen bedeuten, und erhalten da-

her nach dem Obigen für die astronomische Refraction Θ einen analytischen Ausdruck von der folgenden Form:

$$89)\quad \Theta = \mathfrak{A} \sin Z + \tfrac{1}{2}\mathfrak{B} \sin Z^3 + \frac{1.3}{2.4}\mathfrak{C} \sin Z^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\mathfrak{D} \sin Z^7 + \ldots$$

Einen Ausdruck von anderer Form kann man auf folgende Art entwickeln. Nach dem Obigen ist

$$\partial\Theta = \frac{\mu f'(u)\frac{\partial u}{u}}{\sqrt{1-\mu^2\left(\frac{f(u)}{u}\right)^2}},$$

und folglich, wenn man für μ seinen aus dem Vorhergehenden bekannten Werth einführt:

$$\partial\Theta = \frac{aL \sin Z f'(u)\frac{\partial u}{u}}{\sqrt{1-a^2L^2 \sin Z^2\left(\frac{f(u)}{u}\right)^2}},$$

oder, wie leicht erhellet:

$$\partial\Theta = \frac{aL \sin Z f'(u)\frac{\partial u}{u}}{\sqrt{\cos Z^2 + \{1-a^2L^2\left(\frac{f(u)}{u}\right)^2\}\sin Z^2}},$$

folglich

$$90)\quad \partial\Theta = \frac{aL \operatorname{tang} Z f'(u)\frac{\partial u}{u}}{\sqrt{1+\{1-\left(\frac{aLf(u)}{u}\right)^2\}\operatorname{tang} Z^2}}.$$

Entwickeln wir nun wieder die Grösse

$$\{1+(1-\left(\frac{aLf(u)}{u}\right)^2)\operatorname{tang} Z^2\}^{-\frac{1}{2}}$$

nach dem Binomischen Lehrsatze in eine Reihe, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\partial\Theta = {} & \operatorname{tang} Z . \frac{aLf'(u)}{u}\partial u \\
& -\frac{1}{2}\operatorname{tang} Z^3 . \frac{aLf'(u)}{u}\{1-\left(\frac{aLf(u)}{u}\right)^2\}\partial u \\
& +\frac{1.3}{2.4}\operatorname{tang} Z^5 . \frac{aLf'(u)}{u}\{1-\left(\frac{aLf(u)}{u}\right)^2\}^2\partial u \\
& -\frac{1.3.5}{2.4.6}\operatorname{tang} Z^7 . \frac{aLf'(u)}{u}\{1-\left(\frac{aLf(u)}{u}\right)^2\}^3\partial u \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;
\end{aligned}$$

also, wenn man auf beiden Seiten dieser Gleichung integrirt, auf ganz ähnliche Weise wie bei der vorhergehenden Entwickelung:

$$\begin{aligned}\Theta = &\operatorname{tang} Z \int_a^u \frac{aLf'(u)}{u} \partial u \\ &- \frac{1}{2} \operatorname{tang} Z^3 \int_a^u \frac{aLf'(u)}{u} \left\{1 - \left(\frac{aLf(u)}{u}\right)^2\right\} \partial u \\ &+ \frac{1.3}{2.4} \operatorname{tang} Z^5 \int_a^u \frac{aLf'(u)}{u} \left\{1 - \left(\frac{aLf(u)}{u}\right)^2\right\}^2 \partial u \\ &- \frac{1.3.5}{2.4.6} \operatorname{tang} Z^7 \int_a^u \frac{aLf'(u)}{u} \left\{1 - \left(\frac{aLf(u)}{u}\right)^2\right\}^3 \partial u \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

woraus sich, wenn wieder

$$A,\ B,\ C,\ D, \ldots$$

gewisse von der scheinbaren Zenithdistanz Z ganz unabhängige Grössen bezeichnen, für die astronomische Refraction Θ unmittelbar der folgende Ausdruck ergiebt:

$$91) \quad \Theta = A \operatorname{tang} Z - \frac{1}{2} B \operatorname{tang} Z^3 + \frac{1.3}{2.4} C \operatorname{tang} Z^5 - \frac{1.3.5}{2.4.6} D \operatorname{tang} Z^7 + \ldots$$

Diese Form des allgemeinen Ausdrucks der astronomischen Refraction wird der Theorie derselben gewöhnlich zum Grunde gelegt, und dabei eine grössere oder geringere Anzahl von Gliedern der Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens vom Anfange derselben an berücksichtigt. Da es uns hier, wie schon in der Einleitung bemerkt worden ist, vorläufig nur auf eine allgemeine Erläuterung dieses wichtigen Gegenstandes ankommt, und wir für jetzt mit diesen Entwickelungen nur eine Vervollständigung der im Vorhergehenden gegebenen Theorie der terrestrischen Refraction, vorzüglich Anfängern zu Liebe, bezwecken; so wird es der Kürze wegen hinreichend sein, bei den beiden ersten Gliedern der obigen Reihe stehen zu bleiben, und daher

$$92) \quad \Theta = A \operatorname{tang} Z - \tfrac{1}{2} B \operatorname{tang} Z^3$$

zu setzen. Die Coefficienten A und B sind offenbar nur so lange constant, so lange der Zustand der Atmosphäre ungeändert, d. h. so lange der Stand des Barometers und Thermometers am Beobachtungsorte derselbe bleibt. Legen wir nun aber den Zustand der Atmosphäre, wenn am Beobachtungsorte der Stand des Barometers $0^m,76$ und der Stand des Thermometers 0 ist, als einen Normalzustand zum Grunde, lassen ferner jetzt A und B die diesem Normalzustande der Atmosphäre entsprechenden Werthe der beiden Constanten bedeuten, und setzen endlich, wie gewöhnlich geschieht und, wenn auch nicht mit völliger Strenge, den Beobachtungen zufolge doch wenigstens näherungsweise verstattet ist, die atmosphärischen Refractionen den Dichtigkeiten der Luft proportional: so wird man offenbar, da bekanntlich

$$F(b,t)=\frac{b}{0^m{,}76.(1+0{,}00375.t)}$$

die Dichtigkeit der Luft bei dem Barometerstande b und der Temperatur t ist, nach dem Obigen im Allgemeinen

$$93)\quad \Theta=F(b,t).(A\,\mathrm{tang}\,Z-\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{tang}\,Z^3)$$

oder

$$94)\quad \Theta=F(b,t)A\,\mathrm{tang}\,Z-\tfrac{1}{2}F(b,t)B\,\mathrm{tang}\,Z^3$$

zu setzen haben. Die Constanten A und B in dieser Formel müssen aber durch Beobachtungen bestimmt werden, wozu die Astronomie verschiedene Wege darbietet, von denen wir hier jedoch nur den folgenden etwas näher erläutern wollen.

Man messe die scheinbaren Zenithdistanzen Z' und Z'' eines Circumpolarsterns bei seinem obern und untern Durchgange durch den Meridian, und beobachte gleichzeitig die Stände des Barometers und Thermometers b', t' und b'', t''; so hat man, wenn die entsprechenden Refractionen durch Θ' und Θ'' bezeichnet werden, nach 94) die beiden folgenden Gleichungen:

$$\Theta'=F(b',t')\,\mathrm{tang}\,Z'.A-\tfrac{1}{2}F(b',t')\,\mathrm{tang}\,Z'^3.B,$$
$$\Theta''=F(b'',t'')\,\mathrm{tang}\,Z''.A-\tfrac{1}{2}F(b'',t'')\,\mathrm{tang}\,Z''^3.B.$$

Weil nun $Z'+\Theta'$, $Z''+\Theta''$ die wahren Zenithdistanzen sind, und bekanntlich, wenn P den Abstand des Pols vom Zenith bezeichnet, jederzeit

$$(Z'+\Theta')\pm(Z''+\Theta'')=2P$$

ist *); so erhalten wir aus den beiden obigen Gleichungen, wenn der Kürze wegen

$$\alpha=Z'\pm Z'',$$
$$\beta=F(b',t')\,\mathrm{tang}\,Z'\pm F(b'',t'')\,\mathrm{tang}\,Z'',$$
$$\gamma=\tfrac{1}{2}F(b',t)\,\mathrm{tang}\,Z'^3\pm\tfrac{1}{2}F(b'',t'')\,\mathrm{tang}\,Z''^3$$

gesetzt wird, wo die Grössen α, β, γ aus den Beobachtungen sämmtlich bekannt sind, auf der Stelle die folgende Gleichung:

$$\alpha+\beta A-\gamma B=2P.$$

Hat man nun aber ganz auf dieselbe Art wie vorher drei Circumpolarsterne beobachtet, so erhält man auch drei Gleichungen von der Form:

$$\alpha+\beta A-\gamma B=2P,$$
$$\alpha_1+\beta_1 A-\gamma_1 B=2P,$$
$$\alpha_2+\beta_2 A-\gamma_2 B=2P;$$

*) Die obern oder untern Zeichen sind hier und nachher zu nehmen, jenachdem die Zenithdistanz Z'' (für unsere Hemisphäre) auf der Nordseite oder auf der Südseite des Zeniths gemessen worden ist.

in denen die Grössen

$$\alpha, \beta, \gamma; \quad \alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \quad \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$$

aus den Beobachtungen sämmtlich bekannt, und nur die drei Grössen A, B, P unbekannt sind, welche letzteren sich also mittelst der drei vorhergehenden Gleichungen bestimmen lassen.

Dass durch Vervielfältigung solcher Beobachtungen und mittelst der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate eine grössere Genauigkeit bei diesen Beobachtungen erreicht werden kann und nur allein zu erreichen ist, dürfen wir hier als allgemein bekannt voraussetzen. Jede Beobachtung eines Circumpolarsterns liefert eine Gleichung des ersten Grades von der obigen Form zwischen den drei unbekannten Grössen A, B, P; und hat man nun mehr als drei Sterne beobachtet, so lassen sich die daraus resultirenden Gleichungen, deren Anzahl die Anzahl der zu bestimmenden drei unbekannten Grössen übersteigt, bekanntlich nur der Behandlung nach der Methode der kleinsten Quadrate unterwerfen.

Dass sich zur Bestimmung der constanten Coefficienten in der Gleichung 89) eine der vorhergehenden ganz ähnliche Methode anwenden lassen würde, fällt auf der Stelle in die Augen.

Das Obige enthält zugleich eine Methode zur Bestimmung der die vorher durch P bezeichnete Distanz des Pols vom Zenith zu neunzig Graden ergänzenden Polhöhe des Beobachtungsorts, ohne dabei die unmittelbare Kenntniss der Refraction vorauszusetzen, hat hier aber zunächst nur den Zweck, im Allgemeinen die Möglichkeit der Bestimmung der beiden Constanten A und B durch Beobachtungen zu erläutern.

Eine weitere Entwickelung der Theorie der astronomischen Refraction behalte ich einer andern Gelegenheit vor, und bemerke nochmals, dass die obigen kurzen, wenig erschöpfenden Betrachtungen über diesen wichtigen Gegenstand nur der Vollständigkeit wegen und Anfängern zu Liebe beigefügt worden sind, indem ich in der vorliegenden Abhandlung hauptsächlich nur eine weitere Entwickelung der geometrischen Theorie der terrestrischen Refraction im Auge hatte, und wohl wünschte, durch dieselbe die Aufmerksamkeit einer grösseren Anzahl von Lesern auf diese Theorie von Neuem hinzulenken, und zu einer Wiederholung der Bestimmung des terrestrischen Refractionscoefficienten mit sorgfältiger Berücksichtigung aller dabei in Betracht kommenden Umstände vielleicht Veranlassung zu geben.

II.

Zur Differenziation der Potenz.

Von dem

Herrn Professor Dr. O. Schlömilch

an der Universität zu Jena.

Der Differenzialquotient von x^μ ist bekanntlich die Gränze, welcher sich der Ausdruck

$$\frac{(x+\Delta x)^\mu - x^\mu}{\Delta x} = \frac{x^\mu}{\Delta x}\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^\mu - 1\right]$$

nähert, sobald Δx bis zur Null abnimmt. Da unter dieser Voraussetzung auch $\frac{\Delta x}{x}$ gegen die Null convergirt, so kann man $\frac{\Delta x}{x} = \delta$ setzen, und es ist jetzt für Lim $\delta = 0$:

$$\frac{d(x^\mu)}{dx} = x^{\mu-1} \operatorname{Lim} \frac{(1+\delta)^\mu - 1}{\delta}. \qquad (1)$$

Zur Auffindung des Gränzwerthes rechts hat man sehr verschiedene Wege eingeschlagen, weil man nicht gern das Binomialtheorem für jeden beliebigen Exponenten dabei in Anwendung bringen, sondern im Gegentheil dieses erst im Verlaufe der Differenzialrechnung mit Hülfe des Werthes von $d(x^\mu):dx$ ableiten wollte. Zwar hat es nicht die mindeste Schwierigkeit, mit Hülfe des Satzes

$$\operatorname{Lim}\left[(1+a\delta)^{\frac{1}{\delta}}\right] = e^a$$

die gesuchte Limes zu ermitteln, wie ich z. B. in meinem Handbuche der Differenzialrechnung gethan habe; wem aber die Anwendung dieses Theoremes zu fremdartig erscheinen mag, dem wird vielleicht die folgende Entwickelung besser zusagen, worin nichts weiter als die Kenntniss der ganz elementaren Formel

$$\frac{u^m - 1}{u - 1} = 1 + u + u^2 + \ldots + u^{m-1} \qquad (2)$$

vorausgesetzt wird.

Sei zunächst μ eine ganze positive Zahl $= m$, so ist

$$\frac{(1+\delta)^{\mu}-1}{\delta}=\frac{(1+\delta)^{m}-1}{(1+\delta)-1},$$

und diess vermöge der Formel (2) auch

$$=1+(1+\delta)+(1+\delta)^2+\ldots+(1+\delta)^{m-1}.$$

Da sich nun für bis zur Null abnehmende δ jedes einzelne Glied der Gränze 1 nähert, so wird

$$\text{Lim}\,\frac{(1+\delta)^m-1}{\delta}=m. \tag{3}$$

Schreibt man $k\delta$ für δ, so erhält man noch

$$\text{Lim}\,\frac{(1+k\delta)^m-1}{\delta}=mk. \tag{4}$$

Sei ferner μ gleich einem Bruche $\frac{p}{q}$, dessen Zähler und Nenner als ganze positive Zahlen vorausgesetzt werden, und

$$\text{Lim}\,\frac{(1+\delta)^{\frac{p}{q}}-1}{\delta}=r, \tag{5}$$

so kann man für ein beliebiges δ setzen:

$$\frac{(1+\delta)^{\frac{p}{q}}-1}{\delta}=r+\varepsilon,$$

und hier muss ε eine Grösse sein, die mit δ gleichzeitig bis zur Null abnimmt, weil man ausserdem nicht auf die Voraussetzung (5) zurückkäme, sobald hier δ gegen die Null convergirt. Es folgt nun weiter

$$(1+\delta)^{\frac{p}{q}}=1+\overline{r+\varepsilon}\,\delta,$$

$$(1+\delta)^p=(1+\overline{r+\varepsilon}\,\delta)^q;$$

und folglich nach Subtraktion der Einheit und Division mit δ

$$\frac{(1+\delta)^p-1}{\delta}=\frac{(1+\overline{r+\varepsilon}\,\delta)^q-1}{\delta}. \tag{6}$$

Die Gleichung (4) berechtigt uns aber

$$\frac{(1+k\delta)^m-1}{\delta}=mk+\varepsilon'$$

zu setzen, wo ε' mit δ bis zur Null abnimmt. Benutzen wir diess für die Gleichung (6), wo q, wie früher m, eine positive ganze Zahl ist, so folgt

$$\frac{(1+\delta)^p-1}{\delta}=q(r+\varepsilon)+\varepsilon'.$$

Gehen wir in dieser Gleichung zur Gränze für unendlich, d. h. bis zur Null abnehmende δ über und erinnern uns, dass das Verschwinden von δ auch das Verschwinden von ε und ε' nach sich zieht, so giebt die Anwendung der Formel (3) für $m=p$

$$p=qr \text{ und folglich } r=\frac{p}{q},$$

d. h. nach No. (5)

$$\mathrm{Lim}\frac{(1+\delta)^{\frac{p}{q}}-1}{\delta}=\frac{p}{q}.$$

Mit No. (3) zusammen fliesst hieraus der Satz, dass für jedes rationale und positive μ

$$\mathrm{Lim}\frac{(1+\delta)^{\mu}-1}{\delta}=\mu \tag{7}$$

ist, der sich durch die blose Bemerkung, dass man sich nicht angebbaren Zahlen durch angebbare Zahlen soweit man will nähern kann, auf irrationale und positive μ, d. h auf jedes beliebige positive μ erweitert.

Ist endlich μ negativ, etwa $\mu=-\nu$, so sei wieder

$$\mathrm{Lim}\frac{(1+\delta)^{\mu}-1}{\delta}=\mathrm{Lim}\frac{(1+\delta)^{-\nu}-1}{\delta}=r.$$

Es folgt hieraus der Reihe nach

$$(1+\delta)^{-\nu}=1+\overline{r+\varepsilon}\delta,$$

$$(1+\delta)^{\nu}=\frac{1}{1+\overline{r+\varepsilon}\delta},$$

$$\frac{(1+\delta)^{\nu}-1}{\delta}=-\frac{r+\varepsilon}{1+\overline{r+\varepsilon}\delta};$$

und da ε eine mit δ bis zur Null abnehmende Grösse sein muss, ν aber an sich positiv ist, so folgt jetzt durch Gränzenübergang

$$\nu=-r, \text{ also } r=-\nu,$$

d. h. vermöge der Bedeutung von r

$$\mathrm{Lim}\frac{(1+\delta)^{(-\nu)}-1}{\delta}=(-\nu).$$

Mit No. (7) zusammengehalten giebt diess den Satz, dass überhaupt für jedes reelle μ

$$\operatorname{Lim}\frac{(1+\delta)^{\mu}-1}{\delta}=\mu \qquad (8)$$

ist, und dieser führt vermöge der Gleichung (1) zu der allgemeinen Formel

$$\frac{d(x^{\mu})}{dx}=\mu x^{\mu-1},$$

deren Beweis demnach nur die Kenntniss der Summenformel für die geometrische Progression in Anspruch nimmt.

III.

Ueber eine eigenthümliche Erscheinung bei Reihensummirungen.

Von dem
Herrn Professor Dr. O. Schlömilch
an der Universität zu Jena.

Die interessante Thatsache, deren Besprechung den Gegenstand dieser Zeilen ausmachen soll, besteht, in kürzester Form ausgedrückt, darin, dass eine durchweg convergente Reihe zwei oder mehrere ihrer Gestalt nach sehr verschiedene Summen haben kann, jenachdem eine in der Reihe vorkommende Variabele zwischen verschiedenen Gränzen liegt. Denken wir uns, um den Begriffen ein anschauliches Substrat zu geben, zunächst eine Reihensummirung von der Form

$$F(z)=A_0+A_1z+A_2z^2+A_3z^3+\ldots.$$

ausgeführt, und substituiren wir für z die Grösse

$$z=\frac{x}{1+x^2},$$

welche für kein reelles x die Einheit überschreitet; so bildet

$$F(z)=F\left(\frac{x}{1+x^2}\right)$$

offenbar eine neue Funktion von x, die sehr verschieden sein kann und etwa $f(x)$ heissen möge. Wir haben dann

$$f(x)=A_0+A_1\frac{x}{1+x^2}+A^2\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^2+\ldots \qquad (1)$$

Die rechte Seite besitzt nun die Eigenschaft, sich nicht zu ändern, wenn man $\frac{1}{x}$ an die Stelle von x setzt, denn es ist

$$\frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{x}{x^2+1}=\frac{x}{1+x^2},$$

und folglich wird jetzt

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=A_0+A_1\frac{x}{1+x^2}+A_2\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^2+\ldots \qquad (2)$$

Die rechten Seiten von (1) und (2) sind nun identisch, und daraus scheint zu folgen, dass es auch die linken Seiten sein müssten; aber das ist gar nicht nöthig, denn im Allgemeinen kann $f\left(\frac{1}{x}\right)$ unmöglich mit $f(x)$ zusammenfallen. Wenn nun ferner in (1) $x<1$ war, so ist in (2) das neue $x>1$, und folglich müssen wir jetzt sagen: in der Gleichung

$$y=A_0+A_1\left(\frac{x}{1+x^2}\right)+A_2\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^2+\ldots$$

hat die Summe y zwei verschiedene Werthe, nämlich

für $x<1$ ist $y=f(x)$,

für $x>1$ dagegen $y=f\left(\frac{1}{x}\right)$.

Wir wollen diess an einem Beispiele erläutern, dem man beliebig viele andere leicht anreihen kann.

Entwickelt man $\sqrt{1-z^2}$ nach dem Binomialtheorem, so ist für $z\leqq 1$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1-\sqrt{1-z^2}}{z}\\ &=\frac{1}{2}z+\frac{1}{2.4}z^3+\frac{1.3}{2.4.6}z^5+\frac{1.3.5}{2.4.6.8}z^7+\ldots\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Aus

$$\frac{1-\sqrt{1-z^2}}{z}=x$$

folgt aber sehr leicht

$$z=\frac{2x}{1+x^2},$$

und somit ergiebt sich auf der Stelle

$$x=\frac{x}{1+x^2}+\frac{2}{2}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^3+\frac{2.6}{2.3}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^5+\ldots, \quad (4)$$

d. h. eine Gleichung von der Form (1), und zwar diejenige, wo $f(x)$ die einfachste Gestalt hat. Jedoch gilt dieses Resultat nur für $x \leqq 1$; denn aus No. (3) geht hervor, dass die linke Seite eine Funktion von z darstellt, welche beständig wächst, wenn man z das Intervall 0 bis 1 durchlaufen lässt, also für $z=1$ ihr Maximum erreicht $=1$; daraus folgt denn sogleich

$$\frac{1-\sqrt{1-z^2}}{z}\leqq 1, \text{ d. h. } x\leqq 1,$$

wie behauptet wurde.

Setzt man dagegen in der Gleichung (3)

$$\frac{1-\sqrt{1-z^2}}{z}=\frac{1}{x},$$

so findet man umgekehrt

$$z=\frac{2x}{1+x^2},$$

und folglich

$$\frac{1}{x}=\frac{x}{1+x^2}+\frac{2}{2}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^3+\frac{2.6}{2.3}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^5+\ldots \quad (5)$$

und diess gilt wie vorhin für

$$\frac{1-\sqrt{1-z^2}}{z}\leqq 1, \text{ d. h. } \frac{1}{x}\leqq 1 \text{ oder } x\geqq 1.$$

Vergleichen wir nun die unter (4) und (5) gefundenen Resultate, so ergiebt sich, dass die Summe der Reihe

$$y=\frac{x}{1+x^2}+\frac{2}{2}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^3+\frac{2.6}{2.3}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^5+\ldots \quad (6)$$

ausgedrückt wird durch

$$y=x \text{ von } x=0 \text{ bis } x=1,$$

$$y=\frac{1}{x} \text{ von } x=1 \text{ bis } x=\infty.$$

Diess lässt sich geometrisch sehr gut veranschaulichen, wenn man sich in No. (6) x und y als rechtwinkliche Coordinaten denkt. Die Linie, deren Gleichung No. (6) ist, besteht dann aus zwei Theilen, von denen der erste eine die Abscissenachse unter dem Winkel 45° schneidende und durch den Anfangspunkt gehende Gerade (OB in Taf. I. Fig. 7.) und der andere ein Stück von einer gleichseitigen Hyperbel bildet, deren Achse $=\sqrt{2}$ ist und deren Asymptoten die Coordinatenachsen sind. Die vorher angeführte Figur giebt hiervon eine Abbildung, bei der $OA=AB=1$, $OB=\sqrt{2}$ ist, und worin OBS den positiven Theil der fraglichen Curve darstellt.

Es knüpft sich hieran eine allgemeinere Untersuchung, welche zeigen soll, auf welche Weise man jede gewissen Bedingungen unterworfene Funktion $f(x)$ in eine Reihe von der Form

$$A_0+A_1\left(\frac{x}{1+x^2}\right)+A_2\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^2+\ldots.$$

verwandeln kann. Wir müssen zu diesem Zwecke an die sogenannte Umkehrungsformel von Lagrange erinnern, welche Folgendes sagt. Ist y' die kleinste, d. h. die mit z gleichzeitig verschwindende Wurzel der Gleichung

$$y-z\varphi(y)=0, \tag{7}$$

worin $\varphi(y)$ eine stetige für $y=0$ weder verschwindende noch unendlich werdende Funktion von y bezeichnet, so lässt sich jede andere Funktion $\psi(y')$ jener kleinsten Wurzel in die Reihe

$$\psi(y')=A_0+A_1z+A_2z^2+A_3z^3+\ldots. \tag{8}$$

verwandeln, wobei die Coeffizienten mittelst der Formel

$$A_n=\frac{1}{1.2.3\ldots.n}\cdot\frac{d^{n-1}[\varphi(y)^n\psi'(y)]}{dy^{n-1}} \tag{9}$$

für $y=0$ nach geschehener Differenziation bestimmt werden. Diese Reihenentwickelung gilt aber nur so lange, als der Modulus von z kleiner als der Modulus des kleinsten z ist, welches die simultanen Gleichungen

$$z=\frac{y}{\varphi(y)},\ z=\frac{1}{\varphi'(y)} \tag{10}$$

erfüllt, und ausserdem muss $\psi(y)$ eine Funktion sein, welche für sich in eine Reihe von der Form $a_0+a_1y+a_2y^2+\ldots.$ verwandelbar sein würde *).

Um hiernach unser Problem zu lösen, setzen wir in (7) $\varphi(y)=\frac{1}{2}(y^2+1)$; die Gleichung

*) M. s. mein Handbuch der Differenzialrechnung Cap. IX.

$$y-\frac{z}{2}(y^2+1)=0$$

hat dann die zwei Wurzeln

$$y=\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z},\quad y=\frac{1-\sqrt{1-z^2}}{z};$$

von denen die zweite mit z gleichzeitig verschwindet, also unser y' darstellt. So haben wir denn

$$\left.\begin{aligned}\psi(y')=\psi\left(\frac{1-\sqrt{1-z^2}}{z}\right)\\ =A_0+A_1z+A_2z^2+A_3z^3+\ldots\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

und dabei ist

$$A_n=\frac{1}{1.2\ldots.n}\cdot\frac{1}{2^n}\cdot\frac{d^{n-1}[(y^2+1)^n\psi'(y)]}{dy^{n-1}},\ \text{für } y=0.\quad(12)$$

Die beiden simultanen Gleichungen (10) sind

$$z=\frac{y}{\frac{1}{2}(y^2+1)},\quad z=\frac{1}{y};$$

also

$$\frac{2y}{y^2+1}=\frac{1}{y};$$

daraus folgt $y=\pm1$, und nach dem Vorigen $z=\frac{1}{\pm1}=\pm1$, und folglich muss der Modulus von z immer kleiner als die Einheit sein, was man der Gleichung (11) schon im Voraus ansehen konnte. Setzt man in ihr

$$\frac{1-\sqrt{1-z^2}}{z}=x,$$

wo nun wegen $z<1$ auch immer $x<1$ ist, so folgt

$$z=\frac{2x}{1+x^2},$$

und mithin

$$\psi(x)=A_0+2A_1\left(\frac{x}{1+x^2}\right)+2^2A_2\left(\frac{x}{1+x^2}\right)+\ldots$$

Schreibt man f für ψ und setzt

$$K_n=\frac{d^{n-1}[(y^2+1)^nf'(y)]}{dy^{n-1}},\ \text{für } y=0;\quad(13)$$

so ergiebt sich jetzt, weil $A_0=f(0)$ sein muss:

$$f(x)=f(0)+\frac{K_1}{1}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)+\frac{K_2}{1.2}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^2+\ldots \Big\} \quad x<1. \tag{14}$$

Hätte man dagegen

$$\frac{1-\sqrt{1-z^2}}{z}=\frac{1}{x}$$

gesetzt, so würde man zu dem Resultate

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=f(0)+\frac{K_1}{1}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)+\frac{K_2}{1.2}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^2+\ldots \Big\} \quad x>1 \tag{15}$$

gekommen sein. Es ist demnach für

$$y=f(0)+\frac{K_1}{1}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)+\frac{K_2}{1.2}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^2+\ldots,$$

$$\left.\begin{array}{l} y=f(x) \text{ von } x=0 \text{ bis } x=1, \\ y=f\left(\frac{1}{x}\right) \text{ von } x=1 \text{ bis } x=\infty; \end{array}\right\} \tag{17}$$

und die Curve, deren Gleichung (16) ist, besteht demnach wieder aus zwei Linien von verschiedener Natur *).

Man könnte noch fragen, ob sich nicht ein dritter analytischer Ausdruck finden liesse, der von selbst entweder in $f(x)$ oder $f\left(\frac{1}{x}\right)$ übergeht, jenachdem $x<1$ oder >1 ist und der dann ganz im Allgemeinen den Werth von y darstellte und die Unterscheidung von $x \gtrless 1$ überflüssig machte. Diess lässt sich auf folgende Weise erreichen. Nach einem bekannten Theoreme ist der Werth des Integrales

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin\alpha\vartheta\cos\beta\vartheta}{\vartheta}\,d\vartheta$$

$$= \quad \frac{\pi}{2} \quad , \quad \frac{\pi}{4} \quad , \quad 0$$

$$\text{für } \alpha>\beta \text{ , } \alpha=\beta \text{ , } \alpha<\beta.$$

Bilden wir nun den Ausdruck

$$X=f(x)\int_0^{\infty}\frac{\sin\vartheta\cos x\vartheta}{\vartheta}\,d\vartheta+f\left(\frac{1}{x}\right)\int_0^{\infty}\frac{\sin x\vartheta\cos\vartheta}{\vartheta}\,d\vartheta.$$

---

*) Beispiele hierzu kann man sich leicht in Menge verschaffen, da es viele Funktionen $f(x)$ giebt, für welche die Bestimmung von K_n keinen Schwierigkeiten unterliegt, z. B. $f(x)=x^m$ (m ganz und positiv), $f(x)=\frac{1}{2}l(1+x^2)$ u. s. w.

worin x als constant für die Integration nach ϑ angesehen wird, so ist für $1 > x$ das erste Integral $= \frac{\pi}{2}$, das zweite $= 0$, folglich

$$X = \frac{\pi}{2} f(x);$$

ferner für $x = 1$ jedes der Integrale $= \frac{\pi}{4}$, mithin

$$X = \frac{\pi}{4} f(1) + \frac{\pi}{4} f(1) = \frac{\pi}{2} f(1),$$

und für $x > 1$ das erste Integral $= 0$, das zweite $= \frac{\pi}{2}$, also

$$X = \frac{\pi}{2} f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Es stellt daher der Ausdruck $\frac{2}{\pi} X$ in jedem Falle den Werth von y dar, und demnach ist für die nach Formel (13) bestimmten Werthe von K

$$\left.\begin{aligned} & f(0) + \frac{K_1}{1}\left(\frac{x}{1+x^2}\right) + \frac{K_2}{1.2}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^2 + \dots \\ = & \frac{2}{\pi}\left[f(x)\int_0^\infty \frac{\sin\vartheta \cos x\vartheta}{\vartheta} d\vartheta + f\left(\frac{1}{x}\right)\int_0^\infty \frac{\sin x\vartheta \cos\vartheta}{\vartheta} d\vartheta\right] \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

und diess gilt für alle x von $x = 0$ bis $x = \infty$. Der reelle Gewinn bei dieser Form besteht darin, dass die Distinktionen hinsichtlich des x wegfallen, was oft die Rechnung abkürzt. Wollte man z. B. den Werth des Integrales

$$S = \int_0^\infty y F(x)\, dx,$$

wo F eine beliebige Funktion bezeichnet, entwickeln, so würde man, um sich der Formeln (16) und (17) bedienen zu können, erst schreiben müssen

$$S = \int_0^1 y F(x)\, dx + \int_1^\infty y F(x)\, dx,$$

und dann im ersten Integrale $y = f(x)$ und im zweiten $y = f\left(\frac{1}{x}\right)$ setzen; unter Anwendung der Formel (18) dagegen ist eine solche Zerspaltung von S nicht nöthig, indem man für y unmittelbar die rechte Seite der Gleichung (18) substituirt und damit S in ein Doppelintegral verwandelt.

Zum Schlusse noch ein Stückchen Polemik. Die vorigen Untersuchungen zeigen nämlich vollständig die **Nichtigkeit der sogenannten syntaktischen oder allgemein analytischen**

Bedeutung der unendlichen Reihen, wie sie namentlich von Ohm und seinen Schülern verfochten wird. Gäbe man z. B. einem solchen Herrn die Summirung der Reihe

$$y=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{1+x^2}+\frac{1}{2.4}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^3+\frac{1.3}{2.4.6}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^5+\ldots.$$

auf, so würde er sagen: nichts leichter als das, wir schreiben die Reihe in der Form

$$y=\frac{1}{2}2x(1+x^2)^{-1}+\frac{1}{2.4}(2x)^3(1+x^2)^{-3}+\ldots$$

und wenden das Binomialtheorem auf jede der einzelnen Potenzen von x^2 an; diess giebt

$$\begin{aligned}y=&\frac{1}{2}2x(1-x^2+x^4-x^6+\ldots.)\\&+\frac{1}{2.4}(2x)^3(1-3x^2+6x^4-\ldots.)\\&+\frac{1.3}{2.4.6}(2x)^5(1-5x^2+\ldots.)\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

und zwar ganz allgemein richtig für alle x. Denn so lange x nicht zu einer Zahl spezialisirt wird, ist ja in der Gleichung

$$(1+x^2)^{-n}=1-\frac{n}{1}x^2+\frac{n(n+1)}{1.2}x^4-\ldots. \qquad (19)$$

x nur „der Träger der Operationen" *), allgemein analytisches Symbol u. s. w. Die Zusammenziehung derjenigen Glieder, die gleiche Potenzen von x enthalten, giebt nun $y=x$ und folglich ist ganz allgemein

$$x=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{1+x^2}+\frac{1}{2.4}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^3+\ldots. \qquad (20)$$

Die Unrichtigkeit hiervon zeigt sich aber sogleich, wenn man $\frac{1}{x}$ für x setzt, denn man erhält $x=\frac{1}{x}$, und das ist syntaktisch ungeheuer falsch und nur für $x=1$ richtig, so dass also am Ende gar keine Reihensummirung, sondern nur $x=1$ herauskommt.

---

*) Mir fällt bei diesem Ohm'schen Stichworte allemal das früher an deutschen Höfen existirende Institut der Prügeljungen ein, auch erinnert es mich an jene chinesischen Proletarier, die davon leben, dass sie die Anderen zuerkannten Bambushiebe sich aufzählen lassen.

Wir Anderen, die eine Gleichung zwischen Funktion und Reihe nur dann gelten lassen, wenn letztere convergirt, würden nun so verfahren. Die Formel (19) setzt voraus, dass $x < 1$ sei, weil sonst die Reihe divergirt und mit $(1+x^2)^{-n}$ dann nicht mehr identisch ist. Wir führen also die ganze vorige Rechnung nur mit der Bedingung $x < 1$ und behaupten daher auch das Endresultat $y = x$ oder die Gleichung (20) nur für $x < 1$. Ist dagegen $x > 1$, so schreiben wir

$$\frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \text{ für } \frac{x}{1+x^2},$$

setzen $\frac{1}{x} = \xi$, wo nun $\xi < 1$ ist, und nehmen die ganze Rechnung jetzt mit der Gleichung

$$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\xi}{1+\xi^2} + \frac{1}{2.4}\left(\frac{2\xi}{1+\xi^2}\right)^2 + \ldots$$

in Bezug auf ξ so vor, wie vorhin in Bezug auf x. Es findet sich dann $y = \xi$, d. h. $y = \frac{1}{x}$, und so gelangen wir genau zu demselben Endresultate wie früher. — Die Anzahl solcher Beispiele lässt sich übrigens leicht vermehren, und sie zeigen immer wieder, dass divergente Reihen den Funktionen, aus denen sie entwickelt wurden, nicht gleich zu setzen sind. Um aber solche Beispiele zu kennen, muss man sich im Gebiete des Calcüls etwas umgesehen und sich namentlich mit diskontinuirlichen Funktionen beschäftigt haben. Wer weiter nichts will, als Funktionen wie e^x, $\sin x$ etc., in Reihen verwandeln, langt freilich mit jeder noch so miserabelen, ja sogar mit gar keiner Ansicht aus; geht man aber ein paar Schritte weiter, so lernt man bald das Gefährliche solcher angeblich allgemeinen Theorien kennen; versteigt man sich endlich in Gegenden, wo es nur einen einzigen Weg, den man sich erst selbst brechen muss, und also auch keine Controlle giebt, so fühlt man die Nothwendigkeit solcher Methoden, welche die Garantie der Sicherheit in sich selbst tragen. Diess ist auch ganz einfach der Grund, warum alle die Männer, welche in neuerer Zeit die Wissenschaft materiell erweitert haben, sich zu den hauptsächlich von Cauchy und Lejeune Dirichlet vertretenen Ansichten bekennen.

IV.

Ueber die cylindrischen Kanalflächen.

Von dem
Herrn Doctor J. Dienger,
Lehrer der Mathematik und Physik an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

Wenn eine geschlossene Fläche oder Körper sich so bewegt, dass einer ihrer Punkte auf einer bestimmten Kurve sich bewegt, so ist die umhüllende Fläche aller der successiven Lagen, welche die bewegliche Fläche einnimmt, eine Kanalfläche. Für den Fall, dass die bewegliche Fläche eine Kugelfläche von konstantem Halbmesser ist, deren Mittelpunkt auf einer gegebenen Kurve sich bewegt, nennen wir die entstehende Kanalfläche eine cylindrische. Wir stellen uns nun im Folgenden die Aufgabe, den Flächen- und den Rauminhalt dieser letztern Gattung zu bestimmen.

I.

Eine Kugel vom Halbmesser r bewegt sich so, dass ihr Mittelpunkt auf einem Kreise bleibt, dessen Gleichung ist

$$y^2 = R^2 - x^2;$$

welches ist die Gleichung der beschriebenen Kanalfläche?

Bezeichnet a die Abscisse eines bestimmten Punktes des festen Kreises, so ist das dazu gehörige $y = \pm\sqrt{R^2 - a^2}$ und die Gleichung der Kugelfläche, wenn ihr Mittelpunkt in diesem Punkte sich befindet, ist

$$(y \mp \sqrt{R^2 - a^2})^2 + (x - a)^2 + z^2 = r^2. \qquad (1)$$

Differenzirt man diese Gleichung nach a, so ergiebt sich:

$$\pm (y \mp \sqrt{R^2 - a^2}) \frac{a}{\sqrt{R^2 - a^2}} - x + a = 0$$

oder

$$\pm ay = x\sqrt{R^2 - a^2}. \qquad (2)$$

Eliminirt man nun a zwischen der Gleichung (1) und (2), so ergiebt sich als Gleichung der verlangten Kanalfläche:

$$(x^2+y^2+z^2+R^2-r^2)^2=4R^2(x^2+y^2). \quad (3)$$

Wie man leicht findet, wird diese Fläche von einer Ebene, die durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht und auf der Ebene der xy senkrecht steht, in einem Kreise geschnitten, dessen Halbmesser r ist, was klar ist, da offenbar die vorliegende, durch die Gleichung (3) ausgedrückte Fläche auch entsteht, wenn ein Kreis vom Halbmesser r, dessen Ebene senkrecht steht auf der Ebene des festen Kreises, sich so bewegt, dass sein Mittelpunkt den Umfang des festen Kreises durchläuft, oder dass er sich um die Axe der z dreht in der Entfernung R.

Suchen wir nun den Flächeninhalt der betrachteten Kanalfläche zu bestimmen.

Sei in Taf. I. Fig. 8. CD ein Viertelskreis, dessen Mittelpunkt G und dessen Halbmesser $DG=r$ ist; ferner sei AO senkrecht auf GA und $AG=R$; EF ein Element des Kreises, dessen Gleichung

$$y^2+x^2=r^2$$

sein soll. Dieser Viertelskreis drehe sich um AO, so beschreibt das Element EF, das man als geradlinig betrachten kann, eine Kegelfläche, deren Inhalt

$$=\pi.EF.(MF+NE)=\pi.\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}.(R-x+R-x+dx)$$

$$=2\pi\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}(R-x)\,dx$$

ist. Nun ist $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{x^2}{r^2-x^2}$; demnach ist die Fläche, welche durch den Viertelskreis CD beschrieben wird:

$$2r\pi\int_0^r\frac{(R-x)dx}{\sqrt{r^2-x^2}}=Rr\pi^2-2r^2\pi.$$

Wäre der Viertelskreis nach Aussen, statt nach Innen gewendet, so fände sich für die beschriebene Fläche:

$$2r\pi\int_0^r\frac{(R+x)dx}{\sqrt{r^2-x^2}}=Rr\pi^2+2r^2\pi.$$

Die betrachtete Kanalfläche ist aber offenbar gleich der doppelten Summe dieser zwei Flächen, d. h. gleich

$$4Rr\pi^2,$$

oder gleich der Umfläche eines senkrechten Cylinders von gleicher Weite, dessen Höhe gleich der Länge ($2R\pi$) der Mittellinie der Kanalfläche ist. Biegt man also diesen Cylinder, bis er eine Kanalfläche bildet, so dehnt sich seine eine Seite um eben so viel aus, als die andere zusammengedrückt wird.

Den Rauminhalt erhält man auf ähnliche Weise. Der von *NEFM* erzeugte Körper hat einen durch $\frac{\pi}{3}.NM.(MF^2+MF.NE+NE^2)$ ausgedrückten Inhalt. Dieser ist nun gleich $\pi dy\,(R-x)^2 = -\frac{\pi x(R-x)^2 dx}{\sqrt{r^2-x^2}}$; somit hat der von *ODCA* erzeugte Körper den Inhalt:

$$\pi\int_0^r \frac{x(R-x)^2\,dx}{\sqrt{r^2-x^2}} = \pi R^2 r - \frac{\pi^2 R r^2}{2} + \frac{2r^3\pi}{3}.$$

Ist der Viertelskreis nach Aussen gewendet, so erhält man für den entsprechenden erzeugten Raum:

$$\pi\int_0^r \frac{x(R+x)^2 dx}{\sqrt{r^2-x^2}} = \pi R^2 r + \frac{\pi^2 R r^2}{2} + \frac{2r^3\pi}{3}.$$

Der Rauminhalt des cylindrischen Kanals ist aber gleich dem doppelten Unterschiede dieser beiden Körper, also gleich

$$2\pi^2 R r^2,$$

d. h. gleich dem Kubikinhalte des vorhin erwähnten senkrechten Cylinders.

II.

Die vorstehenden Resultate können nun leicht verallgemeinert werden. Sei

$$y = f(x)$$

die Gleichung einer ebenen Kurve, auf der sich der Mittelpunkt der beweglichen Kugel bewegt, so ist die Gleichung dieser letztern

$$(x-a)^2 + (y-f(a))^2 + z^2 = r^2,$$

und wenn man a zwischen dieser Gleichung und

$$x - a + (y - f(a))\,f'(a) = 0$$

eliminirt, so erhält man die Gleichung der gesuchten cylindrischen Kanalfläche.

Diese ist offenbar die nämliche, als die Fläche, welche ein Kreis vom Halbmesser r beschreiben würde, dessen Mittelpunkt auf der gegebenen Kurve sich bewegt und dessen Ebene senkrecht steht auf der Ebene der Kurve.

Um die Oberfläche dieser Kanalfläche zu bestimmen, verfahren wir auf folgende Art.

Denken wir uns im Anfangspunkte der Coordinaten die Axe der z errichtet, so kann man sich vorstellen, der bewegliche Kreis drehe sich um diese Axe. Betrachten wir (vorhergehende Figur) den Punkt F, so bleibt für ihn MF nicht konstant, wie in

I., sondern es ändert sich, je nach der Gestalt der festen Kurve; jedoch kann man für einen unendlich kleinen Winkel $d\psi$, um den sich der Kreis dreht, MF als konstant annehmen, wie auch die Entfernung aller Punkte des beweglichen Kreises von der Axe AO. Die durch solche Drehung beschriebene Oberfläche ist nach I.:

$$\frac{4\varrho r\pi^2 d\psi}{2\pi} = 2r\pi . \varrho d\psi,$$

wenn ϱ die veränderliche Länge von AG bedeutet. Da ϱ für die unendlich kleine Drehung $d\psi$ konstant bleibt, so ist $\varrho d\psi = ds$, wenn ds das Element der festen Kurve bezeichnet. Bewegt sich also der Mittelpunkt der beweglichen Kugel durch die Länge s der festen Kurve, so ist der Inhalt der dadurch erzeugten Kanalfläche:

$$\int_0^s 2r\pi\, ds = 2r\pi . s,$$

d. h. gleich der Oberfläche eines senkrechten Cylinders von gleicher Weite, dessen Höhe gleich der Länge der Mittellinie ist.

Ganz eben so findet man, dass der Kubikinhalt des Kanals gleich ist dem Kubikinhalte des eben erwähnten Cylinders.

Sei z. B. die Ellipse, deren Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ist, die leitende, feste Kurve (Mittellinie), so ist, wenn man die ganze Kanalfläche betrachtet, die Länge der Mittellinie:

$$l = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2\varphi}\, d\varphi,$$

worin $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, welches Integral man durch die elliptischen Funktionen, oder durch die sehr convergirende Reihe

$$l = 2a\pi \left[1 - (\tfrac{1}{2}\varepsilon)^2 - \tfrac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\varepsilon^2\right)^2 - \tfrac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\varepsilon^3\right)^2 - \ldots\right]$$

ausdrücken kann. Der Flächen- und Rauminhalt der Kanalfläche sind nun:

$$2r\pi l \text{ und } r^2\pi l.$$

Auf ähnliche Weise verfährt man in andern Fällen.

III.

Endlich sei die leitende Kurve eine krumme Linie doppelter Krümmung, deren Gleichungen sind:

$$y = f(x); \quad z = F(x);$$

so erhält man die Gleichung der entstehenden Kanalfläche, wenn man a eliminirt zwischen

$$(x-a)^2 + (y - f(a))^2 + (z - F(a))^2 = r^2$$

und

$$x - a + (y - f(a)) f'(a) + (z - F(a)) F'(a) = 0.$$

Ist ds das Element der leitenden Kurve, so kann man dieses als eben betrachten, woraus nach II. folgt, dass die Elemente der Oberfläche und des Rauminhaltes resp. sind:

$$2r\pi\, ds \text{ und } r^2\pi ds,$$

woraus durch Integration leicht folgt, dass sowohl Oberfläche, als Rauminhalt bezüglich gleich sind Umfläche und Kubikinhalt eines senkrechten Cylinders von gleicher Weite, dessen Höhe gleich der Länge der leitenden Kurve.

Die oben hergeleiteten Formeln hätten sich auch aus dem Guldinschen Theoreme entwickeln lassen; da jedoch die Kanalflächen häufig vorhanden sind, so ist es nicht vergebene Mühe, die betreffenden Aufgaben ohne Anwendung dieses Theorems zu lösen, zumal die vorliegende Entwickelung sich leicht ganz elementar darstellen lässt.

V.

Ueber eine Klasse geometrischer Sätze, deren Beweise auf keinen Grössenbestimmungen beruhen, nebst einer elementaren Konstruktion des Mittelpunktes des einfachen Hyperboloids.

Von

Herrn Fr. Seydewitz,

Oberlehrer am Gymnasium zu Heiligenstadt.

Die von dem Herrn Herausgeber in diesem Theile des Archivs S. 89. zur synthetischen Auflösung vorgelegte Aufgabe*) gehört zu demjenigen Theile der Geometrie, dessen Sätze nicht aus Grössenbestimmungen, sondern einzig und allein aus der Definition der geraden Linie und der Ebene fliessen, und welcher dieses seines reingeometrischen Charakters wegen und besonders desshalb, weil er die allgemeinen Figuren und Figurenbeziehungen, welche Gegenstand der quantitativen Betrachtung werden sollen, dieser letzteren als reelle und bereits vorhandene überliefert, den Anfang des gesammten Systemes der Geometrie bilden sollte. Wenn ich nämlich nicht sehr irre, so besteht die letztere aus drei wesentlich von einander geschiedenen und zugleich einander voraussetzenden Haupttheilen, in denen sich der wissenschaftliche Gedanke auf ähnliche Weise, wie das sich entwickelnde Bewusstsein überhaupt, durch die Stufen der Anschauung und der Reflexion hindurch zum begreifenden Wissen hin bewegt. Der erste dieser Theile — die Geometrie der reinen Lage — ist der so eben angedeutete; der zweite — die Geometrie der Gestalt und Grösse — hat die überlieferten Gebilde hinsichtlich ihrer Linien-, Winkel-, Flächen- und körperlichen Grösse zu vergleichen und insbesondere durch Entwicklung ihrer metrischen Beziehungen, von den besonderen zu den allgemeineren aufsteigend, die allgemeinen metrischen Ge-

---

*) Die gesuchte Gerade ist die Durchschnittslinie derjenigen zwei Ebenen, welche den gegebenen Punkt mit den beiden gegebenen Geraden verbinden, oder auch, was einerlei ist, die Verbindungslinie des gegebenen Punktes mit demjenigen Punkte der einen gegebenen Geraden, in welchem die letztere von der Verbindungsebene des gegebenen Punktes und der anderen gegebenen Geraden geschnitten wird.

setze zu erforschen, welche dann dem dritten Theile — der Geometrie **der Grösse und Lage** — als Principien dienen, um die Gesammtheit der geometrischen Wahrheiten als wohlgegliederten Organismus darzustellen. — Von diesen dreien ist der erste Theil der bis jetzt noch am wenigsten ausgebildete, so dass es scheinen kann, als ob derselbe ausser einigen wenigen, in den Lehrbüchern zerstreut liegenden Sätzchen weiter nichts als eine Reihe von Definitionen enthalte. Gewiss aber würde derselbe einen grösseren Inhalt und grössere Selbstständigkeit gewonnen haben, wenn man die in den übrigen Theilen durch die Natur der Sache gebotene Maxime, die Erscheinungen des vollen Raumes aus denen der Ebene, und nicht umgekehrt, abzuleiten, nicht auch auf jenen übertragen hätte. Denn hier gerade zeigt es sich, dass man planimetrische Sätze, welche bisher mittels vieler Proportionen hergeleitet wurden, durch eine einfache stereometrische Betrachtung erhält und so gewissermassen Früchte mit blosser Hand erfasst, zu denen man nicht ohne Leiter und Brechhaken zu gelangen glaubte. Das Folgende mag als Beweis dieser Behauptung dienen.

1.

Wenn drei Gerade A, B, C im Raume paarweise drei Punkte (endlich oder unendlich entfernt) gemein haben, und eine vierte Gerade D hat mit zweien derselben, z. B. mit A und B, zwei neue Punkte gemein, so hat dieselbe auch mit der dritten, C, einen Punkt gemein.

Beweis. Denn hätte D mit C keinen Punkt gemein, so würde man, wegen der völligen Einerleiheit der rechten und der linken Seite der Figur, mit demselben Rechte behaupten können, dass die Gerade D links, als dass sie rechts von der Geraden C abwiche.

2.

Denkt man sich einen Punkt S mit sämmtlichen Punkten einer Geraden A im Raume durch gerade Linien a, b, c, d... verbunden, so bilden die letzteren eine Fläche $\mathfrak{E}$; ist nun N irgend eine neue Gerade, welche mit $\mathfrak{E}$ zwei Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ gemein hat, so gehen von S nach diesen letzteren zwei jener Linien, a, b, c, d..., z. B. a und b; da nun A, a, b paarweise drei Punkte, also auch N mit A einen Punkt gemein hat, und da, wenn k irgend eine andere der Linien a, b, c, d... ist, die geraden A, a, k paarweise drei Punkte, die N aber mit A und a zwei Punkte, also auch N mit k einen Punkt gemein hat, so hat N mit sämmtlichen Linien a, b, c, d... einen Punkt gemein und liegt demnach ganz in der Fläche $\mathfrak{E}$. **Eine solche Fläche, in welcher alle Punkte einer Geraden liegen, sobald dieselbe irgend zwei Punkte der ersteren verbindet, heisst eine Ebene.**

Aus 1. und 2. wird nun bewiesen, dass zwei Gerade in der Ebene — eine Gerade und eine Ebene im Raume — endlich zwei Ebenen im Raume, allemal bezüglich einen Punkt oder eine Gerade (endlich oder unendlich entfernt) gemein haben.

3.

Drei beliebige Ebenen im Raume haben entweder nur einen Punkt oder eine gerade Linie (endlich oder unendlich entfernt) gemein.

Beweis. Denn hat die Ebene B mit A die Gerade AB, und mit der Ebene C die Gerade CB gemein, so haben die in B liegenden Geraden AB und CB einen Punkt s gemein oder fallen zusammen; im ersten Falle haben alle drei Ebenen den Punkt s, im zweiten eine gerade Linie gemein.

4.

Gehen in Taf. II. Fig. 1. drei beliebige Gerade im Raume durch einerlei Punkt S, und werden auf jeder zwei Punkte a, α; b, β; c, γ beliebig angenommen, so lassen sich diese letzteren paarweise durch zwölf neue Gerade ab, $\alpha\beta$, $a\beta$, αb; bc, $\beta\gamma$, $b\gamma$, βc; ca, $\gamma\alpha$, $c\alpha$, γa, und drei zu drei, ausser Sab, Sbc, Sca, durch acht neue Ebenen abc, $\alpha\beta\gamma$, $ab\gamma$, $\alpha\beta c$, αbc, $a\beta\gamma$, $a\beta c$, $\alpha b\gamma$ verbinden. Ist nun der Reihe nach

der Punkt	a_1	der Durchschnitt der Geraden	bc und $\beta\gamma$,
	α_1		$b\gamma$ „ βc,
	b_1		ca „ $\gamma\alpha$,
	β_1		$c\alpha$ „ γa,
	c_1		ab „ $\alpha\beta$,
	γ_1		$a\beta$ „ αb;

so liegen der Reihe nach die drei Punkte

a_1, b_1, c_1	im Durchschnitte der Ebenen	abc und $\alpha\beta\gamma$,
α_1, β_1, γ_1		αbc „ $a\beta\gamma$,
α_1, b_1, γ_1		$a\beta c$ „ $\alpha b\gamma$,
a_1, β_1, c_1		$ab\gamma$ „ $\alpha\beta c$;

also in vier neuen Geraden, und da diese paarweise sechs Punkte gemein haben, so liegen dieselben in einer und derselben neuen Ebene M.

5.

Sind nun abc und $\alpha\beta\gamma$ irgend zwei Ebenen im Raume, welche von den Strahlen eines räumlichen Strahlbüschels S bezüglich in den Punkten a, α; b, β; c, γ; d, δ... geschnitten werden, und setzt man in der vorhergehenden Betrachtung d, δ an die Stelle von c, γ, so erhält man eine Ebene M, welche gleich der vorigen den Durchschnitt der Ebenen abc und $\alpha\beta\gamma$ und ausserdem auch den Durchschnitt der Geraden $a\beta$ und αb enthält; beide Ebenen M fallen also zusammen. Hieraus folgt:

Werden zwei Ebenen von den Strahlen eines räumlichen Strahlbüschels bezüglich in den Punktenpaaren

$a, b, c, d\ldots$ und $\alpha, \beta, \gamma, \delta\ldots$ geschnitten, und je zwei dieser Punktenpaare, wie a und β, b und α, wechselsweise durch zwei Gerade verbunden, so liegen die Durchschnittspunkte je zweier solcher Geraden alle in einundderselben Ebene, welche auch die Durchschnittslinie jener beiden ersten Ebenen enthält.

6.

Aufgabe. Wenn zwei Ebenen abc und $\alpha\beta\gamma$, deren Durchschnittslinie ausser dem Bereich der Zeichnung liegt, beliebig gegeben sind, durch einen beliebig gegebenen Punkt γ_1 eine Ebene zu legen, welche, gehörig verlängert, nach jener Durchschnittslinie gehen würde.

Auflösung. Man lege durch den Punkt γ_1 zwei Gerade $\alpha\beta$ und ab, welche die geg. Ebenen bezüglich in den Punkten a, β und α, b schneiden; ziehe sodann die Geraden ab und $\alpha\beta$, und aus dem Durchschnitte S der letzteren eine dritte $c\gamma$, welche die beiden Ebenen in c und γ schneidet. Jetzt ziehe man noch $a\gamma$ und αc, die sich in β_1, und $b\gamma$ und βc, die sich in α_1 schneiden; so hat die durch die drei Punkte α_1, β_1, γ_1 gehende Ebene die verlangte Eigenschaft.

7.

Es seien in Taf. II. Fig. 2. abc und $a_1\,b_1\,c_1$ zwei in einerlei Ebene liegende Dreiecke, deren Ecken paarweise auf drei Strahlen aa_1, bb_1, cc_1 eines Punktes s liegen; durch den Punkt s werde eine beliebige Gerade Ss in den Raum gezogen, und zwei beliebige Punkte S, s_1 der letzteren, jener mit den Ecken des Dreiecks abc durch die Geraden Sa, Sb, Sc, dieser mit denen von $a_1\,b_1\,c_1$ durch $s_1\,a_1$, $s_1\,b_1$, $s_1\,c_1$ verbunden. Diess vorausgesetzt, so schneiden sich Sa und s_1a_1 in einem Punkte α; Sb und s_1b_1 in β; Sc und s_1c_1 in γ; ferner schneiden sich die drei Geraden ab, a_1b_1, $\alpha\beta$ in einerlei Punkte γ_1 der Durchschnittslinie der Ebenen abc und $\alpha\beta\gamma$; die drei Geraden bc, b_1c_1, $\beta\gamma$ in einerlei Punkte α_1 derselben Linie, und ebenso ca, c_1a_1, $\gamma\beta$ in einerlei Punkte β_1 dieser Linie. Folglich liegen die Durchschnittspunkte α_1, β_1, γ_1 der Seitenpaare bc und b_1c_1, ca und c_1a_1; ab und $a_1\,b_1$ in einerlei gerader Linie.

Gehen in einer Ebene die drei Geraden, welche die Ecken zweier Dreiecke paarweise verbinden, durch einerlei Punkt, so liegen die drei Durchschnittspunkte der entsprechenden Seitenpaare in einerlei gerader Linie.

8.

In einer Ebene (Taf. II. Fig. 3.) werden zwei beliebige Gerade A, A_1 von drei Strahlen eines Strahlbüschels s bezüglich in den Punktenpaaren a, b, c und a_1, b_1, c_1 geschnitten; zieht man noch die Geraden ab_1 und ba_1, die sich in γ; cb_1 und bc_1, die sich in α schneiden, so liegen die Ecken a, b_1, c und a_1, b, c_1 der Dreiecke ab_1c und a_1bc_1 auf drei in s convergirenden Geraden; also liegen die Punkte α, γ, β, in denen sich die entsprechenden Seitenpaare schneiden, in einer geraden Linie. Hieraus folgt:

Werden zwei Gerade einer Ebene von den Strahlen eines Strahlbüschels in den Punktenpaaren $a, b, c, d\ldots$ und $a_1, b_1, c_1, d_1\ldots$ geschnitten, und je zwei dieser Paare wechselsweise durch zwei neue Gerade, z. B. ab_1 und a_1b, verbunden, so liegen die Durchschnittspunkte aller dieser neuen Geraden in einer und derselben geraden Linie, welche auch den Durchschnitt der beiden ersten Geraden enthält.

Hieraus ergeben sich nun ähnliche Aufgaben, wie aus 6., nämlich: Durch einen gegebenen Punkt einer Ebene in derselben eine Gerade zu ziehen, welche nach dem (ausser dem Bereich der Zeichnung liegenden) Durchschnitte zweier gegebenen Geraden gehe; ferner: Mit zwei gegebenen Parallelen durch einen gegebenen Punkt ihrer Ebene eine neue Parallele zu ziehen; endlich: Durch einen gegebenen Punkt des Raumes eine Gerade zu ziehen, welche nach dem (ausserhalb dem Bereich der Zeichnung liegenden) Durchschnitte einer gegebenen Geraden und einer gegebenen Ebene gerichtet sei.

9.

Durch den in 7. entwickelten Satz, welcher sich auf die bekannte Weise für Figuren von mehr Seiten erweitern lässt, ist nun die unter dem Namen der Collineation bekannte Beziehung der Figuren, und durch die Annahme eines unendlich entfernten Punktes s und des Parallelismus der Seiten sind zugleich die besonderen Fälle der Affinität, Aehnlichkeit, Gleichheit, Symmetrie und Congruenz gesetzt. Sache des zweiten Theiles ist es nun, die metrischen Bedingungen dieser Beziehungen zu erforschen und insbesondere nachzuweisen, inwiefern zwei beliebig gegebene Figuren in eine dieser Beziehungen treten können.

10.

Es seien im Raume drei einander nicht schneidende Gerade A, A_1, A_2 gegeben, und durch eine derselben, z. B. durch A_2, beliebig viele Ebenen α, β, γ, $\delta\ldots$ gelegt, welche die beiden anderen Geraden A, A_1 bezüglich in den Punktenpaaren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}\ldots$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1\ldots$ schneiden; so werden die Verbindungslinien a, b, c, $d\ldots$ dieser Punktenpaare, weil in den Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta\ldots$ liegend, auch die Gerade A_2 in (endlich oder unendlich entfernten) Punkten $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{d}_2\ldots$ treffen müssen. Die Gesammtheit der Geraden $a, b, c, d\ldots$, deren jede also die drei Geraden A, A_1, A_2 schneidet, bildet eine stetig zusammenhängende Fläche, welche windschief oder einfaches Hyperboloid (surface gauche, hyperboloide à une nappe) genannt wird. Dieselbe wird auch dadurch erzeugt, dass man sämmtliche Punkte $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{d}_2\ldots$ der einen Geraden A_2 mit den beiden anderen, A und A_1, durch Ebenenpaare α, α_1; β, β_1, γ, γ_1; δ, $\delta_1\ldots$ verbindet: die Durchschnittslinien dieser Ebenenpaare sind mit den vorigen a, b, c, $d\ldots$ identisch; denn offenbar lässt sich durch jeden Punkt einer der Geraden A, A_1, A_2 immer nur eine einzige Gerade ziehen, welche allen dreien begegnet.

Anmerkung. Das einfache Hyperboloid (und sein besonderer Fall, das hyperbolische Paraboloid) ist eine Zwittergestalt von Ebene und durchaus krummlinichter Fläche, und ein eben so wichtiges Hülfsmittel zur Entwicklung geometrischer Eigenschaften, als die Ebene. Seine Stellung im ersten Theile der Geometrie würde es vollkommen verdienen, wenn, was ich nicht für unmöglich halte, ohne Hülfe metrischer Beziehungen sich beweissen liesse, dass eine jede Gerade, welche dreien der Geraden $a, b, c, d\ldots$ begegnet, sämmtlichen begegnen müsse, und demnach das einfache Hyperboloid aus zwei Schaaren unendlich vieler, einander nicht schneidender Geraden bestehe, welche sich gegenseitig durchsetzen. Mittels projektivischer Eigenschaften, welche im Grunde auf der Proportionalität der Seiten ähnlicher Dreiecke beruhen, ist die Existenz jener zweiten Schaar von Geraden so, wie folgt, dargethan worden.

Da zwei Gerade A, A_1 (Taf. II. Fig. 4.) in Ansehung der Punktenpaare $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}\ldots$ und $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1\ldots$, in denen sie von den Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta\ldots$ eines Ebenenbüschels A_2 geschnitten werden, projektivisch sind, so sind auch drei Gerade A, A_1, A_2 in Ansehung der Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}\ldots$; $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1\ldots$; $\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{c}_2, \mathfrak{d}_2\ldots$, in denen sie von den Geraden $a, b, c, d\ldots$ geschnitten werden, paarweise projektivisch. Dasselbe gilt nun auch von drei Geraden a, b, c in Ansehung der Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3\ldots$; $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3\ldots$; $\mathfrak{c}, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \mathfrak{c}_3\ldots$, in denen sie von $A, A_1, A_2, A_3\ldots$ geschnitten werden. Denkt man sich nun durch einen beliebigen Punkt $\mathfrak{a}_3$ der einen Geraden a eine Gerade $A_{'''}$ gelegt, welche die b und eine beliebige vierte, von A, A_1, A_2 geschnittene Gerade d in den Punkten $b_{'''}$ und $\mathfrak{d}_{'''}$ schneidet, so müssen die Punkte b_3 und $b_{'''}$ sich vereinigen, weil sowohl

$$a\,(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3\ldots) = b\,(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3\ldots),$$

als auch

$$a\,(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3\ldots) = b\,(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_{'''}\ldots)$$

ist.

Folglich fallen auch A_3 und $A_{'''}$ zusammen, d. h. A_3 schneidet nicht nur die a, b, c, sondern auch jede beliebige vierte d der Schaar von Geraden $a, b, c, d\ldots$.

Ueber den Mittelpunkt des einfachen Hyperboloids.

Der Herr Prof. Steiner hat im ersten Theile seines Werks (Abh. d. geom. Gestalten) folgenden Satz aufgestellt, dessen Beweis erst im dritten Bande erfolgen soll:

Alle Ebenen, welche sich durch die verschiedenen Paare paralleler Geraden eines einfachen Hyperboloids legen lassen, schneiden einander in einem und demselben Punkte, nämlich im Mittelpunkte des Hyperboloids.

Der Beweis desselben lässt sich ohne die Theorie der harmonischen Pole und Polaren führen; er beruht nämlich auf folgendem Elementarsatze:

Sind die Gegenseiten eines windschiefen Sechsecks im Raume paarweise parallel, so gehen die drei Hauptdiagonalen desselben durch einerlei Punkt, welcher der Mittelpunkt einer jeden dieser Diagonalen ist.

Beweis. Um zuvörderst die Realität eines solchen Sechsecks darzuthun, denke man sich (Taf. II. Fig. 5) vier beliebige Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ im Raume durch die Geraden $\mathfrak{ab}$, $\mathfrak{bc}$, $\mathfrak{cd}$ verbunden, und durch den ersten $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{cd}$, durch den letzten $\mathfrak{d}$ mit $\mathfrak{ab}$ zwei Parallelen $\mathfrak{af}$ und $\mathfrak{de}$ von unbestimmter Länge gezogen, sodann durch die Gerade $\mathfrak{af}$ eine mit $\mathfrak{bc}$ parallele Ebene, und durch den Punkt $\mathfrak{e}$, in welchem diese Ebene die $\mathfrak{de}$ trifft, mit $\mathfrak{bc}$ eine parallele Linie $\mathfrak{ef}$ gelegt: so muss letztere die $\mathfrak{af}$ in einem Punkte $\mathfrak{f}$ schneiden, und es ist $\mathfrak{abcdefa}$ ein windschiefes Sechseck mit drei parallelen Seitenpaaren.

Die drei Ebenen $\mathfrak{abde}$, $\mathfrak{bcef}$, $\mathfrak{cdfa}$, in denen die drei Paar Parallelen liegen, schneiden sich paarweise, nämlich $\mathfrak{abde}$ und $\mathfrak{bcef}$ in der Geraden $\mathfrak{be}$; $\mathfrak{bcef}$ und $\mathfrak{cdfa}$ in $\mathfrak{cf}$; $\mathfrak{cdfa}$ und $\mathfrak{abde}$ in $\mathfrak{ad}$, d. h. in den Hauptdiagonalen des Sechsecks $\mathfrak{abcdefa}$; also gehen diese letzteren durch einerlei Punkt s. Ferner verhält sich

$$s\mathfrak{a} : s\mathfrak{d} = s\mathfrak{b} : s\mathfrak{e} = s\mathfrak{c} : s\mathfrak{f} = s\mathfrak{d} : s\mathfrak{a},$$

also

$$s\mathfrak{a} : s\mathfrak{d} = s\mathfrak{d} : s\mathfrak{a}$$

d. h.

$$s\mathfrak{a} = s\mathfrak{d},\ s\mathfrak{b} = s\mathfrak{e},\ s\mathfrak{c} = s\mathfrak{f};$$

w. z. b. w.

Es seien nun A, A_1, A_2 irgend drei zu einerlei Schaar gehörige Geraden eines einfachen Hyperboloids, und a, b, c diejenigen Geraden der anderen Schaar, welche bezüglich nach den unendlich entfernten Punkten von A, A_1, A_2 gehen d. h. mit letzteren parallel sind; so muss a die A_1, A_2 in zwei Punkten $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$; b die A_2, A in zwei Punkten, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$; und c die A, A_1 in zwei Punkten $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{a}$ schneiden, und es entsteht so ein windschiefes Sechseck $\mathfrak{abcdefa}$, in welchem die Gegenseiten $\mathfrak{bc}$ und $\mathfrak{ef}$, $\mathfrak{de}$ und $\mathfrak{ab}$, $\mathfrak{af}$ und $\mathfrak{cd}$ oder a und A, b und A_1, c und A_2 parallel sind. Nach dem vorigen Satze gehen also die Durchschnittslinien $\mathfrak{ad}$, $\mathfrak{be}$, $\mathfrak{cf}$ der drei Ebenen, welche durch die Parallelen a, A; b, A_1; c, A_2 sich legen lassen, und somit diese Ebenen selbst durch einerlei Punkt s, welcher der Mittelpunkt jener Linien ist. — Vertauscht man nun die Gerade A_2 mit irgend einer vierten Geraden A_3 derselben Schaar, und ist d die ihr parallele Gerade der anderen Schaar, so änderen sich hierdurch nur die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{f}$, nicht aber $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{e}$, und folglich auch nicht der Mittelpunkt s der Hauptdiagonalen des neuen Sechsecks. Folglich geht auch die durch d, A_3 bestimmte Ebene und ebenso alle übrigen dergleichen Ebenen durch den Punkt s. — Endlich treffe ein beliebiger Strahl von s das Hyperboloid in den Punkten $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$; so gehen durch $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ zwei Gerade M, N des Hyperboloids, welche zu einerlei Schaar gehören; und sind m, n die mit M, N parallelen Geraden der anderen Schaar, so schneidet m die N in einem Punkte $\mathfrak{n}_1$, und n die M in einem Punkte $\mathfrak{m}_1$, und es muss die Gerade $\mathfrak{m}_1\ \mathfrak{n}_1$, als Durchschnittslinie der durch M und m, N und n bestimmten Ebenen, durch den Punkt s gehen und in ihm gehälftet werden. Da nun die Geraden M, N per hypothesin einander nicht schneiden noch parallel sind, die Punkte $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{n}_1$, s aber nach dem so eben Gesagten in einer Ebene liegen müssen, so fallen die Punkte $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{n}_1$ zusammen; es ist also $s\mathfrak{m} = s\mathfrak{n}$ und somit s der Mittelpunkt des Hyperboloids.

w. z. b. w.

Aus diesem Satze ergiebt sich nun folgende höchst einfache Konstruktion des Mittelpunktes eines einfachen Hyperboloids:

Sind A, A_1, A_2 irgend drei zu einerlei Schaar gehörige Gerade eines einfachen Hyperboloids; legt man durch irgend eine derselben, z. B. durch A_2, zwei Ebenen u, v, welche bezüglich mit A, A_1 parallel sind und die A_1, A in den Punkten $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{n}$ schneiden, verbindet diese Punkte mit einander durch eine Gerade und bestimmt den Mittelpunkt der Strecke $\mathfrak{m}_1\ \mathfrak{n}$, so ist letzterer der Mittelpunkt des Hyperboloids.

VI.

Ueber eine besondere Gattung algebraischer Funktionen.

Von dem
Herrn Professor Dr. O. Schlömilch
an der Universität zu Jena.

Die Untersuchungen über die Anziehungen der Sphäroide und die Gestalt der Planeten führen, wie man seit lange weiss, auf eine besondere Art algebraischer Funktionen, welche äusserst merkwürdige Eigenschaften besitzen, u. A. die, dass sich jede beliebige Funktion durch eine unendliche Reihe derselben darstellen lässt. Da der Entwickelungen über diesen interessanten Gegenstand sehr verschiedene an sehr verschiedenen Orten (Crelle's Journal, Savans étrangers, Légendre: Exercices de calcul intégral etc.) gegeben worden sind, welche bald auf diese, bald auf jene Weise zum Ziele gelangen, so ist es vielleicht nicht überflüssig, hier eine kurze und einfache Darstellung der hauptsächlichsten Punkte jener Theorie mitzutheilen.

Wendet man das Theorem von Mac Laurin auf die Funktion

$$\frac{1}{\sqrt{1-2ux+x^2}}$$

an, so ist klar, dass man für dieselbe eine Reihe von der Form

$$1+U_1x+U_2x^2+U_3x^3+\ldots.$$

substituiren kann, worin U_1, U_2, U_3,.... gewisse, nur von u und ihrem Index abhängige Coefficienten bedeuten, von denen der $n$te durch die Formel

$$U_n=\frac{1}{1.2\ldots n}\cdot\frac{\partial^n(1-2ux+x^2)^{-\frac{1}{2}}}{\partial x^n},\text{ für } x=0 \qquad (1)$$

bestimmt wird. Hierin liegt die Definition der eigenthümlichen algebraischen Funktion von u, welche das Thema unserer Betrachtungen ausmachen soll.

Zunächst ist nun zu bemerken, dass man diese Definition dadurch wesentlich vereinfachen kann, dass man die in ihr angedeuteten Rechnungsoperationen ausführt, was nach den Entwickelungen, welche im 8ten Theile des Archivs Seite 357. und weiter gegeben worden sind, nicht die mindeste Schwierig-

keit hat. Setzt man nämlich in der Formel (8) das. $a=-2u$, $b=1$, $\mu=-\frac{1}{2}$ und zuletzt $x=0$, so wird

$$U_n=\frac{1}{(2u)^n}[n_0(n-\tfrac{1}{2})_n(2u)^{2n}-(n-1)_1(n-\tfrac{3}{2})_{n-1}(2u)^{2n-2}$$
$$+(n-2)_2(n-\tfrac{5}{2})_{n-2}(2u)^{2n-4}-....]$$

oder

$$\left.\begin{array}{l}U_n=n_0(n-\frac{1}{2})_n 2^n u^n-(n-1)_1(n-\frac{3}{2})_{n-1}2^{n-2}u^{n-2}\\ \quad+(n-2)_2(n-\frac{5}{2})_{n-2}2^{n-4}u^{n-4}-....\end{array}\right\} \quad (2)$$

Dieser Ausdruck ist aber einer bedeutenden Reduktion fähig. Setzen wir nämlich in dem allgemeinen Gliede der Reihe rechts

$$(n-p)_p\,(n-\frac{2p+1}{2})_{n-p}\,2^{n-2p}\,u^{n-2p}$$

für die darin vorkommenden Binomialkoeffizienten ihre Werthe nach der Formel

$$m_s=\frac{m(m-1)(m-2)....(m-s+1)}{1.2.3....s},$$

so geht dasselbe über in

$$\frac{1}{2^n}2^{2n-2p}\,\frac{(n-p)(n-p-1)(n-p-2)....(n-2p+1)}{1.2.3....p}$$
$$\times\frac{(2n-2p-1)(2n-2p-3)....5.3.1}{1.2.3....(n-p)}\cdot\frac{u^{n-2p}}{2^{n-p}}.$$

Hier ist nun

$$1.2....(n-p)=\frac{1.2.3....n}{n(n-1)....(n-p+1)},$$

$$\frac{1}{1.2....(n-p)}=\frac{n(n-1)....(n-p+1)}{1.2.3....p}\cdot\frac{1.2.3....p}{1.2.3....n}$$
$$=n_p\,\frac{1.2.3....p}{1.2.3....n};$$

und, wenn man diess substituirt, so wird jener Ausdruck

$$\frac{1}{2^n}\cdot\frac{n_p}{1.2....n}\cdot 2^{n-p}(n-p)(n-p-1)....(n-2p+1)$$
$$\times(2n-2p-1)(2n-2p-3)....3.1.u^{n-2p},$$

wobei wir noch den Faktor

$$\frac{(n-2p)(n-2p-1)....2.1}{(n-2p)(n-2p-1)....2.1}$$

zusetzen wollen. Wir erhalten dann

$$\frac{1}{2^n} \cdot \frac{n_p}{1.2....n} 2^{n-p}\, 1.2.3....(n-p).1.3.5....(2n-2p-1)\, u^{n-2p}$$
$$:1.2.3....(n-2p.$$

Durch Vertheilung der $n-p$ in 2^{n-p} enthaltenen Zweien auf die $n-p$ Faktoren $1.2....(n-p)$ wird jetzt

$$\frac{1}{2^n} \cdot \frac{n_p}{1.2....n} . 2.4.6....(2n-2p), 1.3.5.... (2n-2p-1) u^{n-2p}$$
$$:1.2.3....(n-2p),$$

d. i.

$$\frac{1}{2^n} \cdot \frac{n_p}{1.2....n} \cdot \frac{1.2.3....(2n-2p)}{1.2....(n-2p)} u^{n-2p}$$
$$= \frac{1}{2^n.1.2....n} (2n-2p)(2n-2p-1)....(n-2p+1).\, n_p\, u^{n-2p}.$$

Der Werth von U_n gestaltet sich jetzt wie folgt:

$$\begin{aligned} U_n = \frac{1}{2^n.1.2...n} [2n(2n-1)(2n-2)....(n+1)\, n_0\, u^n \\ -(2n-2)(2n-3)....(n-1)\, n_1\, u^{n-2} \\ +(2n-4)(2n-5)....(n-3)\, n_2\, u^{n-4} \\ - \,.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .], \end{aligned}$$

wofür man sehr kurz schreiben kann:

$$U_n = \frac{1}{2^n.1.2....n} \cdot \frac{\partial^n (u^2-1)^n}{\partial u^n}, \qquad (3)$$

denn wenn man $(u^2-1)^n$ nach dem Binomialtheoreme entwickelt und $n$mal differenzirt, so findet man auf der Stelle die vorher in der Klammer stehende Reihe. Die so eben entwickelte Gleichung, die man auch in der Form

$$U_n = \frac{1}{2.4.6....(2n)} D^n (u^2-1)^n \qquad (4)$$

darstellen kann, und die auf anderem Wege zuerst von Jacobi bewiesen wurde (Crelle's Journal Bd. 2. S. 224.), kann als die Fundamentaleigenschaft der Funktion U_n gelten, und in der That lassen sich ihre anderen Eigenschaften mit Leichtigkeit daraus ableiten. Zu den wichtigsten derselben gehört die, dass der Werth des Integrales

$$\int_{-1}^{+1} U_m U_n \partial u$$

immer Null ist, so lange m von n verschieden bleibt, dagegen

$=\frac{2}{2n+1}$ für $m=n$. Man gelangt hierzu mittelst der folgenden einfachen Betrachtung.

Es sei nach einer sehr gewöhnlichen Bezeichnung

$$\frac{\partial^m \varphi(u)}{\partial u^m}=\varphi^{(m)}(u),\ \frac{\partial^n \psi(u)}{\partial u^n}=\psi^{(n)}(u);$$

so ist bei unbestimmter Integration

$$\int\varphi^{(m)}(u)\,\psi^{(n)}(u)\,\partial u=\varphi^{(m)}(u)\int\psi^{(n)}(u)\,\partial u \\ -\int\varphi^{(m+1)}(u)\,\partial u\int\psi^{(n)}(u)\,\partial u$$

oder auch

$$\int\varphi^{(m)}(u)\,\psi^{(n)}(u)\,\partial u \\ =\varphi^{(m)}(u)\,\psi^{(n-1)}(u)-\int\varphi^{(m+1)}(u)\,\psi^{(n-1)}(u)\,\partial u.$$

Verschwindet nun $\psi^{(n-1)}(u)$ sowohl für $u=a$ als $u=b$, so folgt hieraus

$$\int_a^b \varphi^{(m)}(u)\,\psi^{(n)}(u)\,\partial u=-\int_a^b \varphi^{(m+1)}(u)\,\psi^{(n-1)}(u)\,\partial u.$$

Auf der rechten Seite kann man dieselbe Reduktion wieder vornehmen und findet unter der Bedingung, dass $\psi^{(n-1)}(u)$ und $\psi^{(n-2)}(u)$ für $u=a$ und $u=b$ verschwinden:

$$\int_a^b \varphi^{(m)}(u)\,\psi^{(n)}(u)\,\partial u=+\int_a^b \varphi^{(m+2)}(u)\,\psi^{(n-2)}(u)\,\partial u.$$

Man übersieht leicht den Fortgang dieser Betrachtung; unter der Rücksicht, dass $\psi^{(n-n)}(u)=\psi(u)$ ist, gelangt man nämlich zu dem Satze: verschwinden die Funktionen $\psi^{(n-1)}(u)$, $\psi^{(n-2)}(u)$, ... $\psi''(u)$, $\psi'(u)$, $\psi(u)$ sämmtlich für $u=a$ und $u=b$, so ist

$$\int_a^b \varphi^{(m)}(u)\,\psi^{(n)}(u)\,\partial u=(-1)^n\int_a^b \varphi^{(m+n)}(u)\,\psi(u)\,\partial u.$$

Diesen Satz können wir auf die Formen

$$\varphi(u)=(u^2-1)^m,\ \psi(u)=(u^2-1)^n$$

anwenden, indem man sich sehr leicht überzeugen wird, dass die Funktion $\psi(u)$ nebst ihren Differenzialquotienten bis zum $(n-1)$ten inclus. sich für $a=-1$ und $b=+1$ annullirt. Es wird so

$$\int_{-1}^{+1} D^m(u^2-1)^m D^n(u^2-1)^n\partial u=(-1)^n\int_{-1}^{+1} D^{m+n}(u^2-1)^m.(u^2-1)^n\partial u,$$

und wir stellen daher den Satz auf:

(5)

$$\int_{-1}^{+1} U_m U_n \partial u$$

$$=\frac{1}{2.4.6....(2m)}\cdot\frac{1}{2.4.6....(2n)}(-1)^n\int_{-1}^{+1}(u^2-1)^n D^{m+n}(u^2-1)^m \partial u.$$

Das Integral rechts bedarf noch einer kleinen Umformung. Entwickelt man nämlich mittelst des Taylorschen Satzes $f(u+h)$ in eine nach Potenzen von h fortgehende Reihe für $f(u)=(u^2-1)^m$, so wird

$$[(u+h)^2-1]^m=1+A_1 h+....+A_{m-r}h^{m-r}+.... \quad (6)$$

und hier ist

$$A_{m-r}=\frac{1}{1.2....(m-r)}\cdot\frac{\partial^{m-r}(u^2-1)^m}{\partial u^{m-r}}. \quad (7)$$

Setzt man in der obigen Gleichung $\frac{u^2-1}{h}$ für h, so erhält man

$$[(u+\frac{u^2-1}{h})^2-1]^m=1+A_1\frac{u^2-1}{h}+....,$$

und hier kommt rechts u. A. auch das Glied

$$A_{m+r}\left(\frac{u^2-1}{h}\right)^{m+r}$$

vor; beiderseitige Multiplikation mit h^{2m} giebt

$$[(hu+u^2-1)^2-h^2]^m$$
$$=h^{2m}+(u^2-1)A_1 h^{2m-1}+....+(u^2-1)^{m+r}A_{m+r}h^{m-r}+...$$

Das links in der Klammer Befindliche ist aber nichts Anderes als

$$(u^2-1)\{(h+u)^2-1\},$$

und folglich wird durch Division mit $(u^2-1)^m$:

$$[(h+u)^2-1]^m=\frac{h^{2m}}{(u^2-1)^m}+....+(u^2-1)^r A_{m+r}h^{m-r}+...$$

Die linke Seite ist nun mit der von (6) identisch; folglich müssen auch rechts die Coeffizienten gleicher Potenzen von h dieselben sein; daraus folgt

$$(u^2-1)^r A_{m+r}=A_{m-r},$$

oder vermöge der durch No. (7) festgestellten Bedeutung der Coeffizienten A:

$$\frac{(u^2-1)^r}{1.2....(m+r)} D^{m+r}(u^2-1)^m = \frac{1}{1.2....(m-r)} D^{m-r}(u^2-1)^m,$$

wobei natürlich immer $r \leqq m$ sein muss. Diese schon an sich sehr interessante Beziehung dient uns auch zur Reduktion des Integrales in (5), wenn wir $r=n$ und

$$(u^2-1)^n D^{m+n}(u^2-1)^m = \frac{1.2....(m+n)}{1.2....(m-n)} D^{m-n}(u^2-1)^m$$

setzen. Es wird dann

(8)

$$\int_{-1}^{+1} U_m U_n \partial u$$

$$= \frac{(-1)^n}{2.4....(2m).2.4....(2n)} \cdot \frac{1.2....(m+n)}{1.2....(m-n)} \int_{-1}^{+1} D^{m-n}(u^2-1)^m \partial u,$$

und diese Gleichung wird durch die Bedingung $u \leqq m$ nicht beschränkt, weil es bei der Symmetrie der linken Seite immer frei steht mit n den kleinsten der Indices m und n zu bezeichnen.

Für das Integral rechts in (8) sind nun zwei Fälle zu unterscheiden, ob nämlich $m > n$ oder $m=n$ ist. Im ersten giebt die unbestimmte Integration

$$D^{m-n-1}(u^2-1)^m,$$

und diess annullirt sich sowohl für $u=+1$ als $u=-1$, wie überhaupt

$$D^q(u^2-1)^m,$$

sobald $q < m$ ist. Es wird demnach

$$\int_{-1}^{+1} U_m U_n \partial u = 0 \text{ für } m > n,$$

d. h. für ein von n verschiedenes m (nach der vorhin gemachten Bemerkung). Für $m=n$ dagegen geht das Integral auf der rechten Seite von (8) über in

$$\int_{-1}^{+1} (u^2-1)^n \partial u = (-1)^n \int_{-1}^{+1} (1-u^2)^n \partial u,$$

und der Werth desselben ist

$$2(-1)^n \cdot \frac{2.4.6....(2n)}{3.5.7.....(2n+1)},$$

wie man leicht durch eine Reduktionsformel oder mittelst der Gammafunktionen findet. Berücksichtigt man ferner, dass die

Faktorielle $1.2\ldots.(m-n)$ für $m=n$ die Einheit bedeutet, so wird jetzt

$$\int_{-1}^{+1} U_n U_n \partial u$$

$$=\frac{1}{2^2.4^2.6^2\ldots.(2n)^2}\cdot\frac{1.2\ldots.(2n)}{1}\cdot\frac{2.4.6\ldots.(2n)}{3.5.7\ldots.(2n+1)}2=\frac{2}{2n+1},$$

und damit ist gezeigt, dass

$$\left.\begin{aligned}\int_{-1}^{+1} U_m U_n &= 0, \text{ für } m \lessgtr n\\ &= \frac{2}{2n+1}, \text{ für } m=n\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

wird. Hiervon lässt sich sogleich die folgende interessante Anwendung machen. Sei $f(u)$ eine beliebige Funktion von u und

$$f(u)=C_0+C_1 U_1+C_2 U_2+\ldots.$$

wo C_0, C_1, C_2,.... unbestimmte Coeffizienten bedeuten, so kann man C_n auf folgende einfache Weise bestimmen. Man multiplizire die ganze Gleichung mit $U_n \partial u$ und integrire hierauf zwischen den Gränzen $u=-1$, $u=+1$, so wird

$$\int_{-1}^{+1} f(u)\, U_n \partial u = C_0\int_{-1}^{+1} U_n \partial u + C_1\int_{-1}^{+1} U_1 U_n \partial u + \ldots$$

$$\ldots + C_n\int_{-1}^{+1} U_n U_n \partial u + \ldots$$

Mit Ausnahme des C_n enthaltenden Gliedes sind hier alle Integrale von der Form

$$\int_{-1}^{+1} U_m U_n \partial n,\ m \gtrless n$$

und folglich sämmtlich $=0$; es bleibt nur

$$\int_{-1}^{+1} f(u)\, U_n \partial u = C_n \frac{2}{2n+1},$$

woraus sich der Werth von C_n findet, nämlich

$$C_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1} f(u)\, U_n \partial u. \quad (10)$$

Hat man hiernach die Coeffizienten C bestimmt, so ist

$$f(u)=C_0+C_1 U_1+C_2 U_2+\ldots, \quad (11)$$

also jede beliebige Funktion durch die algebraischen Funktionen U_1, U_2,.... ausdrückbar.

Es mag übrigens noch bemerkt werden, dass diese Ableitung der Formeln (10) und (11) zwar kurz und heuristisch, aber, wie der heuristische Gedankengang oft, nichts weniger als streng ist, da man die Bedingungen nicht erfährt, an welche die Gültigkeit der Gleichung (11) geknüpft sein kann. Eine strengere Begründung erhält man dadurch, dass man die Reihe

$$C_0 + C_1 U_1 + C_2 U_2 + \ldots + C_n U_n,$$

in welcher die Coeffizienten mittelst der Formel (10) bestimmt sind, summirt, darauf n ins Unendliche wachsen lässt, und die Gränze bestimmt, welcher sich der gefundene Ausdruck nähert. In sehr eleganter und allgemeiner Weise hat in Crelle's Journal Herr Prof. Lejeune Dirichlet diesen Gedanken ausgeführt und es kann bei der Vollendung, welche der scharfsinnige Geometer seiner Arbeit gegeben hat, hier nur eine Verweisung auf dieselbe statt finden.

VII.

Ueber die Differenziation unendlicher Reihen.

Von dem
Herrn Professor Dr. O. Schlömilch
an der Universität zu Jena.

Schon Abel hat darauf aufmerksam gemacht, dass der Differenzialquotient von der Summe einer unendlichen Reihe nicht immer der Summe der Differenzialquotienten der einzelnen Glieder gleich gesetzt werden darf *), er hat aber den Grund dieser auf den

*) So gilt z. B. die Gleichung

$$-\tfrac{1}{2}l(2-2\cos x) = \tfrac{1}{1}\cos x + \tfrac{1}{2}\cos 2x + \tfrac{1}{3}\cos 3x + \ldots$$

ganz unbestritten für alle reellen x; wollte man aber differenziren, so würde

$$\tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}x = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots$$

herauskommen, was wenigstens qua Gleichung unrichtig ist; für $x = 0$ erhielte man z. E. $\infty = 0$, was selbst syntaktische Genie's nur schwer werden „deuten" können.

ersten Blick sehr befremdlich aussehenden Erscheinung nicht angegeben. Diess zu thun ist der Zweck der folgenden Zeilen.

Es sei die Summe einer $n$gliedrigen Reihe

$$F(x) = f(x,1) + f(x,2) + \dots + f(x,n) \qquad (1)$$

gegeben, so hat man

$$\frac{F(x+\delta)-F(x)}{\delta} = \frac{f(x+\delta,1)-f(x,1)}{\delta}$$
$$+ \frac{f(x+\delta,2)-f(x,2)}{\delta}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \frac{f(x+\delta,n)-f(x,n)}{\delta}.$$

Nun ist aber nach der Definition des Differenzialquotienten $\varphi'(x) = \mathrm{Lim}\,\frac{\varphi(x+\delta)-\varphi(x)}{\delta}$, und folglich kann man immer

$$\frac{\varphi(x+\delta)-\varphi(x)}{\delta} = \varphi'(x) + \varepsilon$$

setzen, wo ε eine Grösse bezeichnet, die mit δ gleichzeitig bis zur Gränze Null abnimmt. Es folgt jetzt

$$\frac{F(x+\delta)-F(x)}{\delta} = f'(x,1) + f'(x,2) + \dots + f'(x,n)$$
$$+ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_n,$$

wo $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_n$ gewisse mit δ gleichzeitig bis zur Gränze Null abnehmende Grössen sind. Durch Uebergang zur Gränze für unendlich abnehmende δ wird jetzt

$$\left. \begin{aligned} F'(x) &= f'(x,1) + f'(x,2) + \dots + f'(x,n) \\ &+ \mathrm{Lim}\,[\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_n]. \end{aligned} \right\} \qquad (2)$$

Hier sind nun die zwei Fälle zu unterscheiden, ob nämlich n eine endliche constante, oder eine unendlich wachsende Zahl ist. Dass im ersten Falle

$$\mathrm{Lim}\,[\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n] = 0$$

sei, erhellt sehr leicht auf folgende Weise. Es möge ε' die grösste, ε'' die kleinste unter den Grössen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_n$ bedeuten, so ist

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_n$$
$$< n\varepsilon' \text{ und } > n\varepsilon''.$$

Da aber jede der Grössen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ unbegränzt abnimmt, so ist diess auch mit ε' und ε'' der Fall, und da bei diesem Prozesse n constant bleibt, so hat man gleichzeitig

$$\text{Lim}(n\varepsilon')=0,\ \text{Lim}(n\varepsilon'')=0;$$

woraus sogleich

$$\text{Lim}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_n)=0$$

folgt, und jetzt ergiebt sich aus No. (2)

$$F'(x)=f'(x,1)+f'(x,2)+\ldots+f'(x,n). \qquad (3)$$

In einer endlichen Reihe darf man also beiderseits Glied für Glied differenziren, ohne die Gleichheit beider Seiten zu stören.

Ganz anders aber verhält sich die Sache, wenn n ins Unendliche wächst oder die Reihe eine unendliche ist. Obschon auch hier die Grössen ε_1, ε_2, ... in der Gleichung (2) der Gränze Null zueilen, so kann doch die Summe einer unendlichen Menge von ihnen sehr beträchtlich ausfallen. Wäre z. B. $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3\ldots$, wofür wir blos ε schreiben wollen, so würde

$$F'(x,n)=f'(x,1)+f'(x,2)+\ldots+f'(x,n)$$
$$+\text{Lim}(n\varepsilon)$$

folgen, wo nun ε unbegränzt ab-, dagegen n, wegen der Unendlichkeit der Reihe, unbegränzt zunimmt, folglich $\text{Lim}(n\varepsilon)$ gegen einen angebbaren Werth Δ als Gränze convergiren kann. Man sieht hieraus, dass es Fälle geben wird, in welchen eine Gleichung wie

$$F(x)=f(x,1)+f(x,2)+f(x,3)+\ldots \text{ in inf.} \qquad (4)$$

eine Consequenz von der Form

$$F'(x)-\Delta=f'(x,1)+f'(x,2)+\ldots \text{ in inf.} \qquad (5)$$

nach sich zieht, so dass es also unter Umständen nicht erlaubt ist, aus No. (4) schliessen zu wollen:

$$F'(x)=f'(x,1)+f'(x,2)+\ldots \text{ in inf.}$$

Man kann dieses Resultat auf folgende Weise etwas prägnanter und anschaulicher darstellen. Es sei

$$F(x)=\Sigma f(x,n), \qquad (6)$$

wo das Summenzeichen bedeuten soll, dass $n=1,\ 2,\ 3,\ldots$ zu setzen ist und die so entstehenden Glieder zu summiren sind. Bezeichnen wir ferner die Differenziation in Bezug auf x mit einem blosen D, so dass also überhaupt

$$D\varphi(x)=\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}$$

ist, so folgt aus der Gleichung (6) ganz unzweifelhaft

$$DF(x) = D\Sigma f(x,n), \qquad (7)$$

denn wenn zwei Funktionen identisch sind, müssen offenbar auch ihre Differenzialquotienten zusammenfallen. Dabei darf man jedoch die Stellung von D und Σ nicht übersehen, es wird nämlich zuerst summirt und nach geschehener Summirung differenzirt. Dagegen ist es nicht immer erlaubt, die Reihenfolge dieser Operationen umzukehren und zu schreiben

$$DF(x) = \Sigma Df(x,n), \qquad (8)$$

wo jedes einzelne Glied erst differenzirt und nachher Alles summirt wird. Mit einem Worte also: wer aus der Gleichung

$$F(x) = \Sigma f(x,n)$$

ohne weiteres die folgende ableiten will:

$$DF(x) = \Sigma Df(x,n),$$

setzt stillschweigend voraus, dass immer

$$D\Sigma f(x,n) = \Sigma Df(x,n)$$

sei, kehrt also willkührlich die Reihenfolge der Operationen um.

Man sieht hieraus, dass es immer noch einer besonderen Untersuchung bedarf, um entscheiden zu können, ob die durch Differenziation einer ursprünglichen Summenformel entstandene neue Gleichung auch wirklich richtig ist, oder nicht, was aber in den meisten Fällen keine besonderen Schwierigkeiten hat.

VIII.

Ueber den 28. Satz des XI. Buchs der Elemente des Euclides.

Von dem

Herrn Dr. Joh. Jos. Ign. Hoffmann,

Königl. Bayer. Hofrathe, Director des Lyceums zu Aschaffenburg, etc.

1. Dieser 28. Satz des XI. Buchs ist folgender: Wenn ein Parallelopipedum von einer Ebene durch die Diagona-

len zweier gegenüberliegenden Seitenflächen durchschnitten wird, so wird es hierdurch halbirt. — Es werde das Parallelopipedum *AB* (Taf. III. Fig. 1.) von einer Ebene durch die Diagonalen *CF* und *DE* durchschnitten, so ist es hierdurch halbirt.

Der Beweis ist (nach meiner Ausgabe der geometrischen Bücher der Elemente des Euclides. Mainz. 1829. gr. 8. S. 168.) dieser: Da hier Δ *CGF* $\cong$ Δ *CBF* (I. 34. S.) und Δ *DAE* $\cong$ Δ *DHE*, und da ferner die Parallelogramme *CA* und *BE* (XI. 24. S.) und *GE* und *CH* einander gleich sind, auch die Durchschnittsebene *CFED* beiden Körpern gemein ist, so muss auch das Prisma *CGFDAE* dem Prisma *CFBDEH* gleich sein (XI. 10. Erkl.)

2. Diese als Beweisgrund citirte 10. Erklärung lautet (nach obiger Ausgabe S. 143.) folgendergestalt: Gleiche und ähnliche Körper sind jene, die von gleich vielen, gleichen und ähnlichen Ebenen eingeschlossen werden.

3. Da man aber unter gleichen und ähnlichen, d. h. unter congruenten Körpern nur jene versteht, welche, wenn sie gehörig in einander gestellt werden, einen einzigen Körper bilden, so enthält diese 10. Erklärung eigentlich eine Behauptung, welche bewiesen werden müsste. Allein diese Behauptung selbst ist nicht allgemein wahr. Denn wenn das schiefe Parallelopipedum *AB* (Taf. III. Fig. 2.) durch den Diagonalschnitt *CEHG* in die zwei schiefen dreieckigen Prismen *AECFHG* und *ECDHGB* getheilt wird, so sind beide (wie man leicht findet) zwar von gleich vielen gleichen und ähnlichen Ebenen umschlossen; allein sie können doch nicht zur gegenseitigen Deckung gebracht werden. Dennoch ist ein überzeugender Beweis über die Gleichheit ihrer Körperräume erforderlich, welchen Euclides nicht gegeben hatte.

4. Zwei der vorzüglichsten ältern Commentatoren der Elemente, Christoph Clavius und Robert Simson, hatten sich bemüht, diese Lücke auszufüllen; allein sie erreichten das vorgesteckte Ziel nicht. Auch die meisten neueren Schriftsteller, Deutsche und Franzosen, haben dieses Mangelhafte nicht ergänzt. Selbst der durch Herausgabe und Erläuterung der alten Geometer so rühmlich bekannte Peyrard befriediget hier nicht vollkommen. Die Beweise, welche man bei Karsten und Legendre findet, entsprechen zwar der geometrischen Strenge; scheinen aber nicht elementar genug, um an die Stelle des 28. Satzes im XI. Buche der Elemente gesetzt zu werden.

5. Die Mittheilung einiger leicht verständlichen, strengen Beweise dieses so wichtigen Lehrsatzes wird demnach den Liebhabern des geometrischen Studiums erfreulich sein. Ehe dieselben geführt werden, ist jedoch noch nachzuweisen, dass (Taf. III. Fig. 2.) die Diagonale *EC* der Oberfläche *ACDE* mit der Diagonale *HG* der Grundfläche *FGBH* in einerlei Ebene liege. Denn nur in diesem Falle ist ein Diagonalschnitt durch *ECGH* möglich. Der Grund hievon ist folgender. Da *ACGF* ein Parallelogramm ist, so muss *AF* mit *CG*, und da auch *AEHF* ein solches ist, so muss *AF* mit *EH* parallel sein. Demnach sind

auch die Linien *CG* und *EH* miteinander parallel (9. S. XI. B.). Allein es ist auch *CG*=*EH*. Folglich muss *ECGH* ein Parallelogramm sein.

6. Nun sei *AH* (Taf. III. Fig. 3.) das gegebene Parallelopipedum und *CF* der Diagonalschnitt, so entstehen die beiden schiefen dreiseitigen Prismen *ABCEFG* und *CDBGHF*. Wir wollen jenes das hintere, dieses das vordere (in Bezug auf die Ansicht unserer Zeichnung) nennen. Wird nun das vordere Prisma von dem Parallelopipedum getrennt, dasselbe umgekehrt, d. h. seine Oberfläche zur Grundfläche und seine Grundfläche zur Oberfläche gemacht; so, dass nun *CBD*, in der verlängerten Linie *FE* und in der über *EG* erweiterten Ebene *EFG*, die Lage von *cbd* erhält, so stellt *gfhdbc* die Lage dieses umgekehrten dreieckigen Prisma's vor.

7. Vergleicht man nun die Prismen *ABCGFE* und *ghfdbc* mit einander, so ergeben sich folgende Resultate:

a) Δ *ACB* $\cong$ Δ *EGF* $\cong$ Δ *gfh* $\cong$ Δ *cbd*. Ferner ist *BCGF* $\cong$ *bcgf*, *ACGE* $\cong$ *hfbd* und *ABFE* $\cong$ *ghdc*. Dieses heisst: beide Prismen sind von gleich vielen, gleich und ähnlichen Seitenflächen eingeschlossen.

b) Da die Neigung der Seitenebenen *ABFE* und *CBFG* der Neigung der Ebenen *DCGH* und *BCGF* gleich ist, so muss auch die Neigung jener beiden Ebenen der Neigung der Ebenen *hgcd* und *fgcb* gleich sein. Auf ähnliche Weise ist der Neigungswinkel der Ebenen *BAEF* und *CAEG* jenem der Ebenen *ghdc* und *fhdb*, und der Neigungswinkel der Ebenen *BCGF* und *ACGE* jenem der Ebenen *gfbc* und *hfbd* gleich.

c) Ferner ist leicht zu erkennen, dass jede der Seitenflächen *ABFE*, *CBFG* und *CAEG* mit der Oberfläche *ABC* und mit der Grundfläche *EFG* die nämlichen Winkel bildet, welche jede der Seitenflächen *hgcd*, *fgcb* und *fhdb* mit der Oberfläche *hgf* und mit der Grundfläche *dcb* erzeuget.

d) Auch wird jeder der sechs Körperwinkel, welche das eine dreieckige Prisma enthält, mit dem homologen des andern Prisma's aus gleichvielen und gleich grossen ebenen Winkeln gebildet. Der Körperwinkel bei *C* wird z. B. wie jener bei *f* aus drei ebenen Winkeln *ACB*=*hfg*, *BCG* =*gfb* und *ACG*=*hfb* gebildet. Eben dieses gilt von jedem andern Paare dieser homologen Winkel.

8. Ungeachtet nun beide Prismen in Congruenz ihrer Seitenflächen, in der Neigung derselben sowohl unter sich, als gegen Grund- und Oberflächen, und endlich auch in der Grösse und Zahl der ihre Körperwinkel bildenden ebenen Winkeln übereinstimmen, so decken sie sich dennoch nicht. Worin liegt der Grund dieser Abweichung bei sovielfacher Uebereinstimmung? Diese Frage kann einzig und allein durch die Anschauung beantwortet werden. Denn wer die Dreiecke *ACB* und *hgf* aufmerksam betrachtet, sieht nun sogleich, dass die Seiten *AB* und *hg* in Rücksicht ihrer Lage übereinstimmen, die Linien *AC* und *hf*, so wie *BC* und *gf* aber eine verschiedene Lage haben. Man

kann sie in Bezug auf *gB* die symmetrische nennen, und erkennt sogleich, dass auch die ganzen Dreiecke *ACB* und *hfg* eine symmetrische Lage haben. Auf gleiche Weise sind *EGF* und *dbc* symmetrisch liegende Dreiecke und die Kanten *AE* und *hd*, *CG* und *fb*, *BF* und *gc* symmetrische Linien. Betrachtet man das ganze Prisma *ACBFGE* und *gfhdbc*, so haben endlich beide Körper, in Bezug auf ihre Oberflächen, oder in Bezug auf ihre Grundflächen, eine symmetrische Lage gegen einander, und können daher füglich symmetrische Körper genannt werden.

9. Eine besondere Aufmerksamkeit verdienen aber die homologen Körperwinkel. Betrachtet man z. B. diese Winkel bei *C* und bei *f*, so ist zwar jeder von drei ebenen Winkeln umschlossen, welche paarweise gleich sind; allein wenn der Winkel *ACB* den Winkel *gfh* so decket, dass *C* in *f*, *CA* längs *fg* und *CB* längs *fh* fällt, so decket der Winkel *ACG* den Winkel *gfb* so wenig, als der Winkel *BCG* den Winkel *hfb*, weil die Seitenflächen, worin diese Winkel liegen, gegen die Dreiecke *ACB* und *gfh* eine verschiedene (man kann sagen eine symmetrische) Lage haben. Daher kann denn der Körperwinkel bei *C* den Körperwinkel bei *f* nicht decken. Aus gleichem Grunde wird keiner der übrigen Körperwinkel bei *A*, *B*, *F*, *G* und *E* mit dem ihm homologen Körperwinkel bei *h*, *g*, *c*, *b* und *d* so zusammenfallen, dass sie sich deckten. Diese Eigenthümlichkeit der Körperwinkel beider Prismen hatte sowohl Clavius als Robert Simson übersehen. Denn sonst hätten Beide das gänzliche Ineinanderfallen dieser Winkel, und mit diesem auch die Congruenz der Körper selbst, nicht behaupten können, da dieser Behauptung die Klarheit der Anschauung geradezu widerspricht. Wie äusserst wichtig zeigt sich hierdurch die scharfe Bildung der Anschauungskraft für das Studium der Geometrie? und wie unentbehrlich ist nicht eine geometrische Anschauungslehre als Propädeutik zur eigentlichen geometrischen Wissenschaftslehre?

10. Hieraus entspringt nun der Begriff von den symmetrischen Körpern, der, soviel wir wissen, zuerst von den französischen Geometern in die Geometrie eingeführt worden ist. Legendre sagt (in seinen Elémens de Géométrie, avec des notes. 4me édition. A Paris. 1802. S. 163.): Symmetrische Körper werde ich jene nennen, welche auf beiden Seiten einer gemeinschaftlichen Grundfläche dergestalt construirt sind, dass die Verbindungslinien zwischen den Scheiteln ähnlich liegender Körperwinkel auf dieser Grundfläche (oder ihrer Verlängerung) lothrecht stehen.

Zur Erläuterung dieser Erklärung sei *abc* (Taf. III. Fig. 4.) ein beliebiges Dreieck und *d* ein ausserhalb dessen Ebene angenommener Punkt. Von *d* giebt es ein Loth auf die Ebene *abc*, welches entweder in dieselbe, oder ausserhalb derselben, in ihre Verlängerung, trifft. Hier sei das Letzte der Fall und *df* dieses Loth. Macht man nun $fg = df$ und zieht die geraden Linien *ad*, *bd*, *cd*, ferner *ag*, *bg*, *cg*, so entstehen zwei dreiseitige Pyramiden *abcd* und *abcg*, welche eine symmetrische Lage haben und desshalb symmetrische Pyramiden heissen. — Auf

gleiche Art lassen sich symmetrische dreieckige Prismen, symmetrische Parallelopipeden u. s. f. construiren.

11. Man wird bald finden, dass die, auf diese Weise (10) entstandenen, symmetrischen Körper in gleich viele, congruente Seitenflächen eingeschlossen sind, dass jedes Paar homologer Seitenflächen gleiche Neigung hat, und dass alle homologe Körperwinkel von gleich vielen und gleich grossen ebenen Winkeln eingeschlossen sind. Dieses hier weitläufig auseinander zu setzen, verbietet die Kürze des Raumes. Aber selbst der Anfänger wird diese Beweise leicht selbst finden können. Es stimmt daher die Erklärung der symmetrischen Körper nach Legendre mit der unserigen (8) überein.

12. Was nun die Entstehung symmetrischer Prismen betrifft, so kann man dieselbe auf folgende leichtverständliche Art nachweisen. Man nehme in einer gegebenen Ebene die gerade Linie gB (Taf. III. Fig. 3.), in ihr $gh = AB$, und beschreibe die congruenten Dreiecke gfh und ACB so, dass $gf = BC$, $hf = AC$ werde. Auf gfh und BCA errichte man nun die $hd = AE$, in derselbigen (der Lage nach willkührlichen) Ebene liegend, unter gleichen schiefen Neigungswinkeln, nehme $fb = gc = hd$ und parallel mit hd; ebenso $CG = BF = AE$ parallel mit AE, und ziehe die Verbindungslinien cd, db, bc und FE, EG, GF, so entstehen die beiden symmetrischen dreieckigen Prismen $gfhdbc$ und $BCAEGF$. Setzt man sie gehörig zusammen, so bilden sie das Parallelopipedum AH.

13. Nachdem nun Legendre (a. a. O.) gezeigt hat, dass die symmetrischen Körper in der Congruenz ihrer Seitenflächen, in ihrer Neigung gegeneinander und in der Gleichheit der ihre Körperwinkel bildenden ebenen Winkel übereinstimmen, fügt er hinzu: „On peut conclure, que deux polyèdres symmétriques sont égaux quoiqu'ils ne puissent être superposés: Car il n'y a d'autre différence dans les deux solides, que celle de la position des parties, laquelle n'est point essentielle à la grandeur de ces mêmes parties."

So wahr nun diese Aeusserungen sind, so wenig können sie die Gleichheit der symmetrischen Körper geometrisch wissenschaftlich begründen. Dieses fühlte auch der scharfsinnige Legendre. Denn er hat in den Notes sur les Élémens de Géométrie; note VII. Seite 303. u. f. einen strengen Beweis über die Gleichheit der symmetrischen Körper gegeben.

14. Da sich dieser Beweis von Legendre durch Originalität und Gründlichkeit auszeichnet und die Élémens de Géométrie in Deutschland immer noch nicht so allgemein bekannt sind, wie sie verdienen, so theilen wir ihn hier, wenigstens der Gedankenfolge nach, mit. Der aufmerksame Leser wird die ausführlichen Beweise wohl selbst auffinden und sich die passenden Zeichnungen dazu leicht verfertigen können.

I. Satz. Wenn man aus der Spitze eines gleichschenklichen Dreiecks auf dessen Ebene ein Loth errichtet und solches zu beiden Seiten der Ebene gleich gross nimmt, auch von jedem Endpunkte der Grundlinie dieses gleichschenklichen Dreiecks eine gerade Linie nach jedem Endpunkte dieser beiden Lothe zieht, so entstehen zwei dreieckige Pyramiden, welche sich decken.

II. Satz. Wenn man aus dem Mittelpunkte des um ein gegebenes Dreieck zu beschreibenden Kreises auf des Dreiecks Ebene ein Loth errichtet, dasselbe nach beiden Seiten des Dreiecks gleich gross macht, und jeden Endpunkt dieser zwei Lothe mit jedem der drei Winkelpunkte des Dreiecks durch gerade Linien verbindet, so entstehen zwei symmetrische Pyramiden von gleicher Grösse.

Denn jede dieser Pyramiden zerfällt in drei andere von gleichschenklichen Grundflächen (wie die im I. Satze), welche paarweise congruent sind. Folglich sind auch ihre Summen gleich.

III. Satz. Um jede dreiseitige Pyramide kann eine Kugel beschrieben werden, deren Fläche durch die Scheitelpunkte ihrer vier Körperwinkel geht.

Wenn man um eine der dreieckigen Seitenflächen der gegebenen Pyramide einen Kreis beschreibt, aus dessen Mittelpunkte auf denselben ein Loth errichtet, so ist jeder Punkt dieses Lothes von jedem Winkelpunkte des Dreiecks gleichweit entfernt, und es kommt nur darauf an, diesen Punkt so zu wählen, dass auch seine Entfernung von der Spitze der Pyramide eben diese Grösse erhält, was man leicht durch Construction finden kann.

IV. Satz. Zwei symmetrische dreiseitige Pyramiden sind gleich am Körperinhalte.

Wenn man um jede derselben eine Kugel beschreibt, so sind ihre Halbmesser von gleicher Grösse. Fallen nun die Mittelpunkte dieser Kugeln in die Pyramiden, so fälle man aus ihnen auf jede ihrer Seitenflächen ein Loth, und ziehe nach jeder Winkelspitze der Pyramiden eine gerade Linie, so entstehen in jeder Pyramide vier kleinere, welche (nach II. Satz) paarweise gleich sind. Folglich sind auch ihre Summen, d. h. die symmetrischen Pyramiden einander gleich.

V. Satz. Zwei symmetrische Prismen sind gleich am Körperraume.

Denn man sieht leicht, dass sich jede zwei symmetrische Prismen in eine gleiche Anzahl von symmetrischen dreieckigen Pyramiden zertheilen lassen. Da nun diese paarweise einander gleich sind (nach IV. Satz), so sind es auch die gegebenen symmetrischen prismatischen Körper.

Anmerkung. Wenn im II. Satze der Mittelpunkt des um das Dreieck zu beschreibenden Kreises ausserhalb dieses Dreiecks; oder in dem IV. Satze der Mittelpunkt der um die Pyramiden zu beschreibenden Kugeln ausserhalb der Pyramiden fällt, so ist es leicht, die Beweise auf ähnliche Art zu führen.

15. So befriedigend nun auch dieser Beweis ist, so muss man doch gestehen, dass er (besonders bei näherer Ausführung) auf elementarische Kürze keinen Anspruch machen kann. Es schien mir daher der Mühe werth, einen so höchst wichtigen Satz der Stereometrie: das Theorem von dem Diagonalschnitte des schiefen Parallelopipedums, so kurz und bündig zu erweisen, als dieses nur immer von einer ähnlichen Behauptung der Körperlehre gefordert werden kann. Den hierüber ersonnenen

Beweis hatte ich bereits vor langer Zeit der vormaligen Departementalgesellschaft der W. W. und K. K. in Mainz (welche mich mit einem Diplome zum Beitritt als auswärtiges Mitglied beehrte) als kleine Denkschrift zugesendet, und die mathematische Section jener Gesellschaft hatte meine Darstellung als befriedigend erkannt. Ich füge sie hier öffentlich mit der Bemerkung bei, dass sie sehr füglich an die Stelle des 28. Satzes im XI. Buche der Elemente des Euclides gesetzt werden und so die Lücke ergänzen kann, welche in dem Beweise dieses wichtigen Lehrsatzes herrscht.

16. Es sei (Taf. III. Fig. 5.) *abcdefgh* das gegebene schiefe Parallelopipedum und *adhe* dessen Diagonalebene, so ist zu beweisen, dass das Prisma *acdheg* gleich sei dem Prisma *abdhfe*.

Man halbire *cg* in *l*, errichte *lm* in der Ebene *ch* und *li* in der Ebene *ce* lothrecht auf *cl* und ziehe *im*, so sind *cg*, *ae* und *dh* auf der Dreiecksebene *ilm* senkrecht (El. XI. 4. und 8.). Wird nun das schiefe Parallelopipedum *ah* durch das über *im* verlängerte Dreieck *lim* durchschnitten, so entspringt das Rechteck *likm*, worauf die vier Seitenflächen dieses Parallelopipedums lothrecht stehen (El. XI. 8.).

Nun verlängere man die *cg*, *ae*, *bf* und *dh* über *g*, *e*, *f* und *h*, so, dass $gp=cl$, $en=ai$, $fo=bk$ und $hq=dm$ ist, und ziehe die Verbindungslinien *pn*, *no*, *oq* und *qp*, so wird *noqp* ein Rechteck, welches dem Rechtecke *ikml* congruent ist (El. XI. 10. 4. und 5.). Auch sieht man leicht, dass nun ein senkrechtes Parallelopipedum *iq* entstanden ist, welches durch den Diagonalschnitt *imqn* in zwei congruente dreieckige Prismen *limqnp* und *ikmqon* getheilt werden kann, und dass der Körper *cadmil* dem Körper *gehqnp*, und der Körper *adbkmi* dem Körper *ehfoqn* vollkommen congruent ist.

Hieraus entstehen nun folgende Schlüsse:

Körper *acdilm* ≂ Körper *eghnpq*,
Körper *ilmegh* = Körper *ilmegh*,
Körper *acdegh* = Körper *ilmnpq*, d. h.
Prisma *acdegh* = Prisma *ilmnpq* No. I.

Desgleichen ist auch:

Körper *bdakmi* ≂ Körper *fheoqn*,
Körper *kmifhe* = Körper *kmifhe*,
Körper *bdafhe* = Körper *kmioqn*, d. h.
Prisma *bdafhe* = Prisma *kmioqn* No. II.

Da nun, nach dem Erwiesenen, Prisma *ilmnpq* = Prisma *kmioqn* ist, so muss auch (nach No. I. und II.) Prisma *acdegh* = Prisma *bdafhe* sein.

Wenn die auf den Seitenflächen des gegebenen schiefen Parallelopipedums lothrecht stehende Durchschnitts-Ebene *likm* mit *mk* in *hf* oder in die Grundfläche *eghf* eintreffen sollte, so darf

man nur das gegebene Parallelopipedum oberhalb *acdb* und unterhalb *eghf* um die Grösse der Seite *gc* ein- oder mehrmal verlängern, wo denn der nämliche Beweis geführt werden kann.

17. In Frankreich haben die Elemente des Euclides an Peyrard (Bibliothekar der polytechnischen Schule zu Paris) einen sehr thätigen Uebersetzer und geschickten Herausgeber gefunden. Seine Schrift führt den Titel: Les Élémens de Géométrie d'Euclide traduits littéralement, et suivis d'un Traité du Cercle, du Cylindre, du Cône et de la Sphère; de la mesure des Surfaces et des Solides; avec des Notes. Par F. Peyrard. A Paris. 1804. XV. und 576. S. 8. mit 8 Kupfertafeln. Sie enthält eine wohlgerathene wörtliche Uebersetzung der sechs ersten Bücher, nebst dem eilften und zwölften der Elemente. In dem Supplemente (S. 447—558) hat Peyrard die von Euclides nicht aufgenommenen Sätze vom Kreise, Cylinder, Kegel, von der Kugel, vom Ausmessen der Oberflächen und der Körper, nach den Grundsätzen des Archimedes, aber nach Euclides Methode abgehandelt. Die Noten endlich (S. 559—575) enthalten Erklärungen über einige dunkle Stellen der Elemente, und vorzüglich eine Kritik gegen Robert Simson in Bezug auf die X. Erklärung des XI. Buchs.

18. Diese Kritik betrifft fürs Erste eine Behauptung von Robert Simson: die X. Erklärung des XI. Buchs der Elemente sei nicht allgemein wahr, indem es in der That Körper gäbe, welche, obgleich von gleich vielen, gleich und ähnlichen Seitenflächen umschlossen, dennoch weder congruent, noch blos gleich an Körperraume seien. Diese Behauptung beweiset Robert Simson durch zwei Körper, welche entstehen, wenn man in der Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide einen willkührlichen Punkt annimmt, durch ihn ein beliebiges Loth in dem Innern der Pyramide darauf errichtet, dasselbe eben so weit zur andern Seite der Grundfläche verlängert, und nun von jedem Endpunkte dieser Lothe drei gerade Linien nach den drei Winkelpunkten der Grundfläche ziehet. Man sieht leicht, dass die sich hierdurch bildenden zwei Körper, von welchen der eine vier auswärtsgehende, der andere aber drei auswärts- und einen einwärtsgehenden Körperwinkel hat, von gleich vielen, gleich und ähnlichen Seitenflächen eingeschlossen werden, ohne dass solche weder an Grösse, noch an Gestalt übereinstimmen. Da nun dieses unwidersprechlich wahr ist, so müssen wir Robert Simson's Aeusserung als vollkommen begründet ansehen, und die X. Erklärung des XI. Buchs ist somit nicht bestimmt genug ausgedrückt. Peyrard sagt zwar: „Ist es nicht einleuchtend, dass Euclides nur von solchen Körpern sprach, welche keine einwärts gehende Winkel haben?" Allein hier ist nicht die Rede von dem Sinne, welchen Euclides mit seinen Worten verbunden haben mag, sondern von dem Sinne, welchen man mit klar ausgesprochnen Worten verbinden muss. Und darin hat Robert Simson offenbar Recht. Was sonst noch gegen diese X. Erklärung zu bemerken ist, wurde bereits oben (3.) auseinandergesetzt.

19. Fürs Zweite entgeht dem scharfsinnigen Peyrard das Unzulängliche in dem Beweise von Robert Simson nicht. Er

bemerkt mit Recht, dass der XVIII. und XL. Satz des XI. Buchs, so wie auch der III. und IV. Satz des XII. Buchs der Elemente nicht befriedigend dargethan sei, so lange die fragliche Behauptung nicht scharf erwiesen wäre.

20. Aber wie verhält sich Peyrard in dieser schwierigen Sache? Er stellt drei Lehrsätze auf, welche mit den von Robert Simson ausgesprochenen im Wesentlichen einerlei sind. Bei dem zweiten Lehrsatze bemerkt er auch richtig, dass sich die entsprechenden Körperwinkel nicht immer deckten, sondern bisweilen als symmetrische erschienen. Aber nun heisst es: „Hieraus schliesse ich, dass die Congruenz zweier Körperwinkel, welche von drei ebenen, einzeln genommen, gleichen Winkeln eingeschlossen sind, nicht Statt finde, wenn, nachdem man zwei gleiche ebene Winkel derselben in einander gelegt hat, ihre beiden andern Winkel nicht nach den nämlichen Seiten hin liegen. In diesem Falle muss man sich also begnügen, zu sagen, dass zwei Körperwinkel, deren jeder von drei ebenen Winkeln, welche paarweise einander gleich sind, gebildet wird, auch unter sich gleich sind, weil ihre bestimmenden Stücke, d. h. ihre ebenen Winkel und ihre Neigungen, gleiche Grösse haben."

21. Peyrard hat hierdurch wohl Robert Simsons Behauptung, dass sich die fraglichen Körperwinkel deckten, berichtiget; allein, dass er jene Körperwinkel gleiche nennt, welche nicht als congruent erscheinen, ist gegen die Natur der Sache, und selbst gegen den Sprachgebrauch, da solche Körperwinkel sehr wohl symmetrische heissen. Man soll nie von allgemein anerkannten Begriffsbestimmungen abweichen. Alle Geometer verstehen aber unter Gleichheit die Uebereinstimmung in der Grösse; unter Aehnlichkeit Uebereinstimmung in der Gestalt, und unter Congruenz die Uebereinstimmung in Grösse und Gestalt zugleich. Nach diesem ergiebt sich sogleich, dass die fraglichen Körperwinkel weder gleiche, noch ähnliche, noch congruente genannt werden dürfen. Sie sind nämlich zum Theil gleich, zum Theil ähnlich, und folglich nicht vollkommen übereinstimmend. Die Benennung: symmetrische Körperwinkel ist wohl die schicklichste. Wie durfte sie also Peyrard gleich nennen, da er sich selbst des Ausdrucks: symmetrische Körper bedienet?

22. Der dritte Lehrsatz von Peyrard ist wörtlich das Theorem von Robert Simson, welches behauptet, dass die zwei dreieckigen Prismen, welche aus dem Diagonalschnitte des schiefen Parallelopipedums entstehen, gleich und ähnlich seien, obschon sie nicht als congruent erscheinen. Hier, bemerkt er, muss man sich wieder begnügen, zu sagen, dass diese Körper deshalb gleich und ähnlich seien, weil ihre bestimmenden Stücke gegenseitig vollkommen gleich sind.

23. Zur Prüfung dieser Ansicht müssen wir unsere vorigen Aeusserungen (21) wiederholen. Es ist fürs Erste gegen den scharfen Sprachgebrauch, zwei Körper gleich und ähnlich zu nennen, welche doch nicht congruent sind, und wofür Peyrard selbst den Ausdruck: symmetrische Körper gebraucht. Aber fürs

Zweite kann noch weniger aus einer solchen Gleichheit und Aehnlichkeit die Uebereinstimmung in der Grösse beider Körper abgeleitet werden. Diese ist vielmehr gar nicht scharf bewiesen. Da Peyrard selbst (a. a. O. S. 564.) auf die, der Geometrie von Legendre beigefügten Noten verweiset (33 u. f.), so ist es um so auffallender, wie ein so strenger Geometer sich hier diesen Mangel an Schärfe erlauben konnte. Er hätte zum wenigsten die Beweise von Legendre (14) seinem Vortrage einverleiben sollen.

24. Da der Satz von der Gleichheit der zwei dreieckigen Prismen, welche durch den Diagonalschnitt eines schiefen Parallelopipedums entstehen, in den meisten Compendien der Elementargeometrie nur höchst unbefriedigend erwiesen wird, so ist es zweckmässig, hier noch den strengen Beweis eines ältern, jedem deutschen Geometer rühmlichst bekannten Schriftstellers, des gründlichen Karsten, beizubringen. Man mögte sich wundern, dass diese sinnreich ausgedachte Demonstration nicht häufiger in späteren Schriften aufgenommen worden ist; allein wahrscheinlich hat man sie nicht für elementar genug gehalten, um solche den ersten Anfängern mitzutheilen. In der That scheint sie auch der unserigen (16.) in dieser Hinsicht nachzustehen.

25. Um diesen Beweis von Karsten (Lehrbegriff der Mathematik, Geometrie, §. 343.) kennen zu lernen, theilen wir ihn hier in einer fasslicheren Form mit.

Wenn *AS* (Taf. III. Fig. 6.) das gegebene schiefe Parallelopipedum, *GCMQ* aber der Diagonalschnitt ist, und man legt durch die Mitte *E* und *O* der Grundflächen *AI* und *KS* die Ebene *HBLR* parallel mit *GAKQ*, und die Ebene *FDNP* parallel mit *ACMK*, so entstehen vier Parallelopipeden: *AO*, *FR*, *BN* und *ES*, welche unter sich congruent sind, und deren jedes $\frac{1}{4}$ des gegebenen ist. Zwei von diesen Parallelopipeden theilet der Diagonalschnitt *GCMQ* nicht; zwei andere aber werden durch ihn in zwei dreieckige Prismen getheilt. Jene sollen die äusseren, diese die mittleren Parallelopipeden, die aus letzten entstehenden dreieckigen Prismen aber die mittleren Prismen heissen.

Wird nun jedes der mittleren Parallelopipeden, wie das gegebene, in vier kleine Parallelopipeden getheilt, so entstehen in jedem wieder vier congruente Parallelopipeden, zwei mittlere und zwei äussere, deren jedes $\frac{1}{16}$ des gegebenen ist. Jedes dieser mittleren könnte nun wieder so getheilt werden, und man würde in jedem vier congruente Parallelopipeden erhalten, deren jedes $\frac{1}{64}$ des gegebenen wäre. Diese Theilung aber kann, wie man leicht sieht, ins Unendliche fortgesetzt werden.

Da nun bei jeder Theilung die Summe der äusseren Parallelopipeden die Hälfte des gegebenen beträgt, und somit von letzterem die Hälfte, von dieser Hälfte wiederum die Hälfte u. s. f. ohne Ende hinweggenommen werden kann, so muss der Unterschied zwischen der Summe aller äusseren Parallelopipeden und dem gegebenen einmal kleiner als jede angebliche Grösse werden (Elem. X. B. 1. S.). Allein der Unterschied der grösseren Prismen *GCS* und *GCK* kann nur in dem Unterschiede

aller mittleren Prismen liegen. Da nun diese mittleren Prismen selbst kleiner als jede angebliche Grösse werden können, so muss sich auch ihr Unterschied in dem Maasse verkleinern. Daher sind die grösseren Prismen *GCS* und *GCK* um einen Unterschied verschieden, der kleiner als jede angebliche Grösse ist, d. h. diese Prismen sind gleich.

26. Bei dem Durchdenken dieser sinnreichen Demonstration habe ich folgenden Beweis gefunden, welcher, wie es mir scheint, sich durch Kürze und Fasslichkeit empfehlen mögte.

I. Das dreieckige Prisma *GCS* (Taf. III. Fig. 6.) besteht aus einem äussern Parallelopipedum *ES*, welches $\frac{1}{4}$ des gegebenen *AS* ist, aus zwei äussern Parallelopipeden, welche zusammen $\frac{2}{16}$, d. h. $\frac{1}{8}$ von *AS*; aus vier äussern, welche zusammen $\frac{4}{64}$, d. h. $\frac{1}{16}$ von *AS*; aus acht äussern, welche zusammen $\frac{8}{256}$, d. h. $\frac{1}{32}$ von *AS* betragen, und so fort ohne Ende. Die Summe aller dieser äussern Prismen (sie heisse *S*) bildet also, in Bezug auf das Parallelopipedum $AS=1$, eine unendliche Reihe von der Form:

$$S = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{64} + \ldots$$

II. Aus der Arithmetik ist aber bekannt, dass, wenn *a* das erste Glied, *e* der Exponent und *S* die Summe einer unendlichen Reihe ausdrückt, der Werth von $S=\frac{a}{1-e}$ sei. Daher ist, für obige Reihe,

$$S=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\tfrac{1}{4}\times\tfrac{2}{1}=\tfrac{1}{2}.$$

III. Auf gleiche Weise ist aber auch die Summe aller äussern Parallelopipeden im dreieckigen Prisma $GCK=\frac{1}{2}AS$, weil sie mit der in II. gefundenen aus gleichvielen und gegenseitig gleichgrossen Gliedern besteht. Folglich ist Prisma $GCS=$ Prisma $GCK=\frac{1}{2}$Parallelopipedum *AS*.

27. *a.* Der hier (in 16.) gegebene directe Beweis des Lehrsatzes hat einen neuen indirecten veranlasst, welcher ebenfalls Fasslichkeit mit geometrischer Strenge vereinigt. Er ist folgender. Wenn (Taf. III. Fig. 7.) *ABCDEFGH* das gegebene schiefe Parallelopipedum und *BDHF* der Diagonalschnitt in demselben ist, so soll bewiesen werden, dass das schiefe dreieckige Prisma *ADBEHF* dem schiefen dreieckigen Prisma *BDCFHG* nicht ungleich an Grösse sein kann, ohne auf einen Widerspruch zu gelangen, welcher aus der Annahme dieser Ungleichheit hervorgehen müsste.

b. Man lege durch *AD* (wobei, der Einfachheit wegen, die Winkel *DAE* und *ADH* als rechte angenommen sind) eine Ebene, welche auf *BCGF* lothrecht steht, so bildet dieser Durchschnitt das Parallelogramm *ADKJ*, auf dessen Ebene die Seitenkanten *AE*, *DH*, *BF*, *CG* senkrecht sind. Wird nun ebenso durch *FG* eine Durchschnittsebene lothrecht auf *AEHD* gelegt, so entsteht ein Parallelogramm *FGML*, welches dem Parallelogramme *ADKJ* congruent ist und auf welchem die Kantenlinien *LA*, *MD*, *FB*,

GC ebenfalls senkrecht sind. Demnach bildet sich im Innern des schiefen Parallelopipedums *ABCDEFGH* ein senkrechtes Parallelopipedum *AJKDLFGM*, welches durch die Diagonalebene *DJFM* in die beiden vollkommen congruenten dreieckigen Prismen *ADJLMF* und *DJKMFG* getheilt wird, wie dieses aus Taf. III. Fig. 1. hervorgeht, indem das vordere dreieckige Prisma dergestalt in das hintere gestellt werden kann, dass beide nur ein einziges bilden.

c. Das schiefe dreieckige Prisma (Taf. III. Fig. 7.) *ADBEHF* besteht daher aus dem senkrechten Prisma *ADJLMF*, aus der dreiseitigen Pyramide, deren Grundfläche das Dreieck *ADJ* und deren Spitze in *B* ist, und aus der vierseitigen Pyramide, deren Grundfläche das Parallelogramm *LMHE* und deren Spitze in *F* liegt. — Ebenso besteht das schiefe dreieckige Prisma *BDCFHG* aus dem senkrechten Prisma *DJKMFG*, aus der viereckigen Pyramide, deren Grundfläche *BCKJ* und deren Spitze *D* ist, und aus der dreiseitigen Pyramide, deren Basis das Dreieck *FHG* und deren Spitze in *M* ist. Man überzeugt sich leicht, dass die ebengenannten beiden viereckigen, so wie auch die zwei dreiseitigen Pyramiden keine congruente, wohl aber symmetrische (8.) Körper seien.

d. Sollten nun diese beiden schiefen dreieckigen Prismen *ADBEHF* und *DBCHFG* (welche mit *P* und *Q* bezeichnet werden sollen) an Grösse verschieden sein, so kann dieser Unterschied (da beide die einander congruenten dreieckigen Prismen als Bestandtheil gemein haben) nur in der Verschiedenheit der Körpersummen *ADJB* + *LEHMF* und *FGHM* + *KCBJD* begründet sein.

e. Wäre nun (hypothetisch angenommen) $P > Q$, so setze man $P - Q = d$, und es ist klar, dass nunmehr $2P - 2Q = 2d$, $3P - 3Q = 3d$ und überhaupt $nP - nQ = nd$ sein müsste. Wenn aber gezeigt werden kann, dass bei $P - Q$, bei $2P - 2Q$, bei $3P - 3Q$, und, im Allgemeinen, bei $nP - nQ$ stets eine und dieselbige Differenz stattfinden müsste, wenn bei $P - Q$ irgend eine Differenz bestände, so ist dieses nur dadurch möglich, dass diese Differenz $= 0$ ist, d. h. dass $P = Q$ sein muss.

f. Denkt man sich die Seitenkanten *EA*, *FB*, *HD*, *GC* über *A*, *B*, *D*, *C* so verlängert, bis *Aa* (welche man in einer Zeichnung wirklich ziehen kann) $= EA$, $Bb = FB$, $Dd = HD$, $Cc = GC$ ist, verbindet die Endpunkte *a*, *b*, *d*, *c* durch vier gerade Linien und betrachtet den Diagonalschnitt *dbFH*, so ist klar, dass in dem schiefen Parallelopipedum *abcdEFGH* zwei schiefe dreieckige Prismen entstehen, von welchen *abdEFH* $= \frac{1}{2}$*ABDEFH* und *dbcHFG* $= \frac{1}{2}$*DBCHFG* ist. Wird nun durch *ad* eine mit *AJKD* parallele Ebene gelegt, so entsteht ein Viereck *aikd*, welches mit *abcd* einen Körper *abcdik* bestimmt, der dem Körper *ABCDJK* vollkommen congruent ist, und die oben (in *c.*) bemerkten Theile dieser Körper bilden den Ueberschuss der beiden grossen schiefen dreieckigen Prismen ($2P$ und $2Q$) über die zwei in ihrem Innern entstehenden congruenten dreieckigen Prismen. Bestände nun zwischen *P* und *Q* eine Differenz $= d$, so müsste hier bei $2P$ und $2Q$ eine Differenz $= 2d$ statt-

nden. Da aber auch bei nP und nQ (wie die fortgesetzte Construction der gleichvielfach grössern schiefen dreieckigen Prismen P und Q deutlich zeiget) diese Differenz zwischen P und Q nie grösser wird, so kann zwischen P und Q gar kein Unterschied bestehen, d. h. es muss $P=Q$ sein.

g. Wäre der Winkel ADH ein stumpfer, so würde durch D eine Ebene gelegt, auf welcher die vier Seitenkanten DH, AE, BF, CG lothrecht stehen, und der Beweis wäre der nämliche, wenn nun auch durch F eine Durchschnittsebene gelegt würde, worauf eben diese Kanten senkrecht sind.

h. Der allgemeine Satz, worauf sich dieser indirecte Beweis gründet, ist demnach folgender: Wenn zwei Grössen P und Q, von welchen man nicht weiss, ob sie einander gleich oder ungleich sind, gegeben werden, und man kann überzeugend beweisen, dass, wenn zwischen ihnen ein Unterschied stattfände, ebenderselbe auch bei ihren Doppelten, Dreifachen und überhaupt bei ihren $n$fachen stattfinden müsste, so muss nothwendig auch $P=Q$ sein.

i. In der früher erschienenen Abhandlung: Der 28. Satz des I. Buchs der Elemente des Euclides u. s. w. S. 4. mit einer Steintafel (40 Kr.), ist sowohl das Geschichtliche, als das Kritische dieses Satzes ausführlicher dargestellt worden.

IX.

Ueber zwei Kurven, die von der Ellipse abgeleitet sind. Berechnung der von denselben umschlossenen Fläche.

Von dem
Herrn Doctor J. Dienger,
Lehrer an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

§. 1.

Sei

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a > b$$

die Gleichung einer Ellipse, (x', y') ein Punkt derselben. Auf diesen Punkt ziehe man vom Mittelpunkte einen Radius vector und verlängere diesen um die Grösse h. Die Gleichung des Rad. vect. ist $y = \frac{y'}{x'}x$, und die Koordinaten des Endpunktes (des verlängerten Rad. v.): $x' + \frac{hx'}{r'}$, $y' + \frac{hy'}{r'}$, wo $r' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$. In diesem Endpunkte errichte man eine Senkrechte auf den Rad. v., so ist die Gleichung dieser Linie:

$$y - \left(y' + \frac{hy'}{r'}\right) = -\frac{x'}{y'}\left(x - x' - \frac{hx'}{r'}\right). \qquad (1)$$

Das, was bisher mit einem einzigen Rad. vect. vorgenommen wurde, nehme man mit allen vor, und suche sodann die Gleichung der Kurve, die von allen den auf den verschiedenen Rad. vect. senkrecht stehenden Geraden berührt wird. Zu diesem Ende muss man die Gleichung (1), welche auch so dargestellt werden kann:

$$yy' + xx' = x'^2 + y'^2 + h\sqrt{x'^2 + y'^2}, \qquad (1)$$

nach x' differenziren, indem man y' als Funktion von x', bedingt durch die Gleichung

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1, \qquad (2)$$

ansieht, und zwischen der erhaltenen Differenzialgleichung und der Gleichung (1), x' und y' eliminiren. Nun giebt (1):

$$y\frac{\partial y'}{\partial x'}+x=2x'+2y'\frac{\partial y'}{\partial x'}+\frac{h\left(x'+y'\frac{\partial y'}{\partial x'}\right)}{\sqrt{x'^2+y'^2}},$$

während aus (2) folgt:

$$\frac{\partial y'}{\partial x'}=-\frac{b^2x'}{a^2y'}.$$

Setzt man diesen Werth in (3), so erhält man:

$$a^2y'x-b^2x'y=2(a^2-b^2)x'y'+h(a^2-b^2)\frac{x'y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}. \quad (4)$$

Eliminirt man nun aus (1), (2), (4) die Grössen x', y', so erhält man die Gleichung der gesuchten Kurve.

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} x&=\frac{2a^2y'^2+b^2x'^2-b^2y'^2}{a^2y'^2+b^2x'^2}x'+\frac{hx'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}, \\ y&=\frac{(2b^2x'^2+a^2y'^2-a^2x'^2)}{a^2y'^2+b^2x'^2}y'+\frac{hy'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Diese Gleichungen geben für jeden Punkt (x', y') der Ellipse den entsprechenden Punkt der gesuchten Kurve an.

Man setze in (5) $x'=a\cos\varphi$, $y'=b\sin\varphi$, so genügen x', y' der Gleichung (2), während φ ein Winkel ist, der in dem Punkte 0 ist, in welchem die Axe der x die Ellipse schneidet; durch diese Substitution findet sich:

$$\begin{aligned} x&=(1+e^2\sin^2\varphi)\,a\cos\varphi+\frac{h\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}, \\ y&=\frac{b^2-a^2e^2\cos^2\varphi}{b}\sin\varphi+\frac{bh\sin\varphi}{a\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}, \end{aligned} \quad (6)$$

wenn $e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}$. Die Gleichungen (6), wenn man in ihnen φ von 0 bis 2π gehen lässt, drücken die gesuchte Kurve aus. Durch Elimination von φ zwischen ihnen erhielte man die Gleichung derselben in gewöhnlichen rechtwinklichen Koordinaten. Für den Fall $h=0$ erhält man als gesuchte Gleichung (siehe Crelle's Journal. Bd. 33. S. 90 ff.):

$$[6a^2b^2-2(2b^2-a^2)(2a^2-b^2)-3(a^2x^2+b^2y^2)]^3=$$
$$[9a^2(2b^2-a^2)x^2+9b^2(2a^2-b^2)y^2-4(a^2+b^2)(2b^2-a^2)(2a^2-b^2)]^2.$$

In unserm Falle würde die Endgleichung offenbar noch verwickelter ausfallen; da es aber für den Zweck, der hier verfolgt wird, nicht nöthig ist, dieselbe zu haben, so begnügen wir uns mit den Gleichungen (6).

Die gesuchte Kurve besteht offenbar aus vier kongruenten Theilen, von $\varphi=0$ bis $\frac{\pi}{2}$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$ bis π, $\varphi=\pi$ bis $\frac{3\pi}{2}$, $\varphi=\frac{3\pi}{2}$ bis 2π. Der erste dieser Quadranten ist von den positiven Theilen der Axen der x und y begränzt: er beginnt an der Axe der x. Suchen wir nun die Fläche zwischen der Axe der x, der Kurve und der Ordinate y. Da die Ordinate y den Quadranten in zwei Theile theilt, so muss noch bemerkt werden, dass derjenige dieser beiden Theile gemeint ist, der vom Mittelpunkte entfernter ist.

Die Formel für die Quadrirung ist $\pm\int y dx$, je nachdem x mit wachsender Fläche zu- oder abnimmt. In unserm Falle ist das untere Zeichen anzuwenden. Da aber x und y als Funktionen von φ gegeben sind, so ist der Ausdruck für die gesuchte Fläche

$$-\int_0^\varphi y \frac{\partial x}{\partial \varphi}\, \partial\varphi.$$

Setzt man hier die obigen Werthe (6) von x und y, so erhält man als Ausdruck des gesuchten Flächenstücks:

$$ab\int_0^\varphi \sin^2\varphi\,\partial\varphi - \frac{a^3 e^2}{b}\int_0^\varphi \sin^2\varphi\cos^2\varphi\,\partial\varphi$$
$$+ 2abe^2\int_0^\varphi \sin^2\varphi\cos^2\varphi\,\partial\varphi + abe^2\int_0^\varphi \sin^4\varphi\,\partial\varphi$$
$$+\frac{2a^3e^4}{b}\int_0^\varphi \sin^2\varphi\cos^4\varphi\,\partial\varphi$$
$$-\frac{a^3e^4}{b}\int_0^\varphi \sin^4\varphi\cos^2\varphi\,\partial\varphi + \frac{hb^3}{a^2}\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}}$$
$$-hbe^2\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,\partial\varphi}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}} + hb\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)}}$$
$$-2bhe^2\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,\partial\varphi}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)}}$$
$$+bhe^2\int_0^\varphi \frac{\sin^4\varphi\,\partial\varphi}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)}} + \frac{h^2b^3}{a^3}\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^4}}.$$

Nun ist aber:

$$\int_0^\varphi \sin^2\varphi\,\partial\varphi = -\tfrac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi + \tfrac{1}{2}\varphi,$$

$$\int_0^\varphi \sin^2\varphi\cos^2\varphi\,\partial\varphi = \tfrac{1}{4}\sin^3\varphi\cos\varphi - \tfrac{1}{8}\sin\varphi\cos\varphi + \tfrac{1}{8}\varphi,$$

$$\int_0^\varphi \sin^4\varphi\,\partial\varphi = -\tfrac{1}{4}\sin^3\varphi\cos\varphi - \tfrac{3}{8}\sin\varphi\cos\varphi + \tfrac{3}{8}\varphi,$$

$$\int_0^\varphi \sin^2\varphi\cos^4\varphi\,\partial\varphi = \tfrac{1}{6}\sin^3\varphi\cos^3\varphi + \tfrac{1}{8}\sin^3\varphi\cos\varphi - \tfrac{1}{16}\sin\varphi\cos\varphi$$
$$+\tfrac{1}{16}\varphi,$$

$$\int_0^\varphi \sin^4\varphi\cos^2\varphi\partial\varphi = \tfrac{1}{6}\sin^5\varphi\cos\varphi - \tfrac{1}{24}\sin^3\varphi\cos\varphi - \tfrac{1}{16}\sin\varphi\cos\varphi + \tfrac{1}{16}\varphi,$$

$$\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}} = \frac{E(\varphi,e)}{1-e^2} - \frac{e^2\sin\varphi\cos\varphi}{(1-e^2)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

$$-\frac{F(\varphi,e)-E(\varphi,e)}{e^2} - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},$$

$$\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,\partial\varphi}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}} = \frac{E(\varphi,e)}{1-e^2} - \frac{e^2\sin\varphi\cos\varphi}{(1-e^2)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

$$+\frac{(2-e^2)E(\varphi,e)}{e^4} + 2\frac{(1-e^2)F(\varphi,e)}{e^4} + \frac{(1-e^2)\sin\varphi\cos\varphi}{e^2\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},$$

$$\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = \frac{F(\varphi,e)-E(\varphi,e)}{e^2},$$

$$\int_0^\varphi \frac{\sin^4\varphi\,\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = \frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\sin\varphi\cos\varphi}{3e^2} - \frac{2(1+e^2)E(\varphi,e)}{3e^4}$$

$$+\frac{(2+e^2)F(\varphi,e)}{3e^4},$$

$$\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = \frac{(2-e^2)E(\varphi,e)}{3e^4} - \frac{2(1-e^2)F(\varphi,e)}{3e^4}$$

$$-\frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\sin\varphi\cos\varphi}{3e^2};$$

wenn

$$E(\varphi,e) = \int_0^\varphi \sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\,\partial\varphi,\quad F(\varphi,e) = \int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}.$$

Ferner ist

$$\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{1-e^2\sin^2\varphi} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\operatorname{arc}(\operatorname{tg} = \sqrt{1-e^2}.\operatorname{tg}\varphi).$$

Differenzirt man diese Gleichung nach e, und theilt beiderseits durch $2e$, so ergiebt sich

$$\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)^2} = \frac{1}{2\sqrt{(1-e^2)^3}}\operatorname{arc}(\operatorname{tg} = \sqrt{1-e^2}.\operatorname{tg}\varphi)$$

$$-\frac{1}{2(1-e^2)}\cdot\frac{\operatorname{tg}\varphi}{1+(1-e^2)\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{1}{2\sqrt{(1-e^2)^3}}\operatorname{arc}(\operatorname{tg} = \sqrt{1-e^2}.\operatorname{tg}\varphi)$$

$$-\frac{1}{2(1-e^2)}\cdot\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{1-e^2\sin^2\varphi}.$$

Setzt man diese Werthe, so erhält man das fragliche Flächenstück.

Um den Quadranten zu erhalten, muss man $\varphi = \frac{\pi}{2}$ setzen. Derselbe ist also:

$$ab\frac{\pi}{4}-\frac{a^3e^2}{b}\frac{\pi}{16}-2abe^2\frac{\pi}{16}+3abe^2\frac{\pi}{16}+\frac{a^3e^4}{b}\frac{\pi}{16}-\frac{a^3e^4}{b}\frac{\pi}{32}$$

$$+\frac{hb^3}{a^2}\left\{\frac{E(\frac{\pi}{2},e)}{1-e^2}-\frac{F(\frac{\pi}{2},e)-E(\frac{\pi}{2},e)}{e^2}\right\}$$

$$-hbe^2\left\{\frac{E(\frac{\pi}{2},e)}{1-e^2}-\frac{(2-e^2)E(\frac{\pi}{2},e)}{e^4}+\frac{2(1-e^2)F(\frac{\pi}{2},e)}{e^4}\right\}$$

$$+hb\left\{\frac{F(\frac{\pi}{2},e)-E(\frac{\pi}{2},e)}{e^2}\right\}$$

$$-2bhe^2\left\{\frac{(2-e^2)E(\frac{\pi}{2},e)}{3e^4}-\frac{2(1-e^2)F(\frac{\pi}{2},e)}{3e^4}\right\}$$

$$+bhe^2\left\{\frac{2(1+e^2)F(\frac{\pi}{2},e)}{3e^4}-\frac{2(1+e^2)E(\frac{\pi}{2},e)}{3e^4}\right\}+\frac{h^2b^3}{a^3}\left\{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(1-e^2)^3}}\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$=\frac{\pi}{32ab}(10a^2b^2-a^4-b^4)-\frac{a^2h}{b}E(\frac{\pi}{2},e)+2hbF(\frac{\pi}{2},e)+\frac{h^2\pi}{4}.$$

Mithin der ganze, von der fraglichen Kurve umschlossene Raum:

$$\frac{\pi}{8}\left(\frac{10a^2b^2-a^4-b^4}{ab}\right)-4\frac{a^2h}{b}E(\frac{\pi}{2},e)+8hbF(\frac{\pi}{2},e)+h^2\pi. \quad (7)$$

(Ueber die Herleitung obiger Ausdrücke sehe man u. A. Crelle's Journal. Bd. 31. S. 25 ff.)

§. 2.

Sei wieder

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ a>b$$

die Gleichung einer Ellipse, (x', y') ein Punkt derselben. Die Gleichung des Radius vector in diesem Punkte ist $y=\frac{y'}{x'}x$, und die Gleichung der auf seinem Endpunkte Senkrechten: $yy'+xx'=x'^2+y'^2$. Die Gleichung der Normale im Punkte (x', y') ist: $\frac{x'}{a^2}(y-y')=\frac{y'}{b^2}(x-x')$, die Gleichung der mit der Normale parallelen, durch den Mittelpunkt gehenden Geraden also $\frac{y'}{b^2}x=\frac{x'}{a^2}y$. Heissen nun x, y die Koordinaten des Punktes, in dem diese letztere Gerade die so eben erwähnte Senkrechte trifft, so ist

$$x=\frac{x'(x'^2+y'^2)}{a^2},\ y=\frac{y'(x'^2+y'^2)}{b^2}.$$

Setzt man nun $x'=r'\cos\varphi'$, $y'=r'\sin\varphi'$, so dass

$$r'^2\left(\frac{\cos^2\varphi'}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi'}{b^2}\right)=1,$$

und eliminirt aus den drei letzten Gleichungen r', φ', so erhält man

$$(a^2x^2+b^2y^2)^3=(a^4x^2+b^4y^2)^2 \qquad (8)$$

als Gleichung der durch alle jene Fusspunkte gehenden Kurve.

Man ziehe in einen Punkt (x', y') dieser Kurve (8) einen Radiusvector, und verlängere denselben um die Grösse h, so sind die Koordinaten seines Endpunktes

$$x=x'+\frac{hx'}{\sqrt{x'^2+y'^2}},\ y=y'+\frac{hy'}{\sqrt{x'^2+y^2}}.$$

Man suche nun die Gleichung der Kurve, die durch die Endpunkte aller so verlängerten Radien geht. Setzt man $x'=r\cos\varphi$, $y'=r\sin\varphi$, so hat man r, φ zu eliminiren aus

$$x=r\cos\varphi+h\cos\varphi=(r+h)\cos\varphi,$$

$$y=r\sin\varphi+h\sin\varphi=(r+h)\sin\varphi,$$

$$r^2(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)^3=(a^4\cos^2\varphi+b^4\sin^2\varphi)^2.$$

Hieraus folgt $(r+h)^2=x^2+y^2$, $r=\sqrt{x^2+y^2}-h$,

$$\cos^2\varphi=\frac{x^2}{(r+h)^2}=\frac{x^2}{x^2+y^2},\ \sin^2\varphi=\frac{y^2}{(r+h)^2}=\frac{y^2}{x^2+y^2}.$$

Demnach erhält man als Gleichung der fraglichen neuen Kurve:

$$(\sqrt{x^2+y^2}-h)^2(a^2x^2+b^2y^2)^3=(a^4x^2+b^4y^2)^2(x^2+y^2), \qquad (9)$$

welche Gleichung für $h=0$ in (8) übergeht.

Diese Kurve besteht aus vier kongruenten Theilen, so dass die Betrachtung eines Quadranten genügt. Man setze in (9) $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$, so ist

$$(r-h)^2(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)^3=(a^4\cos^2\varphi+b^4\sin^2\varphi)^2,$$

$$r=h+\frac{a^4\cos^2\varphi+b^4\sin^2\varphi}{(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}.$$

Für den Flächeninhalt des Quadranten findet sich:

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \partial\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(h^2 + 2h\,\frac{a^4\cos^2\varphi + b^4\sin^2\varphi}{(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} + \frac{(a^4\cos^2\varphi + b^4\sin^2\varphi)^2}{(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)^3}\right)\partial\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\left\{h^2\frac{\pi}{2} + 2h\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^4\cos^2\varphi + b^4\sin^2\varphi}{(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(a^4\cos^2\varphi + b^4\sin^2\varphi)^2}{(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)^3}\,\partial\varphi.\right\}$$

Setzt man $\frac{a^2-b^2}{a^2} = e^2$, so ist $a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi = a^2(1-e^2\sin^2\varphi)$, demnach

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi\,\partial\varphi}{(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi\,\partial\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{1}{a^3}\left\{\frac{F(\frac{\pi}{2}, e) - E(\frac{\pi}{2}, e)}{e^2}\right\},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{E(\frac{\pi}{2}, e)}{a^3(1-e^2)} - \frac{F(\frac{\pi}{2}, e) - E(\frac{\pi}{2}, e)}{a^3 e^2}.$$

Ferner ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\varphi}{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{ab}.$$

Differenzirt man diese Gleichung nach a und theilt alsdan durch $-2a$, so findet sich

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi\,\partial\varphi}{(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)^2} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2a^3b} = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{a^3b}.$$

Differenzirt man abermals nach a und dividirt durch $-4a$, so ergiebt sich:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4\varphi\,\partial\varphi}{(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)^3} = \frac{\pi}{16}\cdot\frac{3}{a^5b}.$$

Durch ähnliche Verfahrungsweisen ergiebt sich:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)^3} = \frac{\pi}{16}\cdot\frac{1}{a^3b^3}.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4\varphi\partial\varphi}{(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)^3} = \frac{\pi}{16}\cdot\frac{3}{ab^5}.$$

Substituirt man diese Werthe, so ergiebt sich für den Quadranten:

$$\frac{1}{2}\left\{h^2\frac{\pi}{2}+2ha\left(\frac{F(\frac{\pi}{2},e)-E(\frac{\pi}{2},e)}{e^2}\right)\right.$$
$$+\frac{2hb^4}{a^3}\left(\frac{E(\frac{\pi}{2},e)}{1-e^2}-\frac{F(\frac{\pi}{2},e)-E(\frac{\pi}{2},e)}{e^2}\right)$$
$$\left.+\frac{\pi}{16}\frac{3a^3}{b}+\frac{2\pi}{16}ab+\frac{\pi}{16}\frac{3b^3}{a}\right\}$$
$$=\frac{\pi}{32}\left[\frac{3(a^4+b^4)+2a^2b^2}{ab}\right]$$
$$+\frac{h(a^2+b^2)}{a}F(\frac{\pi}{2},e)-ah\,E(\frac{\pi}{2},e)+h^2\frac{\pi}{4}.$$

Die ganze, von der fraglichen Kurve umschlossene Fläche ist

$$\frac{\pi}{8}\left[\frac{3(a^4+b^4)+2a^2b^2}{ab}\right]+4\frac{h(a^2+b^2)}{a}F(\frac{\pi}{2},e)$$
$$-4ah\,E(\frac{\pi}{2},e)+h^2\pi. \qquad (10)$$

Für $h=0$ erhält man hieraus

$$\frac{\pi}{8}\left[\frac{3(a^4+b^4)+2a^2b^2}{ab}\right], \qquad (10')$$

ls Werth des von der Kurve (8) umschlossenen Raumes.

Für $a=b$ geht die Kurve (9) in einen Kreis vom Halbmesser $+h$ über.

X.

Ueber einige Sätze der höheren Arithmetik.

Von

Herrn Wilhelm Mösta,

Lehramts - Candidaten zu Cassel.

Es muss gewiss einem jeden Freunde der Zahlenlehre eine erfreuliche Erscheinung sein, wenn in neuerer Zeit immer mehr ein Band zwischen den vereinzelten Lehren der höhern Arithmetik und den übrigen Branchen der Mathematik geknüpft wird; umsomehr, da auf viele der hierher gehörigen Probleme ihrer Natur nach insbesondere von den Annäherungsmethoden der Analysis gar leicht Anwendung gemacht werden kann. In dieser Beziehung haben die Forschungen des Herrn **Libri** (Mémoires de l'Académie de sciences, savans étrangers, Tom. V.) Vortreffliches geleistet, indem durch sie die Lösung der Congruenzen von beliebigen Graden aus einem allgemeinen Princip hergeleitet, so wie die der vom 1. und 2. Grade durch Formeln gegeben werden, deren Werth sich in jedem besondern Falle durch Hülfe der Analysis ermitteln lässt. Hiernach schien es mir vielleicht der Mühe werth, die von Herrn **Eisenstein** (**Crelle Journal für reine und angewandte Mathematik**. Bd. 27. pag. 281.) aufgestellten Sätze, von denen meines Wissens noch keine Beweise gegeben sind, auf die obige Auflösungsmethode der Congruenzen zurückzuführen.

Ich schicke die folgenden bekannten Sätze voraus.

Ist n eine Primzahl, so sind sämmtliche Wurzeln der Gleichung

$$x^n - 1 = 0$$

gegeben durch:

$$\cos k \frac{2\pi}{n} + \sqrt{-1} \sin k \frac{2\pi}{n},$$

wo k alle Werthe $0, 1, 2, \ldots, n-1$ durchläuft.

Bildet man die Summe der m-Potenzen dieser Wurzeln, so wird dieselbe $=n$ oder $=0$, jenachdem m ein Vielfaches von n ist, oder nicht; d. h. mit anderen Worten, es ist:

$$\frac{1}{n}\Big\{(\cos 0\frac{2\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin 0\frac{2\pi}{n})^m+(\cos\frac{2\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{n})^m+\ldots$$
$$+(\cos(n-1)\frac{2\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin(n-1)\frac{2\pi}{n})^m\Big\}$$
$$=1 \text{ oder } =0.$$

Diese Eigenschaft der Wurzeln obiger Gleichung hat nun Herr **Libri** zur Bestimmung der Wurzeln der Congruenz

$$\varphi(x,y,z\ldots)\equiv 0 \pmod n$$

benutzt.

Betrachtet man nämlich für

x die Werthe 1, 2, 3 ... a;
y „ „ 1, 2, 3 ... b;
z „ „ 1, 2, 3 ... c;

so hat man nach dem Vorhergehenden unmittelbar für die Summe der Wurzeln der vorgelegten Congruenz den Ausdruck:

$$\frac{1}{n}\Sigma(x,\ y,\ z\ldots.)\Big\{\cos 0\frac{2\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin 0\frac{2\pi}{n})^{\varphi(x,y,z\ldots.)}$$
$$+(\cos\frac{2\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{n})^{\varphi(x,y,z\ldots.)}+\ldots.$$
$$+(\cos(n-1)\frac{2\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin(n-1)\frac{2\pi}{n})^{\varphi(x,y,z\ldots.)}\Big\}$$
$$=\frac{1}{n}\Sigma(x,\ y,\ z\ldots.)(\cos\theta\frac{2\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\theta\frac{2\pi}{n})^{\varphi(x,y,z\ldots.)},$$

wo sich das Summenzeichen über die für x, y, z.... aufgestellten Werthe und über die Werthe $\theta=0$, 1, 2...., $n-1$ erstreckt.

Reducirt sich die vorgelegte Congruenz auf eine solche vom ersten Grade mit einer Unbekannten, deren allgemeine Form

$$ax+b\equiv 0 \pmod n,$$

so ist die Summe ihrer Wurzeln, wenn man noch berücksichtigt, dass es zur Auffindung aller Wurzeln der Congruenz genügt, für x die Werthe:

$$1,\ 2,\ 3\ldots.n$$

zu betrachten, und man die Potenzen der Sinus und Cosinus in vielfache Bögen verwandelt, gegeben durch

$$\frac{1}{n}\sum_{x=1}^{x=n}\sum_{\theta=0}^{\theta=n-1} x\left\{\cos\theta(ax+b)\frac{2\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\theta(ax+b)\frac{2\pi}{n}\right\}$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{x=1}^{x=n}\sum_{\theta=0}^{\theta=n-1} x\cos\theta(ax+b)\frac{2\pi}{n}.$$

Nun ist aber:

$$\sum_{x=1}^{x=n} x\cos\theta(ax+b)\frac{2\pi}{n}$$
$$=\frac{(n-1)\sin 2\theta(an+b-\tfrac{1}{2})\frac{\pi}{n}+\sin 2\theta(b-\tfrac{1}{2}a)\frac{\pi}{n}}{2\sin\theta\frac{a\pi}{n}}$$
$$+\frac{\cos 2\theta\left(\frac{an+b-a}{n}\right)\pi-\cos 2\theta(b-a)\frac{\pi}{n}}{\left(2\sin\theta\frac{a\pi}{n}\right)^2}$$
$$=\frac{n\sin\theta(b-\tfrac{1}{2}a)\frac{2\pi}{n}}{2\sin\theta\frac{a\pi}{n}};$$

daher ist die Summe der Wurzeln obiger Congruenz

$$=\frac{1}{n}\sum_{x=1}^{x=n}\sum_{\theta=0}^{\theta=n-1} x\cos\theta(ax+b)\frac{2\pi}{n}=\frac{1}{2}\sum_{\theta=0}^{\theta=n-1}\frac{\sin\theta(b-\tfrac{1}{2}a)\frac{2\pi}{n}}{\sin\theta\frac{a\pi}{n}}$$

$$=\frac{n-1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{\theta=0}^{\theta=n-1}\frac{\sin\theta(b-\tfrac{1}{2}a)\frac{2\pi}{n}}{\sin\theta\frac{a\pi}{n}}.$$

Sind a und n relative Primzahlen, so hat bekanntlich die Congruenz $ax+b\equiv 0 \pmod{n}$ nur eine positive Wurzel, kleiner als n, und man hat desshalb für diese den Ausdruck

$$\frac{n-1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{\theta=1}^{\theta=n-1}\frac{\sin\theta(b-\tfrac{1}{2}a)\frac{2\pi}{n}}{\sin\theta\frac{a\pi}{n}}.$$

Versteht man nun unter $G(\Omega)$ die nächst kleinere ganze Zahl als Ω, so wollen wir jetzt $G\left(\frac{M}{N}\right)$, wo M und N relative Primzahlen sind, zu bestimmen suchen.

Ist der bei der Division der Zahl M durch N bleibende Rest $=x$, so wird $G\left(\frac{M}{N}\right)$ sofort bekannt sein, wenn x bekannt ist. Zur Bestimmung des Werthes von x hat man aber nur die kleinste Auflösung der Congruenz

$$M-x\equiv 0 \pmod N$$

zu suchen., Diese ist aber nach der obigen Formel

$$\frac{N-1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{\theta=1}^{\theta=N-1}\frac{\sin\theta(M+\frac{1}{2})\frac{2\pi}{N}}{\sin\theta\left(-\frac{\pi}{N}\right)}$$

$$=\frac{N-1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{\theta=1}^{\theta=N-1}\frac{\sin\theta(M+\frac{1}{2})\frac{2\pi}{N}}{\sin\theta\frac{\pi}{N}},$$

oder, da

$$\frac{\sin\theta(M+\frac{1}{2})\frac{2\pi}{N}}{\sin\theta\frac{\pi}{N}}=\sin\theta\frac{2M\pi}{N}\cot\theta\frac{\pi}{N}+\cos\theta\frac{2M\pi}{N}$$

und

$$\sum_{\theta=1}^{\theta=N-1}\cos\theta\frac{2M\pi}{N}=-1,$$

auch:

$$\frac{N}{2}-\frac{1}{2}\sum_{\theta=1}^{\theta=N-1}\sin\theta\frac{2M\pi}{N}\cot\theta\frac{\pi}{N}. \qquad (I)$$

Alsdann ergibt sich aber unmittelbar aus der Congruenz

$$M-x\equiv 0 \pmod N$$

(II)

$$G\left(\frac{M}{N}\right)=\frac{M-x}{N}=\frac{M}{N}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2N}\sum_{\theta=1}^{\theta=N-1}\sin\theta\frac{2M\pi}{N}\cot\theta\frac{\pi}{N}.$$

Die Formel I. stellt den kleinsten Rest von M für den Modulus N vor und I. und II. bilden die beiden ersten am angeführten Orte aufgestellten Sätze.

Ich füge noch folgende Bemerkung bei.

Sind M und N relative Primzahlen und überdies N eine ungerade Zahl, so genügt, die Summe zwischen den Grenzen $\theta=1$

und $\theta = \frac{N+1}{2}$ zu nehmen. Denn da sämmtliche Zahlen M, $2M$, $3M \ldots$, $(N-1)\,M$ nach dem Modulus N ungleiche Reste lassen und

$$\frac{N+1}{2} \equiv -\frac{N-1}{2} (\mathrm{mod}\, N)\,,$$

so bleibt das Product der beiden Functionen unter dem Summenzeichen durch Einführung der negativen Werthe von θ ungeändert, und man hat desshalb auch für den kleinsten Rest von M für den Mod. N den Ausdruck

$$\frac{N}{2} - \sum_{\theta=1}^{\theta=\frac{N-1}{2}} \sin\theta \frac{2M\pi}{N} \cot\theta \frac{\pi}{N},$$

und damit auch

$$G\left(\frac{M}{N}\right) = \frac{M}{N} - \frac{1}{2} + \frac{1}{N} \sum_{\theta=1}^{\theta=\frac{N-1}{2}} \sin\theta \frac{2M\pi}{N} \cot\theta \frac{\pi}{N}.$$

Wir wollen uns jetzt die Aufgabe stellen:

$$\sum_{k=1}^{k=v} G\left(k \frac{M}{N}\right)$$

zu entwickeln, wobei wir wieder M und N als relative Primzahlen voraussetzen.

Zunächst ist klar, dass man für die kleinste Wurzel der Congruenz

$$v \,.\, M - x \equiv 0 \;(\mathrm{mod}\, N),\ \text{wo}\ v < N$$

nach dem Obigen erhält:

$$\frac{N}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=N-1} \sin \frac{2vMk\pi}{N} \cot k \frac{\pi}{N}.$$

Setzt man für v nach einander die Werthe:

$$1,\ 2,\ 3 \ldots v;$$

so wird man durch Summation dieser verschiedenen Werthe die Summe der kleinsten Reste erhalten, welche durch Division der Zahlen M, $2M$, $3M \ldots vM$ durch N hervorgehen. Bezeichnen wir diese Summe durch S, so ist:

$$S = v \,.\, \frac{N}{2} - \frac{1}{2} \sum_{\sigma=1}^{\sigma=v} \sum_{k=1}^{k=N-1} \sin k\sigma \frac{2M\pi}{N} \cot k \frac{\pi}{N}.$$

Diese Reste sind sämmtlich von einander verschieden, und wenn $v = N-1$, so fallen selbige mit den Zahlen 1, 2, 3,...., $N-1$, ohne

Rücksicht auf ihre Stellung, zusammen. Wenn wir desshalb die Zahlen M und N als relative Primzahlen und N zugleich als eine ungerade Zahl voraussetzen, so ist die Summe nur von $\sigma=1$ bis $\sigma=\frac{N-1}{2}$ zu nehmen, um die Summe aller von einander verschiedenen Reste zu erhalten, so dass

$$S=(N-1)\frac{N}{2}-\frac{1}{2}\sum_{\sigma=1}^{\sigma=\frac{N-1}{2}}\sum_{k=1}^{k=N-1}\sin k\sigma\frac{2M\pi}{N}\cot k\frac{\pi}{N}.$$

Die angezeigte Summation nach σ lässt sich jetzt nach dem Princip der doppelten Summation ausführen; denn es ist:

$$S=(N-1)\frac{N}{2}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=N-1}\cot k\frac{\pi}{N}\left\{\frac{1}{2}\cot k\frac{M\pi}{N}-\frac{\cos Mk\pi}{2\sin\frac{Mk\pi}{N}}\right\}.$$

Ist nun M eine gerade Zahl, so ist für alle Werthe von k, $\cos Mk\pi=1$, und wenn man noch bedenkt, dass allgemein

$$\operatorname{cosec} x=\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\cot x,$$

so ergibt sich:

$$S=\frac{N-1}{2}N+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{k=N-1}\cot k\frac{\pi}{N}\operatorname{tg}k\frac{M\pi}{2N}.$$

Hiernach ergibt sich aber unmittelbar

$$\sum_{k=1}^{k=\frac{N-1}{2}}G\left(k\frac{M}{N}\right)=\frac{N+1}{2}\frac{N-1}{4}\frac{M}{N}-\frac{S}{N}$$

$$=\frac{N^2-1}{8}\frac{M}{N}-\frac{N-1}{2}-\frac{1}{4N}\sum_{k=1}^{k=N-1}\cos k\frac{\pi}{N}\operatorname{tg}k\frac{M\pi}{2N}.$$

Ist aber M eine ungerade Zahl, so zerlegen wir den Ausdruck unter dem Summenzeichen so, dass

$$\sum_{k=1}^{k=N-1}\cos k\frac{\pi}{N}\left\{\cot k\frac{M\pi}{N}-\frac{\cos Mk\pi}{\sin k\frac{M\pi}{N}}\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{k=\frac{N-1}{2}}\cot k\frac{2\pi}{N}\left\{\cot k\frac{2M\pi}{N}-\frac{\cos 2Mk\pi}{\sin k\frac{2M\pi}{N}}\right\}$$

$$+\sum_{k=1}^{k=\frac{N-1}{2}}\cot(2k-1)\frac{\pi}{N}\left\{\cot(2k-1)\frac{M\pi}{N}-\frac{\cos(2k-1)M\pi}{\sin(2k-1)\frac{M\pi}{N}}\right\}.$$

Unter dieser Form erkennt man sofort, dass der Werth des Cosinus im ersten Gliede der rechten Seite für jeden Werth von k, $= +1$ wird, dagegen im zweiten Gliede $= -1$. Da nun allgemein

$$\operatorname{cosec} x = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \cot x = \cot\frac{x}{2} - \cot x,$$

so ergibt sich nach einer einfachen Reduction:

$$\sum_{k=1}^{k=N-1} \cot k\frac{\pi}{N}\left\{\cot k\frac{M\pi}{N} - \frac{\cos Mk\pi}{\sin k\frac{M\pi}{N}}\right\}$$

$$= -\sum_{k=1}^{k=\frac{N-1}{2}} \cot k\frac{2\pi}{N}\operatorname{tg}\frac{Mk\pi}{N} + \sum_{k=1}^{k=\frac{N-1}{2}} \cot(2k-1)\frac{\pi}{N}\cot(2k-1)\frac{M\pi}{2N}.$$

Erwägen wir nun, dass

$$\cot(2k-1)\frac{\pi}{N} = -\cot\left(\frac{N-(2k-1)}{N}\right)\pi$$

und

$$\cot(2k-1)\frac{M\pi}{2N} = \operatorname{tg}\left(MN\frac{\pi}{2} - (2k-1)\frac{M\pi}{2N}\right) = \operatorname{tg}(N-(2k-1))\frac{M}{N}\frac{\pi}{2},$$

so sehen wir, dass

$$\sum_{k=1}^{k=\frac{N-1}{2}} \cot(2k-1)\frac{\pi}{N}\cot(2k-1)\frac{M\pi}{2N} = -\sum_{k=1}^{k=\frac{N-1}{2}} \cot k\frac{2\pi}{N}\operatorname{tg} k\frac{M\pi}{N},$$

und damit:

$$\sum_{k=1}^{k=N-1} \cot k\frac{\pi}{N}\left\{\cot k\frac{M\pi}{N} - \frac{\cos Mk\pi}{\sin k\frac{M\pi}{N}}\right\}$$

$$= -2\sum_{k=1}^{k=\frac{N-1}{2}} \cot k\frac{2\pi}{N}\operatorname{tg} k\frac{M\pi}{N},$$

so wie:

$$S = \frac{N-1}{2}N + \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=\frac{N-1}{2}} \cot k\frac{2\pi}{N}\operatorname{tg} k\frac{M\pi}{N}.$$

Alsdann resultirt sogleich der 3. angeführten Orts aufgestellte Satz:

$$\sum_{k=1}^{k=\frac{N-1}{2}} G\left(k\frac{M}{N}\right)=\frac{N^2-1}{8}\cdot\frac{M}{N}-\frac{N-1}{2}-\frac{1}{2N}\sum_{k=1}^{k=\frac{N-1}{2}}\cot k\frac{2\pi}{N}\,\mathrm{tg}\,k\frac{M\pi}{N}$$

$$=\frac{N^2-1}{8}\cdot\frac{M}{N}-\frac{N-1}{2}-\frac{1}{2N}\sum_{k=1}^{k=\frac{N-1}{2}}\frac{\mathrm{tg}\,k\frac{M\pi}{N}}{\mathrm{tg}\,k\frac{2\pi}{N}} \quad \text{(III)}$$

Von den vorhergehenden Formeln können wir jetzt Anwendung in der Lehre von den quadratischen Resten machen. Ist nämlich a eine beliebige Zahl, p eine Primzahl, so ist *), wenn wir uns des Legendreschen Zeichens bedienen,

$$\left(\frac{a}{p}\right)\equiv(-1)^{\mu} \pmod p,$$

wo μ die Anzahl der Reste der Zahlen:

$$a,\ 2a,\ 3a \ldots \frac{p-1}{2}a,$$

nach dem modulus p, welcher $> \frac{1}{2}p$, bezeichnet.

Ob a quadratischer Rest oder Nichtrest ist, hängt bekanntlich nur davon ab, ob μ gerade oder ungerade ist, und unter dieser Voraussetzung kann man setzen:

$$\mu=G\left(\frac{a}{p}\right)+G\left(\frac{2a}{p}\right)+\ldots+G\left(\frac{\left(\frac{p-1}{2}\right)a}{p}\right)=\sum_{k=1}^{k=\frac{p-1}{2}} G\left(k\frac{a}{p}\right).$$

Die Zahlen a und p haben aber dieselben Eigenschaften wie die obigen M und N; und es ist desshalb:

$$\sum_{k=1}^{k=\frac{p-1}{2}} G\left(k\frac{a}{p}\right)=\frac{p^2-1}{8}\cdot\frac{a}{p}-\frac{p-1}{4}-\frac{1}{2p}\sum_{k=1}^{k=\frac{p-1}{2}}\frac{\mathrm{tg}\,k\frac{a\pi}{p}}{\mathrm{tg}\,k\frac{2\pi}{p}}$$

$$=\frac{1}{2p}\left\{\frac{(a-2)p^2+(2p-a)}{4}-\sum_{k=1}^{k=\frac{p-1}{2}}\frac{\mathrm{tg}\,k\frac{a\pi}{p}}{\mathrm{tg}\,k\frac{2\pi}{p}}\right\}=\mu.$$

Daher haben wir den merkwürdigen Ausdruck:

(IV.)

$$\left(\frac{a}{p}\right)\equiv(-1)^{T},\ \text{wo}\ T=\frac{1}{2p}\left\{(a-2)p^2+(2p-a)-\sum_{k=1}^{k=\frac{p-1}{2}}\frac{\mathrm{tg}\,k\frac{a\pi}{p}}{\mathrm{tg}\,k\frac{2\pi}{p}}\right\}.$$

---

*) Gauss, Disquisitiones arithmeticae, Sect. IV.

Aus Formel III. können wir jetzt ohne grosse Mühe ein merkwürdiges Theorem herleiten, welches Herr **Eisenstein** in demselben Bande pag. 282. aufstellt.

Sind nämlich p und q zwei ungerade Zahlen ohne gemeinschaftlichen Theiler, so haben wir

$$\sum_{k=1}^{k=\frac{p-1}{2}} G\left(k\frac{q}{p}\right)=\frac{(q-2)p^2+2p-q}{8p}-\frac{1}{2p}\sum_{k=1}^{k=\frac{1}{2}(p-1)}\frac{\operatorname{tg} k\frac{q\pi}{p}}{\operatorname{tg} k\frac{2\pi}{p}},$$

$$\sum_{h=1}^{h=\frac{q-1}{2}} G\left(h\frac{p}{q}\right)=\frac{(p-2)q^2+2q-p}{8q}-\frac{1}{2q}\sum_{h=1}^{h=\frac{1}{2}(q-1)}\frac{\operatorname{tg} h\frac{p\pi}{q}}{\operatorname{tg} h\frac{2\pi}{q}};$$

und hieraus durch Addition

$$\sum_{k=1}^{k=\frac{1}{2}(p-1)} G\left(k\frac{q}{p}\right)+\sum_{h=1}^{h=\frac{1}{2}(q-1)} G\left(h\frac{p}{q}\right)=\frac{(q-2)p^2+2p-q}{8p}+\frac{(p-2)q^2+2q-p}{8q}$$

$$-\frac{1}{2p}\sum_{k=1}^{k=\frac{1}{2}(p-1)}\frac{\operatorname{tg} k\frac{q\pi}{p}}{\operatorname{tg} k\frac{2\pi}{p}}-\frac{1}{2q}\sum_{h=1}^{h=\frac{1}{2}(q-1)}\frac{\operatorname{tg} h\frac{p\pi}{q}}{\operatorname{tg} h\frac{2\pi}{q}}.$$

Die beiden ersten Terme auf der rechten Seite der Gleichung lassen sich nun auf folgende Weise geben:

$$\frac{1}{8pq}\{2p^2q^2-2q^2p-2qp^2+2pq-q^2+2pq-p^2\}$$

$$=\frac{1}{8pq}\{2pq(p-1)(q-1)-(p-q)^2\}=\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}-\frac{1}{8pq}(p-q)^2.$$

Daher ist:

$$\sum_{k=1}^{k=\frac{p-1}{2}} G\left(k\frac{q}{p}\right)+\sum_{h=1}^{h=\frac{q-1}{2}} G\left(h\frac{p}{q}\right)=\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}-\frac{(p-q)^2}{8pq}$$

$$-\frac{1}{2pq}\left\{q\sum_{k=1}^{k=\frac{1}{2}(p-1)}\frac{\operatorname{tg} k\frac{q\pi}{p}}{\operatorname{tg} k\frac{2\pi}{p}}+p\sum_{h=1}^{h=\frac{1}{2}(q-1)}\frac{\operatorname{tg} h\frac{p\pi}{q}}{\operatorname{tg} h\frac{2\pi}{q}}\right\}.$$

Es ist aber hinlänglich bekannt, dass Summationen von der Form

$$\Sigma G\left(k\frac{q}{p}\right)$$

zuerst von **Gauss** zum Beweise des Reciprocitätsgesetzes für die

quadratischen Reste benutzt worden sind und dass seine Untersuchungen auf einem von dem obigen ganz verschiedenen Wege ergeben haben *):

$$\sum_{k=1}^{k=\frac{p-1}{2}} G\left(k\frac{q}{p}\right)+\sum_{h=1}^{h=\frac{q-1}{2}} G\left(h\frac{p}{q}\right)=\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}.$$

Führen wir diesen Werth in unsere letzte Formel ein, so ergibt sich:

$$q\sum_{k=1}^{k=\frac{p-1}{2}}\frac{\operatorname{tg} k\frac{q\pi}{p}}{\operatorname{tg} k\frac{2\pi}{p}}+p\sum_{h=1}^{h=\frac{q-1}{2}}\frac{\operatorname{tg} h\frac{p\pi}{q}}{\operatorname{tg} h\frac{2\pi}{q}}=-\tfrac{1}{4}(p-q)^2.$$

Bezeichnen wir der Kürze wegen

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{q\pi}{p}}{\operatorname{tg}\frac{2\pi}{p}}+\frac{\operatorname{tg}\frac{2q\pi}{p}}{\operatorname{tg}\frac{4\pi}{p}}+\frac{\operatorname{tg}\frac{3q\pi}{p}}{\operatorname{tg}\frac{6\pi}{p}}+\ldots+\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(p-1)\frac{q\pi}{p}}{\operatorname{tg}\frac{(p-1)\pi}{p}}$$

durch $F(q,p)$, so lässt sich diese sonderbare Eigenschaft der Function $F(q,p)$ mit zwei Variabeln, wo q und p irgend zwei ungerade Zahlen ohne gemeinschaftlichen Theiler bedeuten, auch kurz geben durch:

$$qF(q,p)+pF(p,q)=-\tfrac{1}{4}(p-q)^2.$$

XI.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Von dem

Herrn Doctor J. Dienger,

Lehrer an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

Setzt man

$$\frac{(1-ax)(1-abx)(1-ab^2x)\ldots\text{ in inf.}}{(1-cx)(1-cbx)(1-cb^2x)\ldots\text{ in inf.}}=\varphi(x),$$

*) Ebendaselbst.

so ist

$$\varphi^{(r)}(0) = 1.2 \ldots . r \frac{(c-a)(c-ab)(c-ab^2) \ldots . (c-ab^{r-1})}{(1-b)(1-b^2)(1-b^3) \ldots . (1-b^r)}.$$

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2\sqrt{3}} [1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{12} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{12^2} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{12^3} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{12^4} - \ldots .]$$
$$+ \frac{\sqrt{3}}{7} [1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{49} + \frac{1}{5} \left(\frac{3}{49}\right)^2 - \frac{1}{7} \left(\frac{3}{49}\right)^3 + \frac{1}{9} \left(\frac{3}{49}\right)^4 - \ldots .].$$

Man denke sich auf einer Ebene eine Senkrechte errichtet; um den Fusspunkt derselben als Mittelpunkt ziehe man in der Ebene eine Ellipse, deren Halbaxen a, b seien. Man nehme nun eine gerade Linie und in ihr zwei feste Endpunkte, deren Entfernung c sei (d. h. konstant ist); den einen Endpunkt lasse man auf der Ellipse sich bewegen, während der andere immer auf der Senkrechten bleibt; so ist die Gleichung der durch diese Bewegung erzeugten Oberfläche:

$$4(b^2x^2 + a^2y^2)[b^2(c^2-a^2)x^2 + a^2(c^2-b^2)y^2]^2$$
$$= a^2b^2[\{b^2(c^2-a^2)x^2 + a^2(c^2-b^2)y^2\}\{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\} - z^2(b^2x^2 + a^2y^2)]^2.$$

$$\frac{\pi}{4} = \sin x + \tfrac{1}{3} \sin 3x + \tfrac{1}{5} \sin 5x + \ldots . \text{ in inf.}$$

für $x > 0$ und $< \pi$.

Wenn man in allen Punkten einer Parabel Tangenten zieht und vom Brennpunkte auf eine jede eine Senkrechte fällt, so trifft eine jede dieser Senkrechten die zu ihr gehörige Tangente in einem Punkte, der in einer geraden Linie liegt, welche die Parabel an ihrer Spitze berührt.

Wenn man in dem Dreieck ABC in der Seite AC einen Punkt D annimmt, so dass $AD = \frac{1}{\alpha} AC$, und in BC einen Punkt E, so dass $BE = \frac{BC}{\alpha}$, ferner die Linien AE, BD zieht, so schneiden sich diese letztern rechtwinklich, wenn

$$AC^2 + BC^2 = (2\alpha^2 - 2\alpha + 1) AB^2.$$

Legt man durch einen senkrechten Zylinder mit kreisförmiger Basis eine Ebene schief gegen diese, so ist der Durchschnitt eine Ellipse. Soll nun diese Ellipse die Fläche p umschliessen, so hat man die genannte schiefe Ebene so zu legen:

Man ziehe in der Basis einen Durchmesser; an seinem einen Endpunkte errichte man eine Senkrechte auf die Basis, deren Länge $=\frac{2}{r\pi}\sqrt{p^2-r^4\pi^2}$, wenn r der Halbmesser der Basis ist. Den Endpunkt dieser Senkrechten verbinde man mit dem andern Endpunkte des Durchmessers, durch den man, in der Basis, eine Senkrechte auf den Durchmesser zieht. Legt man nun durch diese letztere Senkrechte und durch die so eben gezogene Linie (nach dem Endpunkte der ersten Senkrechten) eine Ebene, so schneidet diese den Zylinder in der verlangten Ellipse.

Es ist immer $\int_0^a \frac{f(x)\partial x}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$ unendlich gross, wenn $f(x)$ eine ganze Funktion von x ist.

Es ist $\int_0^\infty \frac{z^{a-1}\partial z}{1+z+z^2}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sin((1-a)\frac{\pi}{3})}{\sin a\pi}$ für $a>0$ und <2.

Für $a=1$ folgt daraus $\int_0^\infty \frac{\partial z}{1+z+z^2}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$, wie bekannt.

Ueber die Summe $\sum\limits_{v=1}^{v=m}\sum\limits_{w=1}^{w=m}(ax_v+bx_w)^r$.

Setzt man in

$$(ax+by)^r=a^rx^r+ra^{r-1}x^{r-1}by+\frac{r(r-1)}{1.2}a^{r-2}x^{r-2}b^2y^2+\ldots..$$

für y die Werthe $x_1, x_2, \ldots. x_m$, so ergiebt sich durch Summirung:

$$\sum_{w=1}^{w=m}(ax+bx_w)^r=ma^rx^r+ra^{r-1}bx^{r-1}S_1+\frac{r(r-1)}{1.2}a^{r-2}b^2x^{r-2}S_2$$
$$+\ldots.+b^rS_r,$$

wenn man, wie gewöhnlich,

$$x_1^s+x_2^s+x_3^s+\ldots.+x_m^s=S_s$$

setzt.

Setzt man hierin abermals $x=x_1, x_2, \ldots. x_m$ und summirt, so ergiebt sich

$$\sum_{v=1}^{v=m}\sum_{w=1}^{w=m}(ax_v+bx_w)^r = ma^rS_r + ra^{r-1}bS_1S_{t-1}$$

$$+\frac{r(r-1)}{1.2}a^{r-2}b^2S_2S_{r-2}+\ldots+rab^{r-1}S_1S_{r-1}+mb^rS_r.$$

Nimmt man die Summe im ersten Gliede so, dass man den Fall immer ausschliesst, in dem $v=w$ wird, so findet sich:

$$\sum_{v=1}^{v=m}\sum_{w=1}^{w=m}(ax_v+bx_w)^r = ma^rS_r + ra^{r-1}bS_1S_{r-1}$$

$$+\frac{r(r-1)}{1.2}a^{r-2}b^2S_2S_{r-2}+\ldots+\frac{r(r-1)}{1.2}a^2b^{r-2}S_2S_{r-2}$$

$$+r\,a^rb^{r-1}S_1S_{r-1}+mb^rS_r-(a+b)^rS_r.$$

Aus dieser Gleichung folgt für $a=b=1$:

$$(x_1+x_2)^r+(x_1+x_3)^r+\ldots+(x_1+x_m)^r+(x_2+x_3)^r+\ldots+(x_2+x_m)^r$$

$$+(x_3+x_4)^r+\ldots=(m-2^{r-1})S_r+rS_1S_{r-1}+\frac{r(r-1)}{1.2}S_2S_{r-2}+\ldots$$

Der zweite Theil hört auf mit $\frac{1}{2}\cdot\frac{r(r-1)\ldots\left(\frac{r}{2}+1\right)}{1.2\ldots\frac{r}{2}}(S_{\frac{r}{2}})^2$ oder $\frac{r(r-1)\ldots\left(\frac{r+3}{2}\right)}{1.2\ldots\left(\frac{r-1}{2}\right)}S_{\frac{r-1}{2}}S_{\frac{r+1}{2}}$, jenachdem r gerade oder ungerade ist.

Einen ähnlichen Satz leitet man ab für $a=-b=1$.

Bekanntlich kann man S_1, S_2, ... S_r durch die Koeffizienten der Gleichung

$$x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots+a_m=0,$$

wenn ihre Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sind, ausdrücken, vermittelst der Formeln:

$$S_1+a_1=0,$$
$$S_2+a_1S_1+2a_2=0,$$
$$S_3+a_1S_2+a_2S_1+3a_3=0,$$
$$\vdots$$
$$S_r+a_1S_{r-1}+a_2S_{r-2}+\ldots+ra_r=0.$$

Ist $r>m$, so ist a_r und überhaupt alle Koeffizienten a_v, für die $v>m$, gleich Null zu setzen, und es wird die letzte der obigen Gleichungen:

$$S_r + a_1 S_{r-1} + a_2 S_{r-2} + \dots + a_m S_{r-m} = 0.$$

Da die Gleichung

$$x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m = 0$$

auf

$$(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_m) = 0$$

hinausläuft, so sind also $a_1, \dots a_m$ bekannt, mithin auch $S_1, \dots S_r$, und somit kann die obige Doppelsumme berechnet werden.

Von dem

Herrn Professor Dr. O. Schlömilch

an der Universität zu Jena.

Lässt sich auf elementarem Wege die Richtigkeit der Gleichung

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m}$$
$$= \frac{1}{1} m_1 - \frac{1}{2} m_2 + \frac{1}{3} m_3 - \dots \pm \frac{1}{m} m_m,$$

worin m_1, m_2, ... wie gewöhnlich die Binomialkoeffizienten bedeuten, nachweisen?

Eine der interessantesten Curven höherer Grade ist diejenige, welche durch die Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{x}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{y}\right)^2 = 1$$

charakterisirt wird. Sie besteht aus vier Zweigen und kann unter Umständen ganz in einem endlichen Raume enthalten sein. Die Fläche eines Quadranten von ihr ist

$$\frac{ab\pi}{4}\left(1 - \frac{2\alpha}{a} - \frac{2\beta}{b}\right), \text{ für } \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} < \frac{1}{2}$$

und Null im Gegenfalle. Man wünscht eine Diskussion jener Gleichung und Begründung der angeführten Quadratur.

Eine Curve sei auf rechtwinkliche Coordinaten bezogen *), $OM = x$, $MP = y$; im Punkte P sei an dieselbe eine Tangente

*) Die entsprechende Figur wird man sich sehr leicht selbst entwerfen können.

ST gelegt, welche die Abscissenachse in *S* schneiden möge. Zwischen den beiden Winkeln $MOP=\omega$ und $MSP=\sigma$ wird nun immer eine gewisse Relation statt finden, die für jede Curve eine besondere ist; kennt man aber umgekehrt diese Relation, so muss sich daraus die Gleichung der Curve bestimmen lassen; man soll nun eine allgemeine Methode angeben, mittelst deren aus der Gleihung

$$\sigma=f(\omega)$$

jederzeit die unbekannte Gleichung der Curve abgeleitet werden kann. Für $f(\omega)=\frac{1}{2}\omega$ findet man z. B.

$$y^2-2ry=x^2,$$

wobei r eine willkührliche Constante bezeichnet, als Gleichung der Curve, und die letztere ist demnach ein Kreis, wie sich vorher sehen liess.

XII.

Miscellen.

Steinheil's Passagen-Prisma.

(Aus C. L. v. Littrow's Kalender für alle Stände 1847.)

Plössl hat dem Passagen-Prisma die hier mit den halben Dimensionen der Wirklichkeit ersichtliche Gestalt gegeben. (Siehe Taf. II. Fig. 6.)

Das Prisma *a* liegt mit seinen Kanten für mittlere Breiten nahezu der Weltaxe parallel, und dessen Reflexionsfläche steht im Meridiane oder demjenigen Vertikalkreise, in welchem man zu beobachten beabsichtigt. Das drei- bis viermal vergrössernde Fernrohr *b* bewegt sich mittelst des Bügels *c* in der Reflexionsebene des Prisma auf und ab. Zugleich ist diese Reflexionsebene parallel zur Säule *d*, welche wieder senkrecht auf der oberen Fläche des Gestelles *e* befestigt wird, so dass das Horizontalstellen dieser Fläche *e* sofort auch dem Prisma die richtige Lage in einer Richtung ertheilt; zu diesem Behufe ist das eine der beiden Füsschen *f* auf der Ocularseite des Instrumentes zum Höher- und Niederschrauben eingerichtet. In der anderen, auf jene erste perpendikulären Richtung wird das Instrument zuerst durch Verschieben auf den Füsschen *f* rectificirt, und, wenn auf diese Art die gewünschte Lage bereits beiläufig hergestellt ist, werden diese Füsschen in das dazu bestimmte Piedestal unveränderlich eingelassen oder sonst fixirt, und die nun noch nöthige Correction mittelst der Schräubchen *g*, die einander entgegen wirken, bewerkstelligt. Die Bilder sind bei der Vollkommenheit, durch welche sich alle Arbeiten des Herrn Plössl auszeichnen, ausserordentlich rein, und ihre Berührung mit grosser Sicherheit zu beobachten. Der Preis des Instrumentchens ist der des Dipleidoskopes: 25 fl. C. M.

XIII.

Ueber das Elektron der Alten und die praktische Bedeutung alterthümlicher Naturwissenschaft, namentlich der symbolischen Hieroglyphe, für die neuere Zeit.

Von

Herrn Professor Dr. J. S. C. Schweigger

an der Universität zu Halle.

Fortsetzung von Band IX. S. 121—148.

III. Ueber die praktische Bedeutung des bisher Dargelegten.

Wer das Mitgetheilte mit Aufmerksamkeit gelesen hat, sieht sogleich, dass es sich wirklich hier nicht blos handelte vom Elektron der Alten. Das Dargelegte ist vielmehr ganz geeignet mit Beziehung auf die Mysterien und die damit zusammenhängende Kunst und Poesie des Alterthums, zu deren Musterbildern fortwährend unsere Schulen aufblicken, neue Gesichtspunkte darzubieten, welche sehr verschieden sind von den bisher allein geltend gewordenen Ansichten. Denn wir sahen (Note 19), dass wenigstens einige Mysterien (worüber bei den samothracischen nur eine Stimme im Alterthum) offenbar von naturwissenschaftlicher Bedeutung waren und mit symbolischen Hieroglyphen vorhistorischer Zeit (Anm. zu II. 3. und Note 23) zusammenhingen. Diese symbolischen Hieroglyphen (analog der geometrischen Zeichensprache) bieten durch ihren streng wissenschaftlichen Charakter einen Faden der Ariadne dar, welcher mit Sicherheit leitet durch das mysteriöse Fabellabyrinth. Dagegen, wenn man bisher bei allen alterthümlichen Studien allein sich verliess auf die schriftlichen Ueberlieferungen, und sogar, im Sinne der grammatischen Exegese, wörtlich auffassen zu müssen glaubte, was räthselhaft (einem Ausdrucke Strabo's gemäss) gesprochen war: so mussten wir im Gegentheil uns überzeugen (Note 3. 6. 12. 23 und 24), dass diese schriftlichen Ueberlieferungen in allen mysteriösen Din-

gen (denen, wie allgemein zugegeben wird, die alterthümliche Kunst und Poesie sich anschloss) gar keine Erkenntnissquelle sind. Was von dem in den Mysterienkreis hineingezogenen Elektron und von der zur Verschleierung der Art seines Vorkommens ihm angereihten Fabelmasse gesagt wurde, das vermehrte blos die Beweise für diesen Satz, der schon früher durch eine Reihe von Thatsachen nachgewiesen war in meiner Denkschrift zur Säcularfeier der Universität Erlangen, welche umständlich handelt vom Verhältnisse naturwissenschaftlicher Mysterien zur Litteratur des Alterthumes. Je durchgreifender aber die Bedeutung ist jener bisher zu wenig beachteten alterthümlichen, von den Mysterien ausgegangenen Beschränkung der Schriftsprache, desto mehr ist es auffallend, dass bisher keine einzige unserer Litteraturzeitungen, überhaupt keine Zeitschrift, so gross ihre Zahl, sich eingelassen auf Prüfung der Sache. Daher mag es nun gut sein, einige Worte von dem fortdauernden Einflusse zu sprechen, welchen jene Mysterien des Alterthums mit ihrer Hieroglyphensprache (ich meine nicht die phonetische, welcher allein man gewohnt ist Aufmerksamkeit zu schenken) noch auf die neuere und neueste Zeit haben. Und dazu fordert mich der Charakter der vorliegenden, die höhern Lehranstalten und namentlich die Bedürfnisse der gelehrten philologischen Schulen unsers Vaterlandes zunächst ins Auge fassenden mathematisch physikalischen Zeitschrift noch ganz besonders auf.

1. Nur einen Blick darf man werfen auf die Geschichte der Mathematik, um sich zu überzeugen, dass Plato und seine Schule auch in mathematischer Beziehung einen bedeutenden Ruf habe, und zwar durch Lehren, wovon nichts vorkommt in den Platonischen Schriften, welche vielmehr zu denen gehörten, worüber er, nach seiner ausdrücklichen Erklärung, nie schreiben wollte, eben weil sie akroamatisch (nach dem Ausdrucke der Mysterien), d. h. nur zur mündlichen Fortpflanzung bestimmt waren; und worauf sich also offenbar Plato's so viel besprochene *ἄγραφα δόγματα* bezogen, deren Aristoteles in seiner Physik erwähnt, und zwar da, wo er vom Raum redet. Eben mit solchen akroamatischen Lehren hing diese ganze Physik des Aristoteles zusammen, von welcher er selbst sagt, dass sie eine herausgegebene und zugleich nicht herausgegebene, in absichtliches Dunkel gehüllte, nur seinen Zuhörern verständliche Schrift sei. Und da auch die Metaphysik des Aristoteles (der Physik sich anschliessend) einen ähnlichen Charakter hat: so muss es mit Wehmuth erfüllen, zu sehen, wie eine neuere Philosophie die Aristotelische dunkle Schreibart nachahmt, zu welcher der griechische Philosoph, weil er lediglich für Mysterienkundige auf eine nur andeutende Weise schreiben wollte und durfte, genöthigt war durch den Druck der Zeit. — Man sieht nun schon, dass die Sache bedeutsam wird gerade für unsere in mehr als einer Beziehung durch einen zweideutigen Charakter sich auszeichnende Zeitperiode. Und daran reihte sich in jener Denkschrift folgende, zunächst für eine naturwissenschaftliche Zeitschrift geeignete Betrachtung: „Im Alterthume trat jener mysteriösen Schreibart über physikalische Dinge, deren die ganze Pythagoreische Schule und deren auch Plato und Aristoteles sich bedienten, die den Mysterien verhasste

Epikureische Schule entgegen mit ihrem atomistischen System, in der Absicht, die bedeutendsten in die Mysterien übergegangenen Naturwahrheiten mit den alltäglichsten Dingen zu vermengen und sie durch eine plumpe mechanische Auffassungsweise zu profaniren. Unverkennbar ist z. B. das Bestreben des Lucrez, den selbst in ägyptischen Tempeln (man lese Claudian's Idylle auf den Magnet) eine so bedeutende Rolle spielenden Magnet herabzuziehen und seine wundervollen Wirkungen, deren Bedeutsamkeit er gar wohl fühlte (wie seine schönen auf die Samothracischen eisernen Ringe sich beziehenden Verse beweisen), anzureihen an die trivialsten Dinge. Ja, sein Hass gegen die Tyrannei der Mysterien ging so weit, dass er ihn, durch leidenschaftliche Verblendung verleitet, selbst auf die damit zusammenhängende Astronomie übertrug, und im Gegensatze der chaldäischen Lehren lieber aus atomistischen Feuertheilchen täglich eine neue Sonne und einen neuen Mond an verschiedenen Stellen des Himmels wollte zusammenfliessen lassen. — Auf diesem, die alten Mysterien bekämpfenden Standpunkte verdient Entschuldigung wenigstens die arge Geistlosigkeit des atomistischen Systems. Was soll man aber dazu sagen, wenn neuere naturwissenschaftliche Schulen, wenn namentlich unsere wunderlichen Chemiker damit sogar vornehm thun?"

Dergleichen Dinge aber will man nicht gern zur Sprache kommen lassen, weil daran, mit Beziehung auf neuere Chemie, noch ein viel schärferer Tadel der Impietät [25]) gegen den Begründer

---

[25]) Diese geht so weit, dass man selbst die Geschichte zu entstellen versucht. Einem Ausländer allein, wie Dumas (der übrigens als ein geistreicher Mann das atomistische System verhöhnt) kann es zur Entschuldigung gereichen, wenn er irregeleitet in seiner vortrefflichen Philosophie der Chemie, S. 181. und 182., in der Art sich über Richter ausdrückt: „Richter, ein Chemiker zu Berlin, warf dadurch, dass er ausgemachte Facta mit zahlreichen theoretischen Irrthümern vermischte, viel Dunkel auf die Fragen, welche Wenzel aufzuklären begonnen hatte. Man kann das Hauptresultat seiner Untersuchungen in wenig Worte zusammenfassen: es ist dasselbe, zu dem Wenzel gelangt war." — So lange Wenzel und Richter lebten, ist es keinem Menschen eingefallen zu behaupten, dass ersterer nur eine Ahnung der Richterschen stöchiometrischen Gesetze gehabt habe; am wenigsten wäre solches dem ehrlichen und gewissenhaften Wenzel selbst eingefallen. Was darüber zu sagen zur Rechtfertigung Richter's, hat schon Hess auf eine der Wahrheit getreue Weise ausgesprochen in einer ganz zweckmässig (mit Beziehung auf die angeführte Philosophie der Chemie von Dumas) französisch geschriebenen Abhandlung: Sur les travaux de Jérémie Benjamin Richter par G. H. Hess, discours prononcé à la séance publique de l'Academie des Sciences de St. Petersbourg le 30. Dec. 1840, woraus, während es sich um Ehrenrettung eines Mannes wie Richter handelte, doch nur in einer einzigen deutschen Zeitschrift, im Journ. f. prakt. Chem. 1841. vol. 24. p. 420—438, ein Auszug mitgetheilt ist, der nicht einmal berücksichtigt wurde von neuerdings bei uns erschienenen Lehrbüchern der Geschichte der Chemie und Stöchiometrie, worin die von Hess widerlegten Unwahrheiten wiederholt sind. Aber noch vieles ist zur Ehre Richter's dem beizufügen, was Hess auf eine höchst achtbare Weise ausgesprochen hat. Die verborgenen und, wie schon Wollaston hervorhob, mit den älteren chemischen Analysen unvereinbaren und daher von niemanden auch nur geahneten Wahrheiten, welche dieser bedeu-

der Stöchiometrie, gegen den eben so gewissenhaften Experimentator als wahren Naturphilosophen, gegen Richter sich anschliesst, welcher, während die Pythagoreer (wie es scheint vorhistorischer Ueberlieferung gemäss) blos in dunkeln Ausdrücken von der Correspondenz der Körper- und Zahlen-Welt sprachen, eine solche Correspondenz wirklich streng nachgewiesen; dabei auch schon Reihen aufzufinden bemüht (wie man sie immer voraussetzen muss, wo von Naturzahlen die Rede ist) ohne bei seiner streng mathematischen Behandlung der Sache jenes atomistischen Systems zu bedürfen, welches, wie gesagt, im Alterthume zu entschuldigen, in neuerer Zeit aber blos eine Erfindung der Eitelkeit war (siehe Journ. f. Ch. u. Phys. B. 52. S. 69. Note).

2. Aber noch einflussreichere Dinge auf Leben und Wissenschaft boten sich dar bei Gelegenheit meiner ersten kurzen Mittheilungen über Elektron im Journal für praktische Chemie. Buttmann nämlich in seiner auf den Bernstein sich beziehenden gelehrten Abhandlung (im zweiten Theile seines Mythologus) sagt, um die Sonderbarkeit zu erklären, wie eine Metallmischung aus Gold und Silber im Alterthume denselben Namen erhalten konnte, welchen man dem Bernstein gab, ganz im Sinne des vorhin besprochenen grammatisch exegetischen Princips: „Der Bernstein und das ihm ähnlich glänzende Metall können, so widersinnig uns auch das klingen mag, für einerlei gegolten haben. Nämlich in jener Zeit einfacher Erfahrungskenntnisse konnten Dinge für einerlei gelten, die in gewissen, für die Sinne und den Gebrauch wesentlicheren Eigenschaften übereinkamen, während sie in andern, die dann für Nebenumstände galten, sehr verschieden sind.“ Wie weit Buttmann mit Beziehung auf die hier bezeichneten „Nebenumstände“ geht, zeigt die dem vorigen Abschnitte vorliegender Abhandlung angereihte Note 21. — Er wundert sich selbst darüber, dass ein, was er mit Recht hervorhebt, „sehr sachkundiger Mann“, wie Pausanias (dessen ganz klare Stelle über Elektron er missdeutet), habe festhalten können an Annahmen, die er als „uns widersinnig klingende“ bezeichnet. Wäre es möglich, dass ein Buttmann in einer wirk-

---

tende Arcanist an der Berliner Porzellanfabrik (was er in andrer Beziehung selbst für die Akademie der Hauptstadt war, worin er lebte) ausgesprochen, wurden ignorirt fast während seiner ganzen Lebensperiode. Um so grösser ist die Impietät, wenn sein hohes Verdienst verkannt, oder auf eine ungerechte Weise geschmälert wird sogar nach seinem Tode. Vielmehr sollte selbst das, was der einsam Stehende wohl geahnet und begonnen, aber unvollendet gelassen, gehörig gewürdigt werden. Und dazu gehört namentlich der Zusammenhang der Chemie mit kosmischen Beziehungen, indem Richter die Reihe des Abstandes der Planeten von der Sonne als einen Ausdruck der Wahlanziehung auffasste, eben darum ähnliche Reihengesetze der Wahlanziehung unter irdischen Körpern aufzufinden, und dadurch selbst neue Forschungen in gewissen Kreisen herbeizuführen bemüht. Namentlich in unsern Tagen, wo jenes Reihengesetz unter den Planeten (das uns allerdings an die in chemischen Zahlenreihen so oft vorkommenden Multipla mit zwei erinnert) uns über den Uranus hinausgeführt hat, geziemt es sich, solches zu erwähnen, was ganz in Vergessenheit gekommen, aber schon als eine der geistreichsten Ideen bezeichnet wurde im Journ. d. Chem. u. Phys. 1823. B. 39. S. 232. Anm.

lich mit grosser Sorgfalt und Gelehrsamkeit geschriebenen Abhandlung uns solche Dinge sagen könnte, wenn nicht diese Befreundung mit dem Widersinnigen einigermassen wenigstens der Tendenz entspräche einer gewissen Art philologischer Vorbildung? Denn ganz speciell gab die gewöhnliche Ansicht der Mythologie Veranlassung, dass man die edelsten Geister des Alterthums befangen glaubte in lauter Unsinn, und gerade diese Befangenheit als den Charakter bezeichnete der naiven Naturanschauung jener als Vorbild für alle Zeiten geltenden alten Poesie. So z. B. enthalten die so zahlreichen Stellen der Dichter von den Dioskuren nach der gewöhnlichen (keine Notiz von ihrem Zusammenhange mit symbolischen Hieroglyphen nehmenden) Auffassungsweise derselben, nichts als Widersinnigkeiten, welche man dennoch lange genug als klassische bewundert und zur Einimpfung einer ähnlichen klassischen Bildung benutzt. Solches ist durch eine Reihe von Beispielen nachgewiesen in einem ganzen Capitel meiner Einleitung in die Mythologie auf dem Standpunkte der Naturwissenschaft S. 286—326, und dergleichen Beispiele kann ich leicht um das Zehnfache vermehren, um darzuthun, welche Widersinnigkeiten entstehn, wenn sich die Philologie von der Naturwissenschaft trennt. Selbst die vorhergehende Abhandlung über das Elektron der Alten vermehrt die Beweise dafür. Und doch ist leider diese Abtrennung der Philologie von der Naturwissenschaft neuerdings zur allgemeinen Sitte geworden. — Wirklich aber war bei der speciell in einzelnen Zeitperioden sich geltend machenden gelehrten Bildung die vorherrschend werdende Kälte und Abneigung gegen Naturwissenschaft stets das charakteristische Merkmal obscurantischer Zeiten. Anerkannt auch giebt es eine Auffassungsweise der Mythologie, welche mit dem Obscurantismus Hand in Hand geht (das Heidenthum christianisirend und das Christenthum ethnisirend), und welcher eben darum eine rationalistische, d. h. wissenschaftliche, an streng physikalische Hieroglyphen sich anschliessende Betrachtungsweise der Mythologie besonders verhasst sein muss.

Zeitgemäss würde es daher sein, wenn nun endlich einmal zunächst wenigstens die Physiker und dann auch die Philologen mit der alten symbolischen (d. h. streng physikalischen) Hieroglyphe sich befreunden möchten, nachdem man zwanzig Jahre lang die Sache (welche man mit Gründen hätte bekämpfen müssen, wenn sie gefährlich schien für den Ruhm der neuern Zeit) nicht einmal zur Prüfung gelangen lassen wollte. Nur das Studium der phonetischen Hieroglyphe schien Aufmerksamkeit, Unterstützung, Förderung zu verdienen, obwohl diese phonetische Hieroglyphe, ihrer Natur nach, ungeeignet ist zur Darlegung eines wissenschaftlichen Satzes, dergleichen man auch darin noch nicht aufgefunden hat. Vielmehr liegt offenbar etwas erkünsteltes in einer Hieroglyphe, welcher eine Wortsprache zur Grundlage dient, und deren Kunst allein in schwerfälliger Bezeichnung von Buchstaben besteht. Dagegen konnten wir in einer lediglich auf die Bedeutung des Wortes electrum sich beziehenden Abhandlung selbst philologisch eine symbolische Hieroglyphe benutzen. Denn der auf dem gewöhnlichen Standpunkte der Philologie ganz widersinnig scheinende Satz: electrum appellatum quoniam Sol voca-

tus sit elector (welchen Plinius recht absichtlich hervorhebt mit Beziehung auf eine Reihe namhaft gemachter und als die vorzüglichsten bezeichneten Dichter des Alterthums), dieser Satz konnte in seiner naturwissenschaftlichen Bedeutsamkeit verständlich gemacht werden durch eine alte sinnvolle symbolische Hieroglyphe, in deren Geist jene Dichter sich ausdrückten (II. 6. und 3. Anm.). So weit aber ging in den philologischen Schulen die Befreundung mit jenem Widersinnigen, wovon Buttmann redet, und welchem allerdings die phonetische Hieroglyphe sich nahe genug anschliesst, dass man geradezu die Hingebung an das Traditionelle und die kindlich gläubige Nacherzählung alter sinnloser Fabeln als den Charakter der phantasiereichsten, erhabensten Poesie bezeichnete. Diese Ansicht empfahl sich durch ihre Popularität und konnte daher leicht allgemeinen Beifall finden. Ja, sie fand ihn in so hohem Grade, dass sie wesentlich mit beitrug zur Herbeiführung der Wirren unserer Zeit. — Denn nur allzu willkommen ist es der Eitelkeit, geistreich und poetisch sich anzustellen bei dem Aussprechen von Unsinn, womit man vornehmthuend sich dem classischen Alterthum anzuschliessen glaubt. Aus dem in vorhergehender Abhandlung über Elektron Dargelegten geht aber vielmehr hervor, dass die alterthümlichen Schriftsteller mit der Tyrannei der Mysterien zu kämpfen hatten, welche (wie wir solches noch heut zu Tage bei der Astronomie der Brahminen Indiens vor Augen haben) die bedeutendsten Dinge blos akroamatisch, d. h. mündlich den Eingeweihten mittheilten mit Ausschluss der Schriftsprache, damit sie ja nicht volksthümlich werden möchten [26]). Schon darin also musste eine Quelle der Begeisterung liegen, in der Poesie ein Mittel zu haben, im Sinne symbolischer Hieroglyphen schreiben und die Wahrheit bei Erzählung einer Fabel durchblicken lassen zu können. Nicht gläubige Nachbeter alter heiliger Sagen waren daher die vorzüglichsten Dichter des Alterthums; sie waren vielmehr, gleich dem seiner ganzen Natur nach poetischen Plato, welchem aber selbst die Kirchenväter christliche Denkweise zuschreiben, geistreiche Protestanten gegen das Heidenthum. Darüber wäre sehr viel zu sagen, besonders um den speciellen, höchst beachtungswerthen Grund zu erläutern, warum den Samothracischen naturwissenschaftlichen Mysterien sich die vorzüglichsten alten Dichter angeschlossen, was mich jedoch hier viel zu weit führen würde (vergl. Note 28).

3. Man sieht nun aber, dass der Kampf gegen die heidnischen Mysterien (worin ein herrlicher Ruhm des Christenthums liegt, den allein Naturforscher gehörig zu würdigen vermögen) in der That noch nicht beendigt ist, indem diese Mysterien noch jetzt eben dadurch, dass ihr Fabelwesen die nun vorherrschende Ansicht der alterthümlichen Poesie und Kunst herbeigeführt, von grösserem Einflusse sind auf die neuere Zeit als man gewöhnlich

---

[26]) Man denke an den entsetzlichen Ausdruck obscurantischer Geistesdespotie, welcher selbst in dem kleinen durch Herausgabe der Physik des Aristoteles veranlassten Brief eines Alexander liegt, wovon die Rede war in der Denkschrift zur Säcularfeier der Universität Erlangen. S. 14. 15. 46.

sich vorstellt. Eine andere und bessere Ansicht der Kunst und Poesie des Alterthums kann wirklich nur durch die symbolische, d. h. naturwissenschaftliche Hieroglyphe der eben genannten Samothracischen Mysterien (s. Note 14 und 28) gewonnen werden. Und darin liegt ein bedeutender Aufruf, auf Mittel zu denken, die Philologen und Theologen wieder in ähnliches Interesse für Naturwissenschaft zu ziehn, wie es allgemein verbreitet war in der Periode freier Studien, welche in der letzten Hälfte des vorhergehenden und noch zu Anfang des gegenwärtigen Jahrhunderts bestand, wovon vorhin in der auf Gesner sich beziehenden Note 9. die Rede gewesen. Denn diese allgemeine Hinrichtung der Aufmerksamkeit auf die fortdauernden Offenbarungen Gottes in der Natur drängte zurück die für Geist, Herz und Gemüth gleich verderblichen theologischen Streithändel und trug eben dadurch wesentlich bei zur Anregung wahrhaft poetischer Begeisterung und Hervorrufung des schönsten Zeitalters unserer deutschen Litteratur.

Anmerkung. Um hieran nebenbei einige ganz praktische, unmittelbar ins Leben eingreifende Bemerkungen (wozu mich der Geist vorliegender Zeitschrift besonders aufruft) anzureihen, schliesse ich mich einer Stelle an, womit mein vormaliger, nun nach Dorpat abgegangener achtungswerther College, Herr Professor Kämtz, die kurze Geschichte der Physik schliesst, welche er als Anhang beifügte seinem im Jahr 1839 erschienenen Lehrbuche der Physik. Es heisst daselbst: „England machte den Anfang mit Belehrung der gewerbtreibenden Klassen; erst später folgten andere Länder. Es entstand ein edler Wetteifer, sogenannte Gewerbschulen zu stiften, deren Früchte sich jetzt schon vielfach zu erkennen geben. Während jedoch die Kenntnisse des Volks auf diese Art erweitert werden, zeigt sich auf vielen deutschen Universitäten gerade das Gegentheil. Denn früher gehörte es zur allgemeinen Bildung, dass ein jeder Studirende an den Vorlesungen über einige Theile der Naturwissenschaft Theil nahm; jetzt bekümmern sich die Theologen und Juristen darum fast gar nicht, und die Mediciner nur zur höchsten Nothdurft. Wohin das führe, mag die Zukunft lehren." — Diese höchst räthselhafte, hier zur Sprache gebrachte, für unsere Zeit ganz charakteristische Erscheinung hat besonders ihren Grund in der Anticipation des naturwissenschaftlichen Unterrichts in den beiden höhern Klassen gelehrter Schulen. Und diess verdient hervorgehoben zu werden in einer mit Rücksicht auf diese höheren Unterrichtsanstalten herausgegebenen mathematischen und naturwissenschaftlichen Zeitschrift. Denn obwohl bei der Prüfung von Candidaten für das mathematische Lehrfach an Gymnasien specielle, über den mechanischen Theil hinausgehende Kenntnisse der Naturwissenschaft darum nicht verlangt werden, weil älteren, sehr zweckmässigen Bestimmungen gemäss, der gelehrte Schulunterricht, soweit er auf Physik sich bezieht, stets einen mathematischen Charakter haben soll: so hat man doch besonders in den letzten zwölf Jahren, gleichsam um mit den Realschulen zu wetteifern, sich in den höhern Klassen der Gymnasien das Ziel gesetzt, den ganzen Kreis der Physik umfassen zu wollen durch Mittheilung der sogenannten Haupt-

resultate[27]). *Daher kommen die jungen Studirenden auf die Universität gewöhnlich mit dem Zeugnisse, „bekannt zu sein mit den Hauptlehren der Physik", nehmen diesen Ausdruck in jugendlicher Eitelkeit viel ernster als er gemeint ist, und glauben die Naturwissenschaft, gleich der Philologie, der Hauptsache nach, schon abgemacht zu haben auf Schulen. Erfüllt von dieser traurigen Eitelkeit wenden sie ihre Blicke ab von der fortdauernden Offenbarung Gottes in der Natur, was doppelt zu beklagen in einer Zeit theologischer, durch dergleichen Eitelkeit zum Theil herbeigeführter Wirren. Diese fortdauernden Offenbarungen Gottes in der Natur geben namentlich der Lehre von Licht und Wärme, Elektricität und Magnesismus einen eigenthümlichen, im edelsten Sinne geheimnissvollen Charakter. Darum wollen diese im raschen Fortschritte sich beständig weiter entwickelnden Lehren im strengen Zusammenhange (nicht aphoristisch, wie es allein auf Schulen möglich), sondern mit der Tendenz vorgetragen sein, den Forschungsgeist zu wecken, wodurch gerade diese Abschnitte der Physik so wichtig werden für den jungen Mediciner. Blos einige Sätze daraus, sogenannte Hauptresultate, schulmässig eingelernt zu haben macht eitel und hemmt den Forschungsgeist. — Bei Real- oder Gewerbschulen, an denen Mathematik denselben Rang behaupten soll, wie die Latinität auf gelehrten Schulen, ist man schon darum vorzugsweise auf mathematische Physik hingewiesen. Ausserdem kommt noch dazu das technische Element, worin eine höchst wichtige Quelle der schönsten neuen Entdeckungen liegt, während eben darum dieses technische Element beständig den Forschungsgeist weckt. Darum müssen, wenn die Naturwissenschaft glücklich fortschreiten soll, Techniker und Theoretiker sich gegenseitig die Hand bieten. Im höchsten Grad einflussreich sind aus diesem Grunde die sogenannten Institutions, d. h. naturwissenschaftliche Bürgergesellschaften, welche den geistigen Mittelpunkt der Gewerbthätigkeit Englands bilden. Der Royal Institution verdanken wir, abgesehn von ihrem technischen Einfluss, auch einen Davy, einen Faraday, welche sonst wahrscheinlich nur beschränktere Kreise der Wirksamkeit würden gefunden haben. Was auf diesem Wege zu leisten sei, hat der den Senkenbergischen Stiftungen sich anschliessende, von den Aerzten in Frankfurt a. M. begründete physikalische Verein gezeigt, welcher unserm erfindungsreichen und mannigfach auf das technische Leben einflussreichen Professor Dr. Böttger einen schönen Wirkungskreis eröffnete. Möchten die Lehrer an Gymnasien und Realschulen, in Verbindung mit den Aerzten und Pharmaceuten der Stadt, ähnliche Gesellschaften recht zahlreich begründen helfen. Denn für Erwachsene, die mit gereiftem Geist und mit technischen Zwecken im Auge kommen, sind naturwissenschaftliche, zur Erweckung*

---

[27]) Dagegen habe ich, selbst angestellt als Professor der Mathematik und Physik am Gymnasium in Bayreuth, im Jahr 1808 ein Programm geschrieben, worin dasselbe, was ich hier sage, noch aus andern Gesichtspunkten entwickelt und dargelegt wurde, während es sich nur allzusehr bewährt hat in neuerer Zeit.

des Forschungsgeistes bestimmte Vorträge vorzugsweise geeignet. Dies ist der Gesichtspunkt, der allgemein in England anerkannt sich herrlich bewährt. Wir in Deutschland haben, ausser der auf Belebung und Erweiterung der Technik sich beziehenden Veranlassung, noch eine besondere ärztliche zur Begründung solcher naturwissenschaftlicher Bürgergesellschaften, um nicht auch in der Homöopathie (welche naturwissenschaftlich aufgefasst zu einem Studium des polaren Gegensatzes der Krankheiten hinführen müsste) dem aller Naturwissenschaft feindlichen, herrschend gewordenen falschen Mysticismus sogleich gewonnenes Spiel zu geben. Ein grosser Aufruf für verständige Aerzte und Pharmaceuten, sowie für Lehrer an Gymnasien und Realschulen, dem von Freunden der Naturwissenschaft in Frankfurt a. M. gegebenen rühmlichen Beispiele nachzufolgen.

4. Noch eine auf die praktische Bedeutung der in vorliegender Abhandlung zur Sprache gebrachten Gegenstände sich beziehende Bemerkung will ich anreihen. Die Technik ist stets Hand in Hand gegangen mit schöner Kunst, und eben dadurch erst gehoben worden. Entschieden aber haben die Mysterien des Alterthums einen grossen Einfluss gehabt auf schöne Kunst, welche ihren Haltpunkt fand an der in symbolischer Hieroglyphe verborgenen Wahrheit. Und da es sich bei diesen symbolischen Hieroglyphen von einer naturwissenschaftlichen Zeichensprache handelt, welche (was darzuthun die Haupttendenz ist meiner Einleitung in die Mythologie) wir noch jetzt nicht entbehren können, weil sie durch Naturnothwendigkeit gegeben, wer wollte dieser streng wissenschaftlichen Hieroglyphensprache die Fähigkeit absprechen, sich zeitgemäss noch weiter zu entwickeln und auszubilden? Man sieht also, dass dieselbe auch noch in neuerer Zeit einflussreich werden kann auf zeichnende und bildende Kunst. Die gewöhnliche Behandlung der Mythologie hat der neueren Kunst mehr geschadet als genützt, indem sie keine festen naturgemässen Anhaltpunkte darbot, deren die so leicht sich verirrende dichterische Phantasie vorzugsweise bedarf. Doppelt wichtig muss es uns also scheinen, das grössere gebildete Publicum mit denjenigen Theilen der Naturwissenschaft zu befreunden, durch welche wir zu einer physikalischen Zeichensprache darum hingeführt werden, weil wir derselben zur Verständigung schlechterdings bedürfen. Denn diese unentbehrliche Zeichensprache ist es eben, welche mit der alterthümlichen symbolischen Hieroglyphe zusammenstimmt. Wenn nun also in den Oberklassen auf gelehrten philologischen Schulen schlechterdings Physik im ganzen Umfange nebenbei vorgetragen und sogar zum Gegenstande der Einlernerei (des Examinationswesens) gemacht werden soll: so kann jene symbolische Hieroglyphe wesentlich dazu mitwirken, den gewöhnlich isolirt stehenden Lehrer der Mathematik und Physik auf Gymnasien mit den Philologen zu befreunden und nach und nach den herrschend gewordenen Sinn zu verdrängen, vorzugsweise nur in grammatischer und historischer [28]) Beziehung die Schriften des

---

[28]) Aber von welthistorischer Bedeutung sind die so einflussreichen, jedoch die Schriftsprache ausschliessenden Mysterien. Und zu diesen Myste-

Alterthums lesen zu wollen. In mehr als einer Hinsicht muss es uns also wichtig scheinen, zunächst wenigstens die Physiker ins Interesse zu ziehn für symbolische Hieroglyphik. Und schon in der vorhergehenden Abhandlung, wozu hier Nachträge zu liefern sind, habe ich den Weg angegeben, wie solches gelingen könne, und werde diesen nun weiter verfolgen.

IV. Ueber ein verwickeltes, nur durch die eben bezeichnete symbolische Bildersprache mit Klarheit aufzufassendes elektromagnetisches Phänomen.

In der älteren Abhandlung, woran diese neuere sich anschliesst, machte ich (im Journ. für prakt. Chemie. B 34. S. 416.) auf ein Phänomen aufmerksam, wodurch es vielleicht nun gelingen könnte, endlich einmal (nach zwanzig Jahren) die Aufmerksamkeit, welche einseitig blos der phonetischen Hieroglyphe zugewandt, auch hinzulenken auf die dem Inhalte nach viel interessantere symbolische Hieroglyphe. Es handelt sich von einem seit dem ersten Decennio dieses Jahrhunderts wahrgenommenen Phänomen, welches dennoch fortwährend verkannt und gemissdeutet wird, weil man die symbolische Hieroglyphe, d. h. die physikalische Zeichensprache verschmäht, wodurch es allein (wie schon im Jahrbuche der Chemie und Physik von 1826 gezeigt wurde) in seiner hohen Gesetzmässigkeit und wundervollen Schönheit aufzufassen ist. Mit so grösserem Dank habe ich es anzuerkennen, dass einer der vorzüglichsten Mitarbeiter an dem nun vollendeten grossen physikalischen Wörterbuche [29], der

---

rien gehörten die auch bei Griechen und Römern einheimischen Menschenopfer, wie Lactantius (de falsa religione lib. I. cap. 31.) solches geradezu ausspricht, wodurch man sogleich versteht, warum so sparsam einzelne diese Menschenopfer betreffende Notizen nach und nach erst durchgedrungen sind. Es ist sehr dankenswerth, dass v. Lasaulx (welcher in der Weltgeschichte die gesta dei per homines sieht und in so fern das Heidenthum mit Beziehung auf das Christenthum gleichsam typologisch auffasst) mit grosser Gelehrsamkeit diese zerstreuten Notizen gesammelt in seiner Abhandlung über die Sühnopfer der Griechen und Römer und ihr Verhältniss zu dem Einen auf Golgotha. Würzburg 1841. Leicht hätte er, da er auch von Aegypten sprach, wo der Sage nach Herkules die Menschenopfer abstellte, aufmerksam werden können, dass nicht Herkules, sondern die Mysterien des Herakles (um einen Ausdruck des Lydus zu gebrauchen) gemeint seien. Eben so ist von den Orphischen Mysterien zu verstehen, was in ähnlicher Beziehung dem Orpheus nachgerühmt wird. Dasselbe lässt sich von den samothracischen (auf Herkules und die Dioskuren sich beziehenden) naturwissenschaftlichen Mysterien nachweisen, selbst hinsichtlich auf Rom, wo der Vestalische Cultus mit ihnen zusammenhing. Grund genug, um Dichter zu veranlassen, sich diesen edleren Mysterien anzuschliessen. Wir erblicken bei diesen samothracischen Mysterien schon in der allerältesten Zeit die Naturwissenschaft im Kampfe mit dem Obscurantismus, welcher auch in neuerer Zeit (man denke an die Autodafes und an die Hexenprozesse) Menschenopfer genug herbeigeführt. — Vergl. Note 26. und 14.

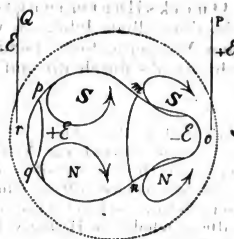
[29]) Dieses physikalische Wörterbuch blieb nämlich ganz streng bis zum Schlusse des Werkes dem B. 34. S. 413. des Journals für praktische Chemie erwähnten Princip getreu, nichts aufkommen zu lassen,

ehrwürdige Pfaff (B. 8. S. 78.) wenigstens die Abbildungen mittheilte, welche ich unter Beschreibung der elektromagnetischen Bezeichnungen von diesem Phänomen im Jahrb. d. Ch. und Ph. 1826. B. 3. (d. g. R. B. 48.) Taf. I. Fig. 13—15. und 1828. B. 3. (d. g. R. B. 54.) Taf. I. Fig. 4. gegeben hatte. Besonders die in letzterer Zeichnung zuerst gesetzmässig dargestellten vier Wirbeldrehungen scheinen auf jenen scharfsinnigen und gründlichen Physiker, welcher schon früher aus diesen Erscheinungen ein besonderes Studium gemacht, am günstigsten gewirkt zu haben, um ihn geneigt zu machen, zu meiner Ansicht überzutreten. Und gewiss, er würde die unklare Idee von „galvanisch-elektrischen Strömungen als Ursache merkwürdiger Bewegungen im Quecksilber und verschiedenen Flüssigkeiten" gänzlich aufgegeben haben, wenn ihm schon die vier gesetzmässig sich drehenden Quecksilbermagnete bekannt gewesen wären, worüber erst in demselben Jahr, in welchem jener achte Band des physikalischen Wörterbuches erschienen, eine Verständigung möglich gemacht wurde durch die auf Taf. 2. Fig. 8. meiner

---

was sich auf Urgeschichte der Physik bezieht. Darum wurde auch keine Notiz genommen von einer obwohl zur Verständigung (wenn nicht Unklarheit der Darstellung auch in der Physik, wie in einigen anderen Disciplinen, zum Princip erhoben werden soll) absolut unentbehrlichen physikalischen Zeichensprache, welcher man jedoch abhold zu sein schien, weil sie an die alte symbolische Hieroglyphe erinnerte. Und dasselbe Princip stillschweigender Beseitigung wurde ausgedehnt auf alles Naturwissenschaftliche, was mitgetheilt ist in meiner, eben jener symbolischen Hieroglyphik sich anschliessenden Einleitung in die Mythologie auf d. Standp. der Naturw. — Dennoch musste dasselbe physikalische Wörterbuch der astronomischen Zeichensprache einen besondern Artikel widmen, obwohl sie mit einer mythologischen Bilderwelt zusammenhängt. Welcher Grund war nun vorhanden, die physikalische Zeichensprache blos darum zu proscribiren, d. h. jeder Erwähnung unwerth zu halten, weil sie gleichfalls an Mythologie erinnert, da sie doch unabhängig von derselben hervorgeht aus der Natur der Sache? Nebenbei sei mir hier noch folgende Bemerkung erlaubt. Jenes Princip des Ignorirens wurde auch übergetragen auf meine Abhandlung über die Natur der (mit magnetischem Polarlichte leuchtenden) Sonne, welche blos Thatsachen zusammenstellte, deren Bedeutsamkeit im hohen Grade vermehrt wird durch die neuesten Fortschritte der Physik; — und dasselbe Schicksal traf die damit zusammenhängende ältere Abhandlung über Weltmagnetismus. Neuerdings haben aber einem damals (im Jahre 1814) unbeachtet gebliebenen, eben in dieser Abhandlung ausgesprochenen Satze „über die Natur des Saturnusringes" die Sternschnuppenschwärme, wie es scheint, allgemeine Anerkennung verschafft. Es wurde nämlich dieser Saturnusring als ein keineswegs isolirt stehender Asteroiden oder Meteormassenring aufgefasst. Zeitgemäss also möchte nun die Prüfung der umständlich im Jahrb. d. Ch. u. Phys. 1814. B. 10. S. 24. 28. 71. 82. und B. 12. S. 418. 419. dargelegten Gründe sein, welche schon vor 32 Jahren auf diese Ansicht des Saturnusringes hinleiteten. An Chladni's Schrift über Feuermeteore S. 398—402. schloss der specielle Weg der Prüfung sich an, welcher bezeichnet ist in der Abhandlung über Urgeschichte der Physik (B. 37. S. 325. desselben Journ.). Und da die magnetischen Variationsbeobachtungen so grosse Ausdehnung rings um den Erdkreis gewonnen haben: so würden wohl die damals gewünschten regelmässigen Sonnenbeobachtungen in angemessener Ausdehnung sich nebenbei nun anreihen lassen.

Einl. in d. Mythol. mitgetheilte, zur klaren Auffassung der gesetzmässigen Drehungen dieser vier Quecksilbermagnete schlechterdings unentbehrliche symbolische Hieroglyphe. Da diese vierfachen Wirbeldrehungen (wie ich schon im Jahr 1826 hervorhob) als das Grundphänomen bei jenen so mannigfachen und verwickelten Erscheinungen, von welchen es sich hier handelt, zu betrachten sind, und Stöhrer's aus drei magnetischen Magazinen zusammengesetzter elektromagnetischer Apparat in so hohem Grade geeignet ist, auf die bequemste Weise diese vierfachen Wirbel in schönster Ausbildung darzustellen: so will ich die eben erwähnte Zeichnung dieses Grundphänomens darum hieher setzen, weil es sehr wenige noch zu kennen scheinen, indem nicht in einem einzigen Lehrbuche der Physik davon die Rede ist, oder die Abbildung gegeben wird.



An diese Abbildung [30]) reiht sich nun folgende experimentelle Bemerkung. Denn darauf kommt es zunächst an, dass das Phänomen von experimenteller Seite gehörig bekannt werde.

1. Ich setze voraus, dass man vollkommen gereinigtes Quecksilber anwende, welches zuvor noch eine Zeit lang unter verdünnter Salpetersäure gestanden. Wird nun dieses von der Salpetersäure (wie gewöhnlich vermittelst eines Trichters) getrennte Quecksilber mit gemeinem kohlensauren Kali übergossen, und werden in diese Kalilösung die Platinpolardrähte getaucht, ohne das Quecksilber vorher berührt zu haben, so werden gewöhnlich (bei dem Gebrauche der langen Drahtleitung in Stöhrer's magnetoelektrischem Apparate) sogleich die vier Wirbel sich darstellen, welche man am besten sichtbar macht, indem man von einem

---

[30]) Die Abbildung erklärt sich leicht von selbst. Die punktirte Linie bezeichnet die Gränze der in ganz dünner Lage aufgegossenen kohlensauren Kalilösung, worein die Platindrähte *P* und *Q* tauchen ohne das Quecksilber zu berühren, welches bei der Eintauchung die Gestalt *omprqno* annimmt. Elektromagnetischen Gesetzen gemäss ist nämlich *NN* die nordmagnetische, *SS* die südmagnetische Quecksilber-Oberfläche, während an der unteren Fläche der entgegengesetzte Magnetismus auftritt. Daraus entstehn, indem sich das Quecksilber in eine —*E* Zone *omno* und eine +*E* Zone *mprqnm* theilt, vier sich gesetzmässig drehende Quecksilbermagnete. Die angedeutete Oxydanhäufung um *pqr* ist ebenso wie die Zonengrenze *mn*, theils veränderlich, theils mehr oder weniger in die Augen fallend; so wie auch die Wirbel in der kohlensauren Kalilösung an der —*E* Zone, nach Umständen zur Seite sich halten, oder in die Zone hinein rücken.

Stückchen Schwefel (oder Kohle, oder von beiden zugleich) kleine Staubtheilchen darauf abschabt. Wendet man Stöhrer's grössere Maschine an (mit drei Magneten, von denen jeder aus sechs Lamellen zusammengesetzt): so kann es nöthig werden, dass man wenigstens zwei Magnete mit dem Anker schliessen, auch die Raschheit der Bewegung mässigen muss, um die vier Wirbeldrehungen, wie sie hier gezeichnet, recht ausgebildet und schön darzustellen. — Man sieht daraus, dass Stöhrer's magnetoelektrischer Apparat viel kräftiger wirkt als die Voltaische Säule, womit Pfaff arbeitete im Jahr 1826, weil dieser (nach d. Jahrb. d. Ch. u. Ph. B. 48. S. 202. und 227.) unter den eben angezeigten Bedingungen, nach seinem Ausdrucke, „in der Flüssigkeit keine Spur von Strömung bemerken“ konnte. Da ich in demselben Jahre, wo Pfaff seine Versuche publicirte, mit einer viel stärkern Voltaischen Säule diese Versuche angestellt, so erinnerte ich schon damals (a. a. O. S. 331): „nicht selten sieht man, wenn man Quecksilber zwischen Flüssigkeiten elektrisirt (welches sich dabei in zwei Zonen theilt), an beiden Zonen entgegengesetzte elektromagnetische Drehungen auftreten, woraus eben die entgegengesetzten Ströme hervorgehn, wovon Herschel redet. Dieser Fall des Gleichgewichts aber ist, wie leicht begreiflich, seltener als der, wo die eine Art der Drehung die andere überwiegt, ja ganz in sich verschlingt und unwahrnehmbar macht, wenn nämlich entweder die positive oder die negative Zone des Quecksilbers vorherrschend geworden ist durch die Natur der leitenden Flüssigkeiten, oder durch andere (nun sogleich darzulegende) Umstände begünstigt“. — Ebenso bemerkte ich auch schon in einem Nachschreiben zu Nobili's Abhandlung über dieses merkwürdige, auch von diesem ausgezeichneten Physiker gänzlich verkannte Phänomen (Jahrb. d. Ch. u. Ph. B. 54. S. 66.), dass, um die vier Wirbel zu sehen, alles von der Natur und der Stärke des elektromagnetischen Apparates abhänge, dass ich sie bei Anwendung des schwefelsauren Natrons oder schwefelsauren Kalis u. s. w., aber besonders schön und lang ausdauernd bei einer Lösung von gemeinem kohlensauren Kali gesehn habe. Zugleich gab ich dann die vorstehende Abbildung dieser vierfachen Wirbeldrehungen. Um so erfreulicher war es für mich, dass Stöhrer's magnetoelektrische Maschine so vorzugsweise geeignet ist, gerade das schönste elektromagnetische Phänomen auf die leichteste und bequemste Art darzustellen, eben weil man dabei so ganz in seiner Gewalt den elektrischen Strom hat, auf dessen angemessene Kraft es ankommt, wenn die positive und negative Zone des Quecksilbers sich das Gleichgewicht halten soll. Hat dieses alle elektromagnetische Drehungen in sich vereinende Phänomen sich nur endlich Eingang in unsere Lehrbücher der Physik verschafft: so wird auch die zur Erläuterung desselben unentbehrliche elektromagnetische Zeichensprache unmöglich länger verschmäht werden können, sondern unwillkürlich sich anschliessen.

2. Wir haben bisher vorausgesetzt, das reinste mit einer dünnen Schicht kohlensauren Kalis bedeckte Quecksilber sei bei dem Durchgange des elektrischen Stromes weder vom positiven noch vom negativen Platinadrahte berührt worden. Wird aber der negative Platinadraht in dasselbe eingetaucht, so ist eben dadurch

die ganze Masse des Quecksilbers negativ elektrisirt, und es werden also die für die negative Zone *onmo* in unserer Figur gezeichneten Wirbeldrehungen nun sich über die ganze Quecksilberfläche verbreiten. Zieht man nach einiger Zeit den Platinadraht aus dem Quecksilber zurück: so werden dieselben negativen Drehungen wenigstens noch eine Zeit lang, ja zuweilen bis zur Ermüdung lang sich über die ganze Fläche des Quecksilbers ausdehnen. Die negative Ladung dauert also fort. Und diess war das einzige Phänomen, welches Pfaff bei der Voltaischen Säule, die er anwandte, wahrnehmen konnte, abgesehn von den Modificationen, welche durch Anwendung anderer Flüssigkeiten, als des kohlensauren Kali, herbeigeführt werden. An jene negative Ladung aber lässt, wie nachgewiesen wurde (im Journ. für prakt. Chemie B. 34. S. 415. ff.), eine interessante Umdrehung der Wirbelbewegungen sich anreihen, wodurch die Bedeutsamkeit der elektrischen Ladung, auf welche zuerst Ritter die Aufmerksamkeit hingelenkt, in leichtester und schönster Weise dargethan werden kann. Man möchte sich wundern, dass dieses schöne Ladungsphänomen nicht längst beobachtet wurde. Aber selbst die lebhaften Zuckungen des Queksilbers, welche General von Hellwig bald nach Construction der Säule Volta's beobachtet (wie sie umständlich im Jahrb. d. Ch. u. Phys. 1826. B. 48. S. 341. beschrieben und nun leicht ableitungsfähig sind aus den Drehungen der vorhin in Note 30. erwähnten Quecksilbermagnete) diese lebhaften Bewegungen der ganzen Quecksilbermasse mussten nicht selten den gehörigen Grad der Ladung der Quecksilberoberfläche unmöglich machen. Bei Stöhrer's Maschine ist es leicht, durch Anlegung der Anker an die Magnete, oder langsamere Drehung, die Heftigkeit der Quecksilberbewegungen zu vermindern. Dennoch würde sich dieses überraschende Ladungsphänomen schon längst auch bei dem Gebrauche der gewöhnlichen Voltaischen Säule dargestellt[31]) haben, wenn man sich dazu eingerichtet hätte, sogleich nach Aufhebung der primitiven Kette die secundäre schliessen zu können. Zu diesem Zweck ist es blos nöthig, Quecksilbergefässe einzuschieben, wozu am besten etwas grössere Korkstöpsel geeignet, in denen man mit Quecksilber gefüllte

---

[31]) Wirklich ist die Ladungskette als im fortdauernden Kampfe mit der primitiven Kette anzusehen (was, wohl erwogen, allein schon den wunderlichen Streit der Contact-Theorie mit der chemischen Theorie bei der Voltaischen Säule hätte beseitigen müssen, wovon umständlicher die Rede war in meiner Einl. in d. Mythol. S. 277—279.); und als Ausdruck dieses Kampfes, bei dem sogar momentan die secundäre Kette siegen kann ist wahrscheinlich ein bei jenen elektromagnetischen Drehungen sich darstellendes Phänomen zu betrachten, welches im Jahrb. d. Ch. u. Ph. 1828 B. 3. oder d. g. R. B. 54. S. 68. Note mit folgenden Worten von mi bezeichnet wurde: „Man sieht zuweilen unter gewissen Bedingungen (besonders sah ich diess sehr schön bei dem Gebrauche des schwefelsauren Kali in gesetzmässigen kürzeren oder längeren Perioden die ganze Quecksilbermasse sich umwälzen, nachdem die positive Zone ganz vorgerückt ist und die negative verdrängt hat, während nach der Umwälzung diese negative Zone wieder zum Vorschein kommt. Solche Erscheinungen gaben wohl Veranlassung, dass Herschel und Nobili Alles blos von Bewegung des Quecksilbers ableiten wollten, wodurch das Wasser lediglich mit fortgerissen werde.“

Vertiefungen anbringt, weil der Kork bequem zugleich zur Haltung der eingesteckten Leitungsdrähte dienen kann. Jedoch diese specielle Einrichtung, um nach Unterbrechung des elektrischen Stromes sogleich die secundäre Kette schliessen zu können (wozu auch blos der Gebrauch von Drahtschnuren, statt der gewöhnlichen Schliessungsdrähte, hätte hülfreich werden können), diese specielle Einrichtung hatte man versäumt. Wirklich konnte ich aber mit Stöhrer's magnetoelektrischer Maschine den nöthigen Grad der negativen Ladung der Quecksilberoberfläche schneller hervorbringen, als mit drei (nach einigem Gebrauche zu anderen Zwecken immer noch sehr lebhafte Funken und lebhafte Wasserzersetzung bewirkenden) Kohlencylindern von Bunsen. Denn länger als ich erwartet hatte, musste ich mit dieser kleinen Kohlenbatterie das Quecksilber negativ elektrisiren, bevor das beschriebene schöne Ladungsphänomen, welches durch umgekehrte Wirbeldrehung sich darstellt, auf eine deutliche und lebhafte Weise hervortrat. Allerdings auch mit Stöhrer's magnetoelektrischer Maschine wird man diese umgekehrten Wirbeldrehungen nicht sogleich sehn, wenn man zuvor das Quecksilber positiv elektrisirt hat und dann nach Zurückziehung des positiven Drahtes den negativen nur kurze Zeit einwirken liess. Denn offenbar eine gewisse Stärke der negativen Ladung (wobei, wie schon früher erwähnt, auch der Kaliumgehalt des im kohlensauren Kali negativ elektrisirten Quecksilbers in Betracht kommen kann) ist nothwendig zum ersten Auftreten der Erscheinung, die aber, wenn sie einmal eingetreten, sich leicht wiederholt, so dass alsdann, wie gleichfalls schon von mir hervorgehoben wurde, die entgegengesetzten Wirbeldrehungen der Ladungskette zwei bis drei Minuten lang fortdauern können, wenn das Quecksilber auch nur etwa zehn Secunden lang elektrisirt wurde.

3. Mit solchem negativ geladenen Quecksilber wird man aber nicht sogleich die vier Wirbeldrehungen hervorbringen können. Erst wenn man dieses negativ geladene Quecksilber eine Zeit lang zwischen gemeiner kohlensaurer Kalilauge elektrisirt hat, wird dem negativen Platindrahte gegenüber die positive Zone mit den ihr entsprechenden Wirbeln wieder zum Vorschein kommen (früher oder später in Abhängigkeit von der Stärke des elektrischen Stroms); während dann diese Wirbel sich immer weiter und weiter ausdehnen. Um schneller zum Ziele zu gelangen, vermindert man die zu starke negative Ladung des Quecksilbers durch positive Ladung von so kurzer (nur auf wenige Secunden beschränkter) Dauer, dass noch keine Oxydation des Quecksilbers eintritt. Man wird sich dabei leicht überzeugen, dass es auf eine Art von Abstimmung ankommt, damit weder die Ausdehnung der positiven Zone, noch die der negativen zu gross sei, sondern beide sich mehr oder weniger das Gleichgewicht halten, wie z. B. vorstehende Zeichnung es zeigt, welche, wie gesagt, auf die Auflösung des gemeinen kohlensauren Kali sich bezieht. Denn höchst mannigfach und verwickelt kann die Erscheinung durch Anwendung verschiedener Flüssigkeiten gemacht werden. Umständlich sind die Gesetze, denen gemäss sie bei verschiedenen sauren, oder alkalischen, oder salzigen Auflösungen erfolgt, schon im Jahr 1826 in jener vorhin angeführten Abhandlung von mir entwickelt worden. Aber davon will ich eben so wenig etwas wiederholen, als ich

von Erklärung des durch obige Abbildung dargestellten Grundphänomens etwas sagen kann, ohne Hülfe der physikalischen Zeichensprache, d. h. der symbolischen Hieroglyphensprache, wodurch ich in der Mythol. a. d. Standp. d. Naturw. S. 281. eben so kurz als klar jenes Grundphänomen erläuterte, welches allerdings in den Drehungen der vier sich ausbildenden Quecksilbermagnete besteht. Diese vier Quecksilbermagnete sind es, welche nicht sowohl die darüber ausgegossene Flüssigkeit mit sich fortreissen, als vielmehr die (wie nachgewiesen a. a. O.) nach analogem elektromagnetischen Gesetz erfolgenden gleichartigen Wirbeldrehungen dieser Flüssigkeit erleichtern und befördern, und zwar, wie man leicht sieht, nothwendig in dem Grade fördern, dass unmöglich aussen (nach Herschel's Weise) hingehaltene Magnete irgend eine wahrnehmbare Modification in den Drehungen herbeiführen können, selbst abgesehn davon, dass den vier, theils mit dem Nordpol, theils mit dem Südpol an der Oberfläche sich drehenden, und zwar mit jedem Pole theils rechts, theils links sich drehenden Quecksilbermagneten, wo nicht vier, doch wenigstens zwei Stahlmagnete entgegenzuhalten wären, um denkbarer Weise eine Modification in den Drehungen herbeizuführen. Ich sage „denkbarer Weise"; denn praktisch unausführbar bliebe der Versuch schon darum, weil die so nahe gehaltenen entgegengesetzten Pole der Stahlmagnete sich im höchsten Grade schwächen würden, was nicht der Fall ist bei den immer mit neuer Kraft aufblitzenden Polen der Quecksilbermagnete.

Anmerkung. Zufälligerweise befinde ich mich in der Lage, über eine Anzahl Exemplare des Jahrbuchs d. Chemie u. Physik für 1826 [12])

---

[12]) Dasselbe bildet mit dem eben bezeichneten Titel und mit besonderm Register versehen ein für sich bestehendes Ganze von drei (acht Kupfertafeln enthaltenden) Bänden, welche noch jetzt im herabgesetzten Ladenpreise sechs Thaler kosten. In der Art in sich abgeschlossen erschienen damals einige Jahrgänge des Journals für Ch. u. Ph. als eine Zeitschrift des im Leibnitzischen Sinne gestifteten Vereins zur Verbreitung von Naturkenntniss und höherer Wahrheit. Zugleich zeigt jenes Journal d. Ch. u. Ph. für 1826. B. 2. S. 132—135., auf welche höchst achtbare Weise sich die kaiserliche Akademie der Wissenschaften zu Petersburg für jenen Verein interessirte, indem sie beschloss, den von Petersburg aus nach Peking von Zeit zu Zeit abgehenden theologischen Missionen im Leibnitzischen Geiste naturwissenschaftlich gebildete Männer anzureihen, wie solches seit der Zeit wirklich geschah mit Gewinn für mannigfache wissenschaftliche und andere gute Zwecke. Der erste Schritt ist also geschehen zu einer wissenschaftlichen Propaganda, wozu Seetzen von Aegypten aus alle Europäischen und Amerikanischen Akademien aufrief (s. Litt. Bl. d. Hamb. Börsenh. v. 13. Mai 1840 oder Allg. Anz. d. Deutsch. vom 20. und 21. Mai 1840). Im gleichen Leibnitzischen Geiste wurde neuerdings eine Medical Missionary Society of Edinburgh begründet, während (nach Froriep's Notizen, April 1845. B. 34. S. 122.) diese medicinische Missionsgesellschaft in Edinburgh den Zweck hat, „in Beziehung auf medicinische Missionen Kenntnisse zu verbreiten, ähnliche Institutionen zu unterstützen und die theologischen Missionen mit ärztlichen Agenten zu versorgen, soweit die disponibeln Geldmittel es verstatten." In meiner Denkschrift zur Säcularfeier der Univ. Erlangen findet sich einleitungsweise die, wie es scheint, wenig bekannt gewordene Notiz, dass die Berliner Universität

disponiren zu können, worin zuerst jene eben erwähnte physikalische Zeichensprache, entwickelt aus der Natur der Sache, dargelegt wurde. Und unmittelbar führte diese Symbolsprache dann hin zur gesetzmässigen Auffassung jenes verwickelten, alle Arten elektromagnetischer Drehungen in sich vereinenden Phänomens, wovon so eben die Rede war. Abgesehn aber von allen in demselben Jahrgange 1826 mitgetheilten dieser Zeitschrift eigenthümlichen physikalischen Abhandlungen, ist ohnehin es bekannt genug, dass wohl Compendien veraltern, nicht aber die Zeitschriften, worin die Originalab-

---

das Vermögen jenes am Grabe meines Bruders zur Begründung naturwissenschaftlicher Pflanzschulen im Leibnitzischen Sinne gestifteten Vereins übernommen habe, und die Universitätsquästur in Berlin bereit sei, Beiträge zur Vermehrung des kleinen Stiftungscapitals anzunehmen, um späterhin ein Reisestipendium anreihen zu können. (Vergl. Hitzig's Annalen etc. fortg. von Schletter, B. 35. S. 176—179, wo ein in letzterer Beziehung sehr beachtungswerthes Actenstück mitgetheilt.) Zu Göttingens Ruhm aber gereicht es, dass wirklich ein Reisestipendium für Naturforscher dort begründet und, nach Blumenbach's Namen genannt, mit der Universität in Verbindung gebracht wurde. Uebrigens stammt die grossartigste Stiftung der Art schon aus der ersten Hälfte des vorigen Jahrhunderts, angereiht der Oxforder Universität. Denn die Radcliffe's Travelling Fellowships sind für zwei von der Universität Oxford auszuwählende, mit Natur- und Heilkunde vertraute junge Gelehrte bestimmt. Jeder von ihnen erhält jährlich 300 Pfd. Sterl., und zwar zehn Jahre lang, unter der Bedingung, wenigstens fünf Jahre in einem fremden Lande jenseits der See zu verweilen, wodurch offenbar die Anlegung naturwissenschaftlicher Pflanzschulen eingeleitet ist. Auch an der Universität Cambridge sind seit dem Jahr 1767 zwei Reisestipendien begründet, jedes zu 100 Pfd. Sterl. jährlich, welche drei Jahre lang bewilligt werden unter der ausdrücklichen Verpflichtung, mit der Universität durch Reiseberichte in Verbindung zu bleiben. — Ohnehin binden mehrere englische Fellowships (die überhaupt vergleichbar den in Leipzig sogenannten Collegiaturen) nicht geradezu an den Aufenthalt auf der Universität, und können sonach als Reisestipendien benutzt werden. Offenbar also würde es gut sein, auch den deutschen Universitäten (nach manchen betrübenden Ereignissen) wieder einen neuen geistigen Aufschwung zu geben durch Anreihung von Reisestipendien mannigfacher Art. Solches wäre angemessen unserer Zeit, zu deren grösstem Ruhm es gehört, die Verbindung der Menschen durch Dampfschiffe und Eisenbahnen mehr gefördert zu haben, als die Vorzeit solches nur zu ahnen vermocht. — Da über diese und verwandte Gegenstände mancherlei zur Sprache gebracht im Jahrbuche d. Ch. u. Ph. für 1826, namentlich auch in einem auf obengenannten Verein sich beziehenden Anhange zu demselben: so kann die Vertheilung von 100—150 Exemplaren dieses Jahrbuchs an öffentliche Bibliotheken vielleicht auf mehr als eine Weise dazu beitragen, mich mit gleichgesinnten Männern in Verbindung zu bringen, welche sich für Wahrheiten interessiren, die ich um so weniger blos stillschweigend möchte beseitigen lassen, je beachtungswerther sie mir scheinen gerade in der gegenwärtigen Zeit. Wenigstens dazu, dass sie endlich zur Sprache kommen und zur Prüfung gelangen mögen, wünsche ich am Schlusse meines Lebens noch etwas beigetragen zu haben (vergl. die ältere Abhandlung, woran die gegenwärtige sich anschliesst, im Journ. für prakt. Chemie B. 34. S. 414. Note 3.). — Für dieselbe Sache, wovon hier die Rede ist, bieten noch ganz andere, höchst beachtungswerthe Gesichtspunkte sich dar bei näherer Betrachtung der in der Recension von Schubert's Spiegel der Natur in der Allgem. Litt. Zeit. 1846. Mai. No. 99. und 100. zusammengestellten Thatsachen.

handlungen sich befinden, worauf jene sich beziehn. Unter diesen Umständen scheint es mir zweckmässig, dem gemäss, was im dritten Abschnitte vorliegender Abhandlung zur Sprache kam, jene eben erwähnten Exemplare des Jahrb. d. Ch. u. Ph. als ein Geschenk zu vertheilen an Bibliotheken für Gymnasien, oder Realschulen, oder naturwissenschaftliche Vereine, wie sie vorhin mit Beziehung auf das nachahmungswerthe Beispiel der Institutions Englands erwähnt wurden, und zu deren zahlreicher Entstehung auch bei uns es mir sehr lieb sein würde, etwas beitragen zu können. Zum Zwecke der angebotenen Vertheilung von 100—150 Exemplaren jenes Jahrbuchs ist es blos nöthig, dass die Vorsteher solcher Anstalten, welche irgendwo in unserm deutschen Vaterlande geneigt sind, von diesem Anerbieten Gebrauch zu machen, mir den Weg der Zusendung in portofreien Briefen bezeichnen. Zugleich aber ist von der mit der Anstalt in Verbindung stehenden Buchhandlung eine unserer Buchhandlungen hier in Halle durch einige beiliegende Zeilen zu beauftragen, dass sie die Verpackung und Uebersendung besorgen möge. — Ein erfreuliches Zeichen der Zeit ist der „unter Leitung Seiner Königlichen Hoheit des Kronprinzen Maximilian von Baiern stehende Verein zur Verbreitung nützlicher Kenntnisse durch gemeinfassliche Schriften", wodurch so eben eine neue Ausgabe von Runge's Grundriss der Chemie (wie der Titel des Buches solches ausspricht) veranlasst wurde. Hoffentlich werden im Bunde mit diesem wohlthätigen Vereine angemessene Regenerationen der alten Stadtbibliotheken und andere auf Technologie und Naturwissenschaft sich beziehende städtische Sammlungen wirken, wie sie ohnehin zum Gedeihen der sogenannten polytechnischen Gesellschaften unentbehrlich sind. Ein neuer Aufruf liegt zugleich darin, wenigstens die an Gymnasien und Realschulen schon vorhandenen Sammlungen zu benützen im Geiste jener oben erwähnten nicht blos das Bedürfniss der Jugend, sondern vorzugsweise der Erwachsenen ins Auge fassenden Institutions Englands. Und in dieser Beziehung kann in unserm Vaterlande als Vorbild dienen der von den Aerzten in Frankfurt am Main begründete physikalische Verein, von welchem vorhin (Anmerkung zu III. 3.) die Rede war. Da ich stets zur Förderung solcher Zwecke in meinem engern Kreise zu wirken bemüht war: so würde es mir erfreulich sein, im Geiste des obigen Vereins zur Beförderung derselben Zwecke auf dem soeben bezeichneten Wege mitwirken zu können.

Anhang.

Die vorliegende Abhandlung war, wie schon in der Einleitung gesagt, ursprünglich als Nachtrag geschrieben zu der „über Platina, Altes und Neues", welche im Journ. für prakt. Chem. B. 34. S. 385—420. erschienen. Unter dem Titel „nachträgliche Bemerkungen über Platina, Elektron und verwandte Gegenstände" sollte sie in demselben Journal publicirt, oder wenigstens als Anhang zu demselben ausgegeben werden, als eine Beilage und zwar, wenn es nöthig schiene (weil allerdings darin nicht populäre, vielmehr heterodoxe, seit zwanzig Jahren von jeder unbefangenen Prüfung ausgeschlossene Wahrheiten aufs neue zur Sprache kommen sollten) als eine auf Kosten des Verfassers zu druckende Beilage. Da solches nicht zu erreichen gewesen: so erhielt im Geiste des vorliegenden, mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren

Unterrichtsanstalten herausgegebenen Archivs für Mathematik und Physik die Abhandlung nicht blos eine ihren Inhalt schärfer bezeichnende Ueberschrift, sondern es wurde auch der dritte Abschnitt durch einige Zusätze erweitert. Denn nun geziemte es sich, noch andere praktische Gegenstände zur Sprache zu bringen als blos praktisch chemische, worauf der vierte die wundervollen galvanischen Figuren Erman's (durch Nachweisung ihrer gleichbleibenden gesetzlichen Darstellung) wieder in ihre Rechte einsetzende, und noch mehr der fünfte Abschnitt dieser Abhandlung sich bezog, worin einzig und allein praktisch chemische Gegenstände zur Sprache kamen unter der Ueberschrift: „über die praktische Bedeutung der hydroelektrischen Ladung.“ So eng sich derselbe den vorhin zur Sprache gebrachten schönen Ladungsphänomenen anschliesst: so geht er doch zu sehr auf Einzelnheiten bei Construction elektrischer Batterien ein, als dass er zu der enger begrenzenden Ueberschrift, welche nun die vorliegende Abhandlung erhalten hatte, noch passen könnte. Daher spare ich, was zur früheren Publication bestimmt war, für eine spätere auf, und reihe unter dem Titel eines Anhangs nur Zeitgemässes an, dessen Publication nicht allzulange zu verschieben ist.

I.

1. Nachdem nämlich die vorliegende Abhandlung schon ihre neue Bestimmung erhalten hatte: so hat sich die praktisch chemische Bedeutung dessen, was ich über hydroelektrische Ladung im Journ. f. prakt. Chem. zu publiciren angefangen, und darin auch weiter fortzusetzen beabsichtigt hatte, erst recht herausgestellt. Durch einen eigenthümlichen Zufall waren nämlich selbst Versuche in Vergessenheit gekommen, welche Volta gemeinschaftlich mit Brugnatelli über sogenannte thermoxydirte Kohle angestellt, und Brugnatelli in einer an Gehlen (s. dessen Journ. d. Chem. u. Phys. 1806. B. 2. S. 553—563.) gesandten kleinen Abhandlung mitgetheilt hatte. Diese thermoxydirte Kohle war den Versuchen Volta's gemäss das erste hoch über den edlen Metallen stehende Glied am negativen Pol seiner Säule; ihr schloss zunächst thermoxydirtes Gold sich an. Viel tiefer steht, durch mehrere fehlende Glieder getrennt, krystallisirtes schwarzes Manganoxyd, dem sich alsdann Graphit, gemeine Kohle, Gold, Silber, Platin, Kupfer der Reihe nach anschliessen. Den Ausdruck „thermoxydirt“ wählte Brugnatelli gemäss einer theoretischen Ansicht von der Verbindung des Wärmestoffes mit Oxygen in der rauchenden Salpetersäure, und beachtungswerth ist besonders folgende von ihm gemachte Beobachtung: „Setzt man mit Salpetersäure befeuchtete Kohle dem Sonnenlicht aus, so entwickelt sie oxydirtes Stickgas und bleibt zuletzt völlig geschmacklos zurück, wobei sie sich vortrefflich thermoxydirt.“ — Diesen Versuch Brugnatelli's wiederholte ich sogleich im Jahr 1806; und noch jetzt besitze ich aus jener Zeit solche sogenannte thermoxydirte (d. h. elektrisch geladene) Kohle, die als negativer Leiter mit Zink combinirt sehr kräftig wirkt. Mein Freund Seebeck, dem ich im Jahr 1807 solche Kohle mitgetheilt hatte, hob sie wegen ihrer vortrefflichen

Wirksamkeit bis zum Jahr 1822 auf, wo er sie in thermomagnetischer Beziehung prüfte; und sie zeigte sich, wie er in seiner Abhandlung über Thermomagnetismus hervorhebt, unter allen von ihm geprüften Kohlenarten einzig und allein wirksam, namentlich mit Kupfer, Silber, Zink. Ich führe diess an, damit man sehe, wie ausdauernd die elektrische Ladung bei dieser Kohle ist. Denn dass die sogenannte thermoxydirte Kohle als eine elektrisch geladene Kohle zu betrachten sei, geht daraus hervor, dass sie auch durch positive Elektrisirung an der Voltaischen Säule gewonnen wird. Schon Volta und Brugnatelli machten auf ihre ausdauernde Wirksamkeit aufmerksam, während die hydrogenirte (am negativen Pole der Säule erhaltene) Kohle nur von sehr kurzer Dauer ist. Daran schlossen sich nun in jenem letzten, auf die „praktische Bedeutung der hydroelektrischen Ladung" sich beziehenden Abschnitte meiner Abhandlung mannigfache Betrachtungen an, namentlich mit Beziehung auf Bunsen's Kohlenbatterie und Grove's Platinakette. Man kann nämlich, wie ich zeigte, das Experimentiren mit Bunsen's Kohlenbatterie viel bequemer machen, besonders wo es auf den Gebrauch einer grössern Anzahl von Gliedern ankommt, wenn man die Kohle zuvor nach Brugnatelli's Weise thermoxydirt. Auch auf die gewöhnliche Voltaische Säule kann man diese Art der Ladung anwenden. So genügen z. B., um die in Abschnitt IV. vorliegender Abhandlung mitgetheilten elektromagnetischen Drehungen des Quecksilbers (in Ermangelung von Stöhrer's magnetoelektrischem Apparat) sehr schön zu sehn, allein zehn Glieder einer Säule aus runden zusammengelötheten Zink- und Kupfer Platten von etwa 5—6 Zoll im Durchmesser mit zwischengelegten in mässig schwefelsaurem Wasser getränkten Pappen, wenn man die Zinkflächen Tags zuvor mit Aetzkalilauge benetzt hat, welche darauf eintrocknen mag, unmittelbar aber vor dem Aufbau der Säule mit einer in starkes Scheidewasser getauchten Feder über die Kupferflächen hinstreicht, welche dadurch zugleich metallisch glänzend und elektrisch geladen werden. Gewiss würde rauchende Salpetersäure mit Schwefelsäure gemischt (deren eigenthümliches Verhalten zu Kupfer am positiven Pole der Säule schon die Aufmerksamkeit erregt hat [33])) noch kräftiger wirken, um Kupfer durch elektrische Ladung zu dem Rang eines viel edleren Metalls zu erheben, während Zink durch Befeuchtung mit Aetzkalilauge zum Rang eines noch unedleren Metalls in der galvanischen Kette herabgebracht wird.

2. Die Erinnerung aber an die neuen elektrochemischen Eigenschaften, welche Brugnatelli der Kohle durch Salpetersäure mitgetheilt, mussten ganz besonderes Interesse gewinnen, nachdem die neuen Eigenschaften bekannt wurden, welche die Baumwolle durch rauchende Salpetersäure (oder noch besser durch mit concentrirter Schwefelsäure gemischte rauchende Salpetersäure) erhält. Und so wie die thermoxydirte Kohle sich dem Ansehn nach nicht von gewöhnlicher Kohle unterscheidet: so ist auch die

---

[33]) Vgl. Grove's Beobachtung im Phil. Mag. Ser. III. Vol. XV. p. 292. übers. in Poggendorff's Annalen d. Phys. u. Chem. B. 49. S. 600.

thermoxydirte Baumwolle (oder Schiessbaumwolle) dem Ansehn nach von gewöhnlicher Baumwolle nicht zu unterscheiden. Während nun diese Schiessbaumwolle vollständig abbrennt in der Flinte, besteht der Hauptfehler unsers Schiesspulvers darin, dass es nicht vollständig abbrennt, sondern bei dem Schiessen zum Theil unverbrannt herausgeworfen wird. Dieser Fehler liesse sich also vielleicht durch Anwendung der thermoxydirten statt der gemeinen Kohle bei der Bereitung des Schiesspulvers beseitigen. Die lange Ausdauer jener thermoxydirten oder elektrisch geladenen Kohle (wie Stücke zeigen, die ich vierzig Jahre lang aufhob) käme dabei besonders in Betrachtung, so wie der Umstand, dass diese thermoxydirte Kohle keineswegs Feuchtigkeit anzuziehen scheint, wie die Schiessbaumwolle. Vorzüglich beachtungswerth aber muss uns nun das sogenannte Ueberbrennen der Kohle bei Bereitung des Schiesspulvers vorkommen. Denn gewiss wird niemand glauben, dass die Kohle, um gutes Schiesspulver zu geben, noch zum Theil hydrogenirt[34]) sein müsse, wenn er erwägt, dass diese hydrogenirte Kohle von so kurzer Dauer ist. Vielmehr scheint die merkwürdige Thatsache, dass in Cylindern gebrannte Kohle, wenn sie gut ausgebrannt ist, sehr schlechtes Schiesspulver giebt, während fast viermal so starkes erhalten wird, wenn man die Erhitzung unterbricht, sobald die Flamme an den Cylindern anfängt, sich rein blau zu zeigen; diese Thatsache scheint dafür zu sprechen, dass selbst das Kohlenoxydgas im gleichen Sinne wie Salpetersäure (nur schwächer) eine Thermoxydirung der Kohle (oder elektrische Ladung im Sinne Ritter's) bewirke. Und so erhalten wir bei Combination der thermoxydirten Kohle Brugnatelli's mit der thermoxydirten Baumwolle[35]), wenn diese letztere auch nicht sogleich das Schiesspulver zu verdrängen vermag, doch von ihr Anleitung zur Vervollkommnung desselben.

---

[34]) Diese Ansicht spricht selbst der gründliche Kenner des Schiesspulvers, Moritz Meyer, aus in Erdmann's Journ. f. techn. u. ökonom. Chem. 1831. B. 2. S. 528., wo er also sich ausdrückt: „Befreit man die Kohle ganz von Wasserstoff, so ist sie bekanntlich nicht mehr brennbar. Bei nicht hinreichender Aufmerksamkeit kann man es bei Cylinderverkohlung leicht zum Ueberbrennen bringen. Nach einigen in Ostindien angestellten Versuchen gab Schiesspulver mit in Cylindern vollkommen ausgeglühter Kohle eine Wurfweite von 52 Schritt und dasselbe Pulver mit gut gebrannter Kohle 200 Schritt. Wenn man aber aus den Cylindern die Kohle herausnimmt, sobald die Gasflamme anfängt, sich rein blau zu zeigen (Kohlenoxydgas), so steht ein Ueberbrennen nicht zu fürchten.“

[35]) Vgl. auch was über die merkwürdige Entdeckung Schönbein's und Böttger's zur Sprache kam in der Hallischen naturforschenden Gesellschaft am 7. Nov. 1846, und mitgetheilt ist im Intelligenzblatt zur Allg. Litt. Zeit. Decbr. 1846. N. 69. S. 564. 565. Ich hebe daraus noch folgende Stelle aus: „Dazu, dass die von Brugnatelli und Volta über thermoxydirte Kohle im Journ. d. Chem. u. Phys. mitgetheilte Beobachtung in Vergessenheit kommen konnte, trug wesentlich bei, dass vom Jahr 1806—1810 kein Register dieses Journals vorhanden ist; ebenso fehlt es den letzten 15 Bänden von 1829—1833. Möchte sich ein junger Mann entschliessen, ein Register über das ganze Journal von 1806 — 1833 zu bearbeiten, blos mit Beziehung auf die Columnentitel, wodurch es eben so kurz als brauchbar werden würde, da diese Columnentitel wechseln mit dem wechselnden Inhalte der Abhandlung.“

II.

1. Noch ein anderer praktisch chemischer Gegenstand kam im letzten Abschnitte dieser ursprünglich zur Publication im Journal für praktische Chemie bestimmten Abhandlung zur Sprache, worüber Mittheilungen noch länger hinauszuschieben nicht zweckmässig wäre. Es handelt sich auch hier von in Zeitungen besprochenen, gleichfalls im Grossen und gleichfalls zum Kriegsgebrauch anwendbaren Dingen. Als ich nämlich den letzten Abschnitt jener Abhandlung niederzuschreiben im Begriffe gewesen, da war in den Zeitungen (im März vorigen Jahres) die Rede „von einem der Staatsbehörde für die Summe von 36000 Thalern angebotenen Geheimniss eines galvanoplastischen Kanonengusses, wodurch die Kanone ohne weiteres fertig geliefert und ihre Ausdauer bedeutend gesteigert werden soll.“ Höchst achtbare Namen von Männern waren genannt, welche, zur Prüfung der Sache aufgefordert, sich beifällig darüber erklärt. Diess musste mich nothwendig zu folgender Note veranlassen, deren baldige Publication in dem bezeichneten wissenschaftlichen Zusammenhange mir schon damals willkommen gewesen wäre. Schon in der Einleitung zur vorliegenden Abhandlung war nämlich davon die Rede, dass bei der Bildung des festen Cämentkupfers durch jene constante Kette, von welcher die Galvanoplastik abhängig, unter gewissen (im Journal für praktische Chemie B. 34. S. 402—408 näher bezeichneten) Bedingungen merkwürdige Zuckungen der Magnetnadel im Multiplicator entstehn, welche als abhängig zu betrachten sind von krystall-elektrischen Beziehungen, und an die in andern Fällen bei Krystallisationen (den schönen Versuchen Rose's gemäss) entstehenden Lichtblitze uns erinnern. Diesen blitzartig eintretenden sehr lebhaften krampfartigen Zuckungen bat ich wenigstens da einige Aufmerksamkeit zu schenken [36]),

[36]) Man kann den überraschenden Versuch leicht zu einem Collegienversuche machen. Denn ob man gleich nicht den Zeitpunkt zu bestimmen vermag, wo die von Bildung festen Cementkupfers abhängigen Zuckungen eintreten: so wirkt doch der höchst einfache (im Journ. f. prakt. Ch. B. 34. S. 401. abgebildete) Apparat, einmal aufgestellt, sehr lange Zeit fort. Man darf also die am besten aus mehreren Gliedern (welche man beliebig in die Combination aufnehmen oder partiell schliessen kann) bestehende Wach'ische Kette, verbunden mit einer secundären Platinakette und einem empfindlichen Multiplicator, auf einem feststehenden, an der Wand befestigten Repositorium nur ruhig und ungestört stehen lassen. Das Ungestörte bezieht sich aber keineswegs darauf, dass nicht von Zeit zu Zeit durch Aushebung eines Leitungsdrahtes aus einer von den Quecksilberschalen (wozu Aushöhlungen in grössern Korken dienen können, welche zugleich die Leitungsdrähte festhalten) die Kette geöffnet werde, was vortheilhaft zu sein scheint. Es werden sich dann Zuckungsperioden auch in der Zeit einstellen, wo die Studirenden ins Collegium kommen, so dass nebenbei diese merkwürdigen, von Krystallelektricität abhängigen Zuckungen (vor oder nach der Vorlesung) den Einzelnen mit allen den verschiedenen Modificationen der Erscheinung gezeigt werden können. Zu diesen Modificationen gehört die schon von mir hervorgehobene Empfindlichkeit gegen die leiseste, auf den mit Cämentkupfer umwachsenen Zinkdraht wirkende Erschütterung, wozu (wenn eine

wo sie nebenbei sich ohne Mühe einleiten lassen, namentlich bei galvanoplastischen Versuchen, da hier vielleicht noch aus andern Gründen die Einschiebung einer secundären Kette in gewissen näher zu studirenden Fällen zweckmässig sein könnte. Und in diesem Zusammenhange war folgende Note meinem Manuscripte beigefügt:

„Wenn die Galvanoplastik sich nicht auf die bei Darstellung fester Metallvegetationen auf nassem Wege zu erhaltenden Krystalle, sondern auf Nachbildung bezieht, wie die Natur schon bei Afterkrystallen sie zeigt: so ist für die Schärfe der Nachbildung offenbar der sogenannte amorphe Zustand günstiger als der krystallinische. Das Studium der Bedingungen, welche die Krystallisation mehr oder weniger begünstigen, wird also nun auch technisch interessant in galvanoplastischer Beziehung. Als im hiesigen chemischen Laboratorium (wie das Jahrb. d. Chem. u. Phys. 1830. B. 1. d. g. R. B. 58. S. 43 ff. zeigt) zuerst kunstgemäss nach Willkür, in Abhängigkeit von einem zuvor in solcher Weise noch nicht eingeleiteten constanten galvanischen Strome, dessen Stärke man in seiner Gewalt haben konnte, Kupfervegetationen in metallischem Zusammenhange dargestellt wurden, trug man diese für die krystallelektrische Theorie so wichtige neue Thatsache auf andere Metalle, namentlich Silber, Zinn, Antimon, Wismuth über, freute sich der gewonnenen schönen Kupfer- und Silber-Krystalle, sowie anderer, den krystallinischen sich anschliessender, dendritischer Gebilde, wie die Natur sie liefert, die Kunst aber bisher noch nicht in fester Gestalt darzustellen vermocht. Die Bedingungen ihrer Entstehung zu studiren schien die Hauptaufgabe, worauf es ankomme. In gleichem Geiste wiederholte ein rühmlich bekannter Chemiker, Göbel in Dorpat,

---

Zuckungsperiode herannaht) selbst ein Hauch dienen kann auf den dünnen übersilberten Kupferdraht, welcher zur Vermittelung der Leitung an dem Zinke befestigt ist. — Diese Erschütterung wirkt analog dem leisen Hinrühren an Krystalle in der Periode ihrer leuchtenden Bildung, z. B. bei Rose's Auflösung des glasartigen Arseniks in Salzsäure. Jener Apparat, wo elektrische die Nadel in krampfhafte Bewegung setzende momentane Impulse an die Stelle jener Lichtblitze (bei Nichtleitern) treten, wird aber am besten mit zwei Multiplicatoren in Verbindung gesetzt, von denen der eine (mit Beziehung auf heftige Krampfperioden) der Doppelnadel nur bis 90° Ausschlag gestattet, während bei dem andern die Doppelnadel im Kreis umher sich bewegen kann. Letztere wird, obwohl ganz gleiche Stärke der beiden Nadeln schwer zu erreichen, doch ganz leicht mit Hülfe der Torsion der Coconfäden, woran die Doppelnadel hängt, so gerichtet, dass sie von Ost nach West steht, in welcher Lage also auch die Multiplicatorwindung sich befindet. Tritt nun eine etwas lebhafte Zuckungsperiode ein: so wird die im Kreis umhergedrehte Doppelnadel am liebsten eine Stellung von Nord nach Süd annehmen, und dadurch der Wirkungssphäre der Multiplicatorwindung entzogen werden. In der Art erhält man eine sichere Controlle eingetretener Zuckungsperioden, ohne dass man nöthig hat (was langweilig sein würde) den Apparat zu beobachten, besonders wo es gilt, vorläufig die Wirksamkeit verschiedener, in fester krystallinischer Form reducirter Metalle zu prüfen. So z. B. zeigte sich Zinn unter gewissen Umständen eben so wirksam als Kupfer zur Hervorrufung jener merkwürdigen zuckenden Bewegung der Doppelnadel. (Vergl. auch Note 43. u. 44.)

diese Versuche[37]). Aber sein College Jacobi machte zuerst technischen Gebrauch von der Sache. Und gegenwärtig ist sogar von Kanonen aus festem Cämentkupfer in Zeitungen die Rede. Es ist für mich interessant, die noch jetzt im hiesigen physikalischen Cabinet aufbewahrten ersten, nach Willkür in mannigfachen Modificationen dargestellten Proben fester Kupfer-, Antimon-, Wismuth-, Silber-Vegetationen an jene auf demselben Wege nun dargestellten Kanonen in Gedanken anzureihen. Wenn aber die technische Anwendung der Sache mit Recht Anspruch macht auf Belohnung (wie sie auch Jacobi auf eine höchst achtbare und wissenschaftliche Bestrebungen ermunternde Weise erhalten hat): verdient nicht gleichfalls der unsern Dank, dessen wissenschaftliche Forschung die Möglichkeit einer solchen technischen Anwendung herbeigeführt? Meinen damaligen Gehülfen bei dem physikalischen Cabinet und chemischen Laboratorium meine ich, den nun in Bielefeld als Director der dortigen Gewerbschule angestellten Herrn Doctor Wach, dessen, als er hier studirte, am 3. Aug. 1829 von der Hallischen philosophischen Facultät gekrönte akademische Preisschrift jene vorhin erwähnte Abhandlung über Darstellung fester Metallvegetationen auf nassem Wege (oder, wie er bei Kupfer sich ausdrückte, „über Bildung figurirten Cämentkupfers") enthält; eine Abhandlung, welche mit so grosser Umsicht und Gründlichkeit geschrieben ist, dass der ehrwürdige Pfaff in Kiel schon vor mehreren Jahren, nachdem er öffentliche Vorlesungen über Galvanoplastik gehalten, es geradezu gegen mich aussprach, dass er von wissenschaftlicher Seite nichts gefunden habe, was dieser Abhandlung beizufügen gewesen wäre. Darum wird im XI. Bande (oder Registerbande) des physikalischen Wörterbuchs, welcher von Muncke mit gewohnter Sachkunde abgefasst einen Reichthum von Nachträgen zu diesem Werk enthält, und worin auch umständlich von Darstellung fester Metallgebilde auf galvanischem Wege (d. h. der Galvanoplastik) die Rede ist, S. 218. geradezu ausgesprochen: „der erste Erfinder der Galvanoplastik, ebenso wie der Säule von constanter Wirkung, ist Wach." Und liest man die darauf folgende gründliche Abhandlung über Galvanoplastik, so muss man eingestehn, dass von wissenschaftlicher Seite dem, was mit so mannigfaltiger Abänderung der Versuche von Wach dargelegt wurde, seit der Zeit nichts beigefügt ist, was für die Wissenschaft von Bedeutung wäre, so mannigfach und sinnreich auch die technischen Anwendungen sind. Vielleicht dass die grossartige Anwendung der Sache zum Kriegsgebrauch neue wissenschaftliche Wahrheiten herbeiführt, indem es sich nun darum handelt, auch die Härte des fest dargestellten Metalls in seine Gewalt zu

[37]) Vgl. Göbel's vermischte Untersuchungen und Bemerkungen im Jahrb. d. Chem. u. Phys. 1830. d. g. R. B. 60, wo derselbe S. 414. von seiner Wiederholung der Wach'schen Versuche über feste Metallvegetationen spricht, dessen Angaben er vollkommen bestätigt gefunden, während seine Versuche ausser Kupfer sich besonders auf in fester Gestalt reducirtes Silber, Gold und Platin bezogen. Unmittelbar darauf folgt eine Bemerkung über die oft vorkommende magnetische Polarität, wodurch Stücke russischen Platinerzes sich auszeichnen, welche bestätigt, was vorhin mit Beziehung auf die Erklärung des Wortes Elektron zur Sprache kam.

bekommen. Auf die Bedingung zur Erhaltung einer Legirung aus Kupfer und Zink (Messings) hat schon Wach bei Bildung seines figurirten Cämentkupfers aufmerksam gemacht (a. a. O. S. 46 f.). Und da ein kleiner Zusatz von Zinn zum Kupfer diesem die nöthige Härte giebt, um als Kanonenmetall zu dienen: so ist kaum zu zweifeln, dass auf ähnliche Weise wie Messing sich auch Kanonenmetall werde erhalten lassen. Auf trockenem Wege können wir sogar stahlartiges Kupfer darstellen. Um so mehr sind wir also wenigstens bei dem Kupfer zu der Hoffnung berechtigt, auch Meister zu werden vom Grade der Härte oder Weichheit des auf nassem Wege reducirten Metalls. Da, wie vorhin gesagt, die Galvanoplastik in ihrer technischen Anwendung auf der Verkleinerung beruht krystallinischer Bildung bis zum sogenannten Amorphismus: so könnte man auf den Gedanken kommen, dass selbst die Leitung durch lange Drähte unter gewissen Bedingungen von Einfluss auf den krystallinischen Zusammenhang, und dadurch auf die Harte oder Weichheit des in fester Gestalt reducirten Metalles sein möge. Jedoch die schon von Wach in diesem Sinne angestellten Versuche (a. a. O. S. 56.), wobei er statt der Thierblase oder überhaupt poröser Körper (namentlich Thons, Dachschiefers, Korkrinde, Hollundermarkes) andere die Raschheit des elekrischen Stromes schwächende Mittel anwandte, führten bei langen Drahtleitungen nicht zum Ziele, wohl aber bei der Leitung durch dünne, heberförmig gebogene Glasröhren, wodurch es (in dem schönen Versuche Taf. I. Fig. 5.) gelang, von moosartiger bis zu traubenartiger und endlich krystallinischer Metallbildung zu gelangen. Nur die Einschaltung einer secundären Platinakette (womit die oben erwähnten krampfhaften Zuckungen der Magnetnadel zusammenhängen) wurde noch nicht versucht, während eben diese krampfhaften Zuckungen auf die Bedeutsamkeit dieser Einschaltung für krystallinische Bildung aufmerksam machen."

2. So vorzugsweise diese Note geeignet war zur Publication in einem Journale für praktische Chemie, so ist sie doch auch in vorliegender Zeitschrift ganz an ihrer Stelle, besonders da nun noch folgende Zusätze beigefügt werden können. Wir wissen nämlich gegenwärtig, dass jene Ankündigungen in den Zeitungen nicht ganz richtig waren; ja dass es sich gar nicht von galvanoplastischer Verfertigung von Kanonen, sondern nur von Ueberziehung eiserner Kanonen mit festem Cämentkupfer handelt. Die eisernen Kanonen widerstehn besser dem Stosse der im Laufe nicht ganz streng in gerader Linie sich bewegenden Kugel, und halten daher eine grössere Anzahl von Schüssen aus, während sie auch durch grössere Leichtigkeit sich empfehlen; aber sie vertragen nur geringere Ladung, leichter dem Zerspringen ausgesetzt. Diesem Uebelstande wird nun abgeholfen durch Ueberziehung mit festem Cämentkupfer, wobei vielleicht die von Wach angegebenen Vorschriften und die von ihm zuerst dargestellten constant wirkenden Ketten der Hauptsache nach wohl eben so ausreichen möchten, wie sie z. B. bei der Vergoldung ausreichten. Was die auf demselben Wege zu bewirkende galvanoplastische Verzinnung anlangt: so ist hierbei die Praxis längst der Theorie vorausgegangen. Denn hierbei wurde immer eine angemessen

schwache galvanische Kette angewandt lange zuvor, ehe man durch Galvani und Volta die durch Metallcontact zu erregenden elektrischen Ströme kennen gelernt hatte. Es war handwerkliche Erfahrung, dass man Zinn in zwei Theilen Alaun (dem zwei Theile Kochsalz und ein Theil Weinstein beigefügt) auflösen, aber in der Auflösung noch ein Stück unaufgelösten Zinnes lassen müsse, welches mit den Stecknadeln, die man zur Verzinnung in die Auflösung wirft, in Berührung kommt. Fehlt diese Berührung mit Zinn: so können die Nadeln noch so lange in der Auflösung liegen und werden nimmermehr sich verzinnen. Aber man konnte diesen von der Technik gewonnenen Erfahrungssatz nicht weiter ausdehnen und etwa auch bei Vergoldung, Verkupferung u. s. w. benutzen, weil die Kenntniss des wissenschaftlichen Princips fehlte, dem gemäss man handelte. Um dieses Princip aufzufinden, dazu gehörte der Geist eines Volta, selbst nachdem Galvani's überraschende Entdeckungen vorangegangen. Und nun erst wurde die zuvor nur im Verborgenen wirkende Elektrochemie ans Licht gezogen, gleich einflussreich in wissenschaftlicher, wie in technischer Hinsicht. — In der neuen Ausgabe von Gehler's physikalischem Wörterbuche, B. XI. S. 237. unter d. Art. Vergoldung, wird es als höchst auffallend bezeichnet, „dass gleich nach der Erfindung der Voltaischen Säule im Jahr 1803 Brugnatelli vermittelst des elektrischen Stromes vergoldete, ohne seine Entdeckung weiter zu verfolgen. Den metallischen Niederschlag (heisst es) gewahrte er an den Polardrähten von Gold, Silber und Platin; ja, er ging noch weiter und vergoldete Silbermünzen, indem er sie mittelst eines stählernen Drahtes mit dem negativen Pole der Säule verband und in eine gesättigte für diesen Zweck bereitete Lösung von Ammoniakgold eintauchte (Annali di Chimica. 1803. Van Mons Journ. de Chimie et de Phys. T. 5.).“ Aber unmöglich konnte Brugnatelli zu gleichbleibenden Resultaten gelangen, da er die Stärke des elektrischen Stromes nicht in seiner Gewalt hatte. Diess ist es eben, was zuerst Wach gelehrt hat, und worauf hier alles ankommt. Und selbst nachdem die zur Hervorbringung festen Cämentkupfers nöthige Stärke und Gleichmässigkeit des Stromes durch galvanische Ketten von constanter Wirkung gewonnen war: so kam es noch auf Nebenbedingungen (tiefere oder minder tiefe Eintauchung in die Kupferauflösung) an, um Drähte mit einem festen Kupferbeschlag zu überziehn, wovon in der Abhandlung von Wach S. 47. ff. die Rede, sowie auch der S. 56. und 57. erwähnte Versuch hierher gehört. Man sieht also, von wie vielen in theoretischer und technischer Hinsicht gleich wichtigen Nebenrücksichten die Feststellung des Hauptsatzes abhängig war, dass die Cohärenz (welche man gewöhnlich blos als abhängig betrachtet von der allgemeinen Körperanziehung) hier einzig und allein abhängig sei von elektrischen Beziehungen, und zwar von der Art der Leitung des elektrischen Stromes; die Feststellung dieses Hauptsatzes erforderte um so mehr eine ganze Reihe von Versuchen, je mehr er in Gegensatz kam mit den geltenden Theorien.

3. Schon im Jahr 1822 war das im Mansfeldischen gewonnene sogleich fest in mannigfacher krystallinischer Bildung vorkommende Cämentkupfer für mich ein Gegenstand specieller Aufmerksamkeit

gewesen; und bei der ersten wissenschaftlichen Versammlung der Naturforscher und Aerzte Deutschlands (hier in Halle im September 1823) suchte ich durch Vorzeigung interessanter Proben jenes merkwürdigen, im Mansfeldischen gewonnenen Haar- und Faden-Kupfers die Aufmerksamkeit der versammelten Naturforscher auf diesen Gegenstand hinzulenken. Um hierüber in dem von mir damals herausgegebenen Journal auch öffentlich sprechen zu können, bat ich einen theoretisch sowohl als praktisch sehr unterrichteten Mann, den an der Bergschule in Eisleben angestellten Herrn Plümicke, die Nebenumstände zu bezeichnen, unter welchen dieses krystallinisch gebildete Cämentkupfer erhalten wird, da man in Ungarn, wo man so viel Cämentkupfer gewinnt, nichts von solchen krystallinischen, dem sogenannten Silber- und Blei-Baum ähnlichen, und zwar sogleich in fester Gestalt sich darstellenden Gebilden gehört. Aus der hierdurch veranlassten interessanten (im Jahrb. der Ch. u. Ph. 1825. B. 2. d. g. R. B. 44. S. 89—109. mit einem Vorworte des Herausgebers über Cohäsion in Abhängigkeit von krystallelektrischer Anziehung[38]) abgedruckten) Abhandlung sah man wohl, dass im Mansfeldischen dem Cämentkupfer mehr Zeit zur Ausbildung gegönnt wird, als in Ungarn; was aber die nähern Umstände anlangte, welche auf willkürliche Darstellung solches festen Cämentkupfers führen könnten, so äusserte Herr Plümicke, eben weil bei den in kleinem Massstabe auf nassem Wege so mannigfach veranstalteten Metallreductionen noch nicht dergleichen feste Metallgebilde vorgekommen waren, mit Beziehung auf Berthollet's chemische Theorie S. 400: „da das Massenverhältniss wahrscheinlich bedeutend einwirkt, so möchte aus Versuchen im Kleinen, wenn sie überhaupt ein Resultat gäben, wenig zu folgern sein, und im Grossen bleibt es mancherlei Schwierigkeiten unterworfen, zumal da der Process der Krystallbildung überhaupt noch so sehr im Dunkeln liegt, durch geeignete Versuche zur Gewissheit zu gelangen.“ Diese Ansicht schloss sich ganz consequent den allgemein geltenden Principien an, und der oben erwähnte, auf die längere Zeit, welche man im Mansfeldischen dem Cämentkupfer zur Ausbildung gönnt, sich beziehende Nebenumstand schien diese Ansicht zu bestätigen. Da ich aber die scheinbar indifferente Körperanziehung aus der polarischen gesetzmässig abgeleitet, und eben darum, sowie noch aus andern Gründen die krystallelektrische Anziehung statt der allgemeinen Körperanziehung an die Spitze der Physik gestellt (s. Jahrb. d. Chem. u. Phys. 1823. B. 39. S. 214—250.), auch die Zustandsveränderungen der Körper, wovon ihr luftförmiger, flüssiger oder fester Zustand abhängig ist,

---

[38]) Auch eine Abhandlung von Clement reihte ich an, worin Clement Nachricht giebt von einer Kupferreduction aus schwefelsaurem Kupfer ohne Eisen. Die Auflösung von Kupfervitriol, getrübt von unlöslich basisch schwefelsaurem Kupfer, stand längere Zeit, um sich zu klären, in einer Kufe, welche zur Hälfte in die Erde eingegraben war. Hier sah man an den innern Wänden, und zwar immer an der Fuge zweier Dauben kleine Schwämme von metallischem Kupfer sich bilden. Die Kupferstücke hatten sich, wo sie an der Kufe anlagen, so „an dem Holze abgeformt, dass ihnen die Streifen eingedrückt waren.“

aus demselben Princip, also aus ganz schwachen elementaren krystallinischen Kräften (den im Journ. d. Chem. u. Phys 1812. B. 5. S. 49 – 74. dargelegten Thatsachen gemäss) abgeleitet und aus diesem Standpunkte stets in meinen akademischen Vorlesungen die Elektrochemie vortrug: so gelang es mir nicht selten, diejenigen unter meinen Zuhörern, welche nicht blos das Herkömmliche zum Zwecke des Examens wissen wollten, für die eben bezeichneten von der geltend gewordenen Doctrin sehr abweichenden Ansichten ins Interesse zu ziehn. Dass dazu Herr Wach gehörte, zeigt schon seine erste Abhandlung über das rauchende Wesen der Schwefelsäure [39]) (Journ. d. Chem. u. Phys. B. 50. S. 1—53.). Bei der in dieser Abhandlung S. 47—50. umständlich besprochenen merkwürdigen partiellen Umwandlung der englischen Schwefelsäure in rauchende, die mit krystallinischer Cohäsion (asbestartig) auftritt [40]), ist es nur ein gewisser, re-

---

[39]) Die Haupttendenz dieser Abhandlung nämlich ist, die Abhängigkeit des sogenannten Isomerismus von krystallelektrischen Principien durch dargelegte Thatsachen nachzuweisen. Und dieselbe Tendenz hat die so gründliche Abhandlung desselben Verfassers über pyrophosphorsaure Ammoniak-Bittererde (Journ. d. Ch. u. Ph. B. 59. S. 297. etc.). Nebenbei bemerke ich, dass die Auffassung der Elektrochemie auf dem Standpunkte der Krystallelektricität, wie ich schon bei einer andern Gelegenheit erinnerte, nicht berührt wird von den Einwendungen, welche Dumas gegen Elektrochemie gemacht hat, sondern sehr wohl vereinbar ist mit seinem Substitutionsgesetz, das dem Mathematiker wichtig scheinen muss, um einen Anhaltpunkt zu haben bei der Unendlichkeit der möglichen Combinationen, wie sie hervorgeht aus der gründlichen Abhandlung Rothe's über Anwendung der combinatorischen Analysis auf Pflanzenanalysen. S. die Entwickelung der Pflanzensubstanz von Nees v. Esenbeck, Bischof und Rothe. Erlangen 1819.

[40]) Es ist auffallend, dass diese schon im Jahr 1819 in Trommsdorf's Journ. der Pharmacie mitgetheilte, und einige Jahre darauf von C. G. Gmelin bestätigte Beobachtung bis jetzt noch nicht so glücklich war, auch nur der Erwähnung werth gehalten zu werden in den Compendien der Chemie. Und doch ist diese theilweise Umbildung der englischen Schwefelsäure noch merkwürdiger als die ganz analoge Umbildung des Glases in krystallinisches Glas (sogenanntes Reaumur'sches Porzellan), welches, in so fern es den Temperaturwechsel besser verträgt, weniger spröde ist als gemeines Glas. In der That lauft das sogenannte Adouciren des Roheisens, worüber derselbe Reaumur viele Versuche angestellt, auf dasselbe Verfahren hinaus. Und handelt es sich nicht davon, die ganze Masse zu erweichen, sondern blos die Oberfläche weicher und geschmeidiger zu machen, so ist das Verfahren selbst auf grössere Eisenstücke, wahrscheinlich also auf gusseiserne Kanonen, die man mit einer Hülle von mehr elastischem Eisen umgeben will, anwendbar. Auch ein anderes Verfahren Gusseisen oberflächlich zu erweichen (wobei Hydrogen die Hauptrolle zu spielen scheint) kam im Jahr 1827 von Amerika her zur Sprache (s. Dingler's polytechn. Journ. 1828. B. 29. S. 156.). Es bietet sich also eine zweifache Methode dar, die Oberfläche des Gusseisens auf eine mehr oder minder tief in die Masse eindringende Weise zu erweichen, und sonach gusseiserne Kanonen mit einer Hülle von weichem Eisen zu umgeben. Kommt nun noch die Hülle von weichem Cämentkupfer dazu, so wird dem Zerspringen noch mehr entgegengewirkt. Es ist nämlich unmöglich, dass Hüllen von verschiedener Cohäsion durch eine und dieselbe ausdehnende Kraft ganz streng in demselben Momente zerrissen werden. Nur dann also, wenn dieser Zeitun-

lativ schwacher, aber eine Zeit lang anhaltender Temperaturgrad, welcher (ebenso wie bei Verwandlung des Glases in Reaumur'sches Porzellan) die krystallinische Bildung hervorzurufen vermag. Darum bedurfte es blos der Combination dieser Erscheinung mit den in meiner vorhin erwähnten Abhandlung über Zustandsveränderung der Körper zusammengestellten, um auf den Gedanken zu kommen, ob nicht durch ähnliche Modification des elektrischen, die Metalle reducirenden Stromes auf krystallinischen Zusammenhang Einfluss zu gewinnen sein möchte. Auf dem Standpunkt einer Theorie nämlich, welche nicht die sogenannte allgemeine Körperanziehung, sondern die polarische krystallelektrische an die Spitze der Physik stellt, hängt natürlich selbst die Elektricitätsleitung von einer (nach der verschiedenen Natur der Körper leichter oder schwerer erfolgenden) Modificirung der Krystallelektricität ab, und der Leitungswiderstand ist daher (was durch mehrere Thatsachen nachgewiesen werden kann) nicht (gleich dem der Röhren, wodurch eine Flüssigkeit strömt) blos passiver, sondern vielmehr activer Natur. In diesem Sinne war es nichts auffallendes, gerade die schwächsten elektrischen Ströme durch Leiter von grösster Länge ungeschwächt durchgehn, und diese langen Leiter zur Verstärkung derselben namentlich bei Multiplicatoren wirken zu sehn, während durch dieselben Multiplicatoren starke elektrische Ströme geschwächt werden [41]). Der Leitungswiderstand, den starke Ströme (starke elektrische Funken) hervorrufen, kann so gross werden, dass der Draht glühend wird und zerstiebt. Blos von schwachen Strömen können wir also etwas erwarten, wenn Hervorrufung krystallinischen Zusammenhangs beabsichtigt wird. Und dieser Ansicht war günstig, was Plümicke mit Beziehung auf die Mansfelder Kupfervegetation mitgetheilt. Denn die regelmässigen, den krystallinischen analogen Formen (namentlich Haar- und Faden-Bildung) traten blos da ein, wo die Cämentation 5—6 Monate dauerte. Und dass unter den verschiedenen Ansichten, die bei Auffassung dieser Erscheinung möglich, das Hauptgewicht zu legen sei auf die Schwächung des elektrischen Stromes, solches wird dargethan durch den schon vorhin erwähnten Versuch von Wach, welcher auf der Kupfertafel zu seiner Abhandlung Fig. 5. dargestellt, wo die verschiedenen Bildungsformen des Cämentkupfers sich in Abhängigkeit zeigten von den verschiedenen Graden der Schwächung der Kette durch Leitungswiderstand. Das bequemste Mittel zur Schwächung des elektrischen Stromes bot der Durchgang durch poröse Körper [42]). Nur diess bemerke ich, dass, wenn man nicht

---

terschied des Zerreissens der einzelnen Hüllen zur verschwindenden Grösse wird, kann ein Herumschleudern der zersprungenen Theile stattfinden.

41) Auch durch andere Versuche wurde die Aufmerksamkeit hingelenkt auf die Bedeutsamkeit schwacher elektrischer Ströme, in welcher Hinsicht ich mich beziehe auf das im Jahrb. d. Chem. u. Phys. 1825, oder B. 44. S. 119. u. 365., sowie 1828. B. 52. S. 236—242. Mitgetheilte.

42) Auf die Bedeutsamkeit poröser Körper hinsichtlich auf den Durchgang elektrischer Ströme leitete Porrett's Versuch hin, dem späterhin Versuche über sogenannte Endosmose und Exosmose sich anschlossen. Nun wo es sich von grossartiger technischer Benützung durch Leitungswider-

die eben bezeichneten theoretischen Ansichten im Sinne hatte, die Einmischung poröser Körper, namentlich der Blase, bei der Kupferreduction leichter irre leiten, als zum Ziele führen konnte. Denn wirklich hatten schon vor Wach (wie dessen Abhandlung S. 22—24. zeigt) sehr achtbare Physiker mit Blase umbundene Röhren, worin sich ein Eisendraht befand, in Kupferlösungen gebracht mit Hinsicht auf die sogenannte Endosmose und Exosmose. Nothwendig musste dabei festes Cämentkupfer unten an der Blase entstehn; aber sie schenkten der Sache keine Aufmerksamkeit, wahrscheinlich weil der Gedanke sie irre geleitet, dass die Anlegepunkte, welche die Blase darbot, der Zusammenhäufung krystallinischer Metalltheile günstig sei. Dass es auf diese Anlegepunkte hier gar nicht ankomme, sondern blos auf die angemessene Hemmung der Schnelligkeit des elektrischen Stromes, welche auch durch andere, wenn gleich minder bequeme Mittel zu erreichen; diess zu zeigen war der Hauptpunkt, worauf es ankam. Und diess wurde nachgewiesen von Wach durch die mannigfachste Abänderung der Versuche. Jetzt erst trat das Naturgesetz mit Klarheit hervor, das zu der mannigfachsten und nützlichsten Anwendung in der Technik geführt hat, während es gegenwärtig in seiner Anwendung zur Vervollkommnung des schweren Geschützes in so hohem Grad einflussreich und gewinnbringend wird. Aber dieses auf Hervorrufung der Cohäsion durch Elektricität sich beziehende Naturgesetz ist nun auf dem Standpunkte der neuesten Physik noch einer schärferen Bestimmung fähig, welche nur durch eine neue Reihe von Versuchen herbeigeführt werden kann. Und da es sich hier von Dingen handelt, denen ich stets vorzugsweise meine Aufmerksamkeit zugewandt, so könnte ich dergleichen Versuche leicht in Vorschlag bringen, um, worauf es nun ankommt, die Art der Cohäsion mehr in die Gewalt zu bekommen. Dergleichen theoretisch ausgedachte Versuche nützen aber wenig, so lange niemand da ist, der nicht blos lebendiges wissenschaftliches Interesse, sondern auch ungestörte Musse hat, sich der Ausführung solcher Versuche zu widmen, welche Musse dem Verfasser jener vorhin genannten, auf willkürliche Darstellung festen figurirten Cämentkupfers sich beziehenden Preisschrift unmittelbar nach der Publication derselben geraubt wurde, indem ihn eine Anstellung bei der Gewerbschule in Bielefeld in ganz andere praktische Dinge hineinzog. Schon sind in seiner Abhandlung mehrere Versuche bezeichnet, die er noch anzustellen beabsichtigte, und die ihn allerdings leicht hätten weiter führen können.

---

stand geschwächter elektrischer Ströme handelt, verdient Porrett's Versuch neue Aufmerksamkeit. Der von Wach S. 61. seiner Abhandlung angeführte Versuch de la Rive's zeigt deutlich genug, dass die Erscheinung noch nicht gehörig aufgeklärt sei, und combinirt man in diesem Zusammenhange den von Wach auf der Kupfertafel zu seiner Abhandlung Fig. 3. mitgetheilten Versuch, so sieht man, dass er dem ursprünglichen von Porrett in einer Beziehung analog, in anderer entgegengesetzt ist, während in derselben Abhandlung S. 36—40 der Weg bezeichnet ist, wie weitere Aufklärung herbeizuführen sein möchte.

4. Diese treue Geschichte der durch die Mansfeldischen Kupfervegetationen hervorgerufenen Galvanoplastik ist nun zeitgemäss, damit man es anerkenne, dass hier von einem mit Consequenz verfolgten wissenschaftlichen Ziele die Rede sei. Deutlich stellt sich dar, wie die im Sinne der geltenden Theorien durchaus nicht zu erwartende willkürliche Darstellung cohärenter Metallgebilde auf nassem Wege durch Bestrebungen herbeigeführt wurde im Sinne einer vom Princip der Krystallelektricität ausgehenden elektrochemischen Theorie. Zugleich sieht man, warum, nachdem dieses Gesetz cohärenter elektrochemischer Metallbildung aufgefunden war, die ganze Aufmerksamkeit sich zuerst der krystallinischen Metallbildung zugewandt. Und noch jetzt ist und bleibt in wissenschaftlicher Hinsicht, was mit krystallinischen Verhältnissen zusammenhängt, die Hauptsache bei diesen galvanoplastischen Bildungen, eben weil, wie Plümicke mit Recht hervorhob, der Process der Krystallbildung noch so sehr im Dunkeln liegt. — Allerdings gelang es nicht, die Bildung der baum- und strauchartigen Kupfervegetationen, oder der regelmässig ausgebildeten oktaedrischen Kupferkrystalle (S. 46. der Abhandl. Wach's) in die Gewalt zu bekommen, so wenig als die willkürliche Darstellung der schönen Granatdodekaeder von Silber (S. 60.); aber die Sorgfalt, welche Wach auf das Studium der Nebenbedingungen wandte, wodurch diese krystallinischen Bildungen begünstigt werden[43]), kann nun sich belohnen, wenn es ihm gelingen sollte,

---

[43]) Unter den „Bemerkungen über die praktische Anwendung der Galvanoplastik“ von W. de la Rue (aus dem Technologiste, Febr. 1846. p. 212. übers. in Dingler's polytechn. Journ. B. 99. S. 371.), welche Bemerkungen als das Resultat einer sehr grossen Anzahl von Versuchen bezeichnet werden, ist als die erste vorangestellt, „dass die metallischen Niederschläge ein sehr verschiedenes Ansehn haben, dass sie nämlich entweder deutlich krystallinisch, oder schwach krystallinisch, hämmerbar, sandartig oder schwammig sind; letzteres ist der Fall, wenn die Batterie zu kräftig, und ersteres, wenn sie zu schwach im Verhältnisse zur angewandten Metallauflösung war.“ Auch an einer andern Stelle wird noch ausgesprochen, dass, „wenn die Stärke der Batterie im Verhältnisse zur Concentration der schwefelsauren Kupferlösung vermindert wird, unter diesen Umständen sich gut ausgebildete grosse Krystalle erzeugen.“ — Es ist erfreulich zu sehn, wie denselben durch so viele Versuche (was ausdrücklich hervorgehoben) gewonnenen Satz Wach im Jahr 1829 dargethan durch den schon vorhin erwähnten, ganz einfachen, aber entscheidenden Versuch, welcher auf der Kupfertafel zu seiner Abhandlung Fig. 5. abgebildet ist, wo vier mit derselben Kupferauflösung gefüllte Gläser durch heberförmig gebogene, $\frac{1}{3}$ Zoll weite Glasröhren verbunden waren, so dass nicht durch Blase (oder andere poröse Körper), sondern blos durch die längere Leitung der Strom stufenweise geschwächt wurde. Und dadurch gelang es, von incohärenter bis zu cohärenter, zuerst moosartiger, dann traubenartiger, und endlich, wo der Strom am meisten geschwächt war, krystallinischer Metallbildung zu gelangen. — Und eben durch diese Verschiedenartigkeit der krystallinischen Bildung scheinen bei dem Versuche, wovon in Note 36. die Rede war, die krampfhaften Bewegungen der Magnetnadel veranlasst zu werden. Aus diesem Gesichtspunkte wird man verstehn, warum ich vorhin (Note 36.) eine Combination mehrerer Wach'ischen Ketten mit der leicht zu treffenden Veranstaltung empfohlen habe, dass man die einzelnen Glieder der Kette

in Verhältnisse zu kommen, wo er (in günstigerer Lage als seine gegenwärtige ist) die hierüber gemachten Erfahrungen benützen und weiter verfolgen kann. Denn nun wird der aus rein wissenschaftlichem Interesse vorzugsweise von ihm zum Studium gemachte Hauptpunkt der Galvanoplastik auch in technischer Beziehung zum Hauptpunkte werden. Handelt es sich nämlich blos von Erzeugung bildsamer fester Metallmassen: so kommt es, wie vorhin schon gesagt, vorzüglich auf Verkleinerung der Krystalle an, so dass sie wo möglich ganz unwahrnehmbar sind und die sogenannte amorphe Bildung hervorgerufen wird. Man muss also die krystallinische Bildung eben so gut befördern als vermeiden lernen. Bei jener vorhin erwähnten Verzinnung der Stecknadeln weiss man recht gut, dass sie auch mit Alaun ohne Weinstein gelingt; aber sie wird matt, d. h. die krystallelektrische Kraft gewinnt an Stärke, so dass krystallinisch ausgebildete Elemente vorherrschend zu werden anfangen, wodurch die Oberfläche ein mattes Ansehn bekommt [44]). Der Ueberzug eiserner Kanonen mit Kupfer wirkt

---

abwechselnd in die Voltaische Combination aufnehmen und abwechselnd partiell schliessen könne, um eben dadurch eine Verschiedenartigkeit in der krystallinischen Bildung anzuregen. Oefters sah ich jene Zuckungen besonders dann mit grosser Heftigkeit entstehn, wenn die mit Blase umbundene Röhre, woran sich an einer Stelle in concentrirter Kupferauflösung festes Cämentkupfer angesetzt hatte, in eine verdünnte Kupferauflösung übergetragen wurde. Als Nebenbedingung ist dabei die Einsetzung eines frisch abgefeilten Zinkdrahtes hervorzuheben, um die Bildung neuer krystallinischer Elemente neben den schon in fester Form gebildeten so anzuregen, dass sie damit in Contact kommen im Entstehungsmomente. — Vom Dimorphismus (der vielleicht durchgreifender ist als man gewöhnlich annimmt) scheint also die elektrische Erscheinung abzuhängen, so wie die Lichterscheinung nach Rose's Beobachtung bei Auflösung glasartigen Arseniks in Salzsäure entschieden vom Dimorphismus abhängt. Darum sah ich nicht sogleich bei dem ersten Anflug der Krystalle, sondern erst bei dem Contact eines secundären Anfluges mit dem primitiven die Lichtblitze eintreten. Sehr wesentlich kommt es auch hier auf einen gewissen Grad der Verdünnung der Auflösung an. — Man sieht den Parallelismus beider Erscheinungen (der optischen und elektrischen), worauf schon früher aufmerksam gemacht wurde. Um übrigens zu zeigen, wie dergleichen scheinbar blos theoretisch interessante Dinge auch praktische Bedeutung gewinnen können, will ich noch folgende flüchtige Bemerkung anreihen. Es hat mich bei einigen Versuchen überrascht, dass sehr kleine Zusätze von Weingeist zur Kupferauflösung in weit höherem Grad, als zu erwarten war, jenen eben erwähnten, von Krystallelektricität abhärgigen krampfhaften Zuckungen der Magnetnadel entgegenwirkten, sie wenigstens modificirten durch Abkürzung der momentan eintretenden Zuckungsperioden. Wenn nun, was der galvanoplastischen Krystallbildung günstig (nämlich ein gewisser Grad der Verdünnung der Kupferlösung) diese krampfhaften Zuckungen befördert, so könnte man umgekehrt vermuthen, dass vielleicht ganz kleine Zusätze von Weingeist jener galvanoplastischen Krystallbildung, welche man technisch zu vermeiden wünscht, entgegenwirken, und also in den von de la Rue angeführten Fällen, wo die krystallinische Bildung störend wirkt, der experimentellen Prüfung zu empfehlen sein möchten. Es fragt sich nämlich, ob neben dem Hauptgesichtspunkt, der elektrischen Leitung, nicht noch andere Nebengesichtspunkte zu beachten seien (vergl. Note 44. u. Nr. 5.).

[44]) In krystallogenetischer Hinsicht hat man es also bei jener ältesten, auf Zinn sich beziehenden Galvanoplastik weiter gebracht, als bei der

dem momentanen Zerspringen und Umherschleudern der zersprungenen Stücke entgegen, zu welchem Zwecke umgelegte Ringe von gehämmertem Kupfer nicht genügen wollten. Es wird also darauf ankommen, das Kupfer so weich als möglich zu erhalten. Und da Wach schon im Jahr 1829 auch andere Metalle als Kupfer in fester Gestalt galvanoplastisch dargestellt hat: so lässt sich fragen, durch welche Combination von Metallen in noch höherem Grad eine der Elasticität analoge, dem momentanen Zerspringen und Umherschleudern durch die Verschiedenartigkeit der Cohäsion entgegenwirkende Kraft hervorgerufen werden könne? (Vgl. Note 40.). Aus diesem Gesichtspunkte scheint sich noch ein viel weiterer Kreis technischer Anwendung zu eröffnen.

---

neuern auf Kupfer sich beziehenden. Alle, welche sich mit letzterer beschäftigt haben, gestehn zu, dass sie noch ein sehr unsicheres Handwerk sei, eben weil, wie de la Rue in der vorhin (Note 43.) angeführten Abhandlung hervorhebt, die Kupferniederschläge bald deutlich krystallinisch, bald schwach krystallinisch, hämmerbar, sandartig oder schwammig sind. „In der Regel", fügt er bei, „muss man suchen, den hämmerbaren Niederschlag hervorzubringen; bei aller Uebung und Geschicklichkeit bleibt es jedoch sehr schwierig, ihn eine Zeit lang gleichförmig zu erhalten." — Noch andere die Anwendung der Galvanoplastik auf unangenehme Weise beschränkende, eben mit dieser Krystallogenie zusammenhängende Nebenbeziehungen bringt er zur Sprache. Es ist daher auffallend, dass man noch nicht, wie bei der auf Zinn sich beziehenden oben erwähnten Galvanoplastik, auch bei Kupfer eine Combination verschiedener Salzverbindungen desselben in Anwendung zu bringen versucht hat. Uebrigens hat sich namentlich bei Verkupferung des Eisens und Zinks das weinsteinsaure Kali-Kupferoxyd besonders vortheilhaft gezeigt (s. Elsner's Abhandl. in Dingler's polytechn. Journ. 1845. B. 97. S. 429.). Auf ein Mittel zur vorläufigen krystallogenetischen Orientirung machte ich in der Note 43. aufmerksam, welches man bei der in Note 36. angegebenen Verfahrungsweise ohne allen Zeitaufwand benutzen kann. Jenen krystallelektrischen Erscheinungen, welche die Bildung des festen Cämentkupfers begleiten, reiht sich übrigens noch eine elektrochemische an, welche de la Rue mit folgenden Worten erwähnt: „Eine sonderbare Eigenschaft der galvanischen Copien besteht darin, dass man sie nicht mit Zinnoberfarbe abdrucken kann, was doch bei den gewöhnlichen gestochenen Kupferplatten der Fall ist; überzieht man eine solche Copie mit Zinnoberfarbe, so wird, nachdem einige Abdrücke gemacht sind, der Zinnober schwarz, und wenn man mit dem Drucken fortfährt, so wird das Kupfer weiss und es schlägt sich so viel Quecksilber auf seiner Oberfläche nieder, dass ihr die Farbe nicht mehr anhängt. Ich glaube, dass die poröse und offene Structur der galvanischen Copie die einzige Ursache der Zersetzung des Zinnobers ist, und dass die Reinheit des Kupfers dazu nichts beiträgt." — Statt „poröse und offene Structur" wird man wissenschaftlich schärfer schreiben müssen krystallinische Structur, da de la Rue selbst hervorhebt: „so sorgfältig man auch einen galvanischen Niederschlag hervorbringen mag, so beweist doch die Beobachtung desselben unter dem Mikroskop, dass seine Structur im wesentlichen immer krystallinisch ist." — Da nun diese krystallinische Structur die Zersetzung des Zinnobers bewirkt: so wird man auf elektrochemischem Standpunkte die Wirkung der Krystallelektricität nicht zu verkennen vermögen, besonders nachdem die krystallelektrischen Erscheinungen bei Bildung dieses festen Cämentkupfers durch die Zuckungen der Magnetnadel nachgewiesen.

5. Aus Liebe zur Wissenschaft und im Interesse für diese nun zum Kriegsgebrauche benützte, von der hiesigen Universität ausgegangene Erfindung muss ich wünschen, dass die Hingebung belohnt werde, wodurch sie allein ins Leben gerufen werden konnte, und dass also der Erfinder jener auf eine so gewinnbringende Weise benutzten constanten galvanischen Kette nun als Mann in den besten Jahren einen angemessenen Wirkungskreis finde bei den im Grossen vorzunehmenden Arbeiten, wobei man aber auch fortdauernde Studien in kleinem Massstabe nicht wird versäumen dürfen. Selbst den Mansfeldischen Kupfervegetationen, von welchen die Aufsuchung der Gesetze cohärenter Metallbildung angeregt wurde, scheint es nun zweckmässig ein erneutes Studium zu widmen. Denn die Proben von dem in Eisleben im Grossen gewonnenen Cämentkupfer, welche ich aus dem Jahr 1822 noch vor mir habe, zeichnen sich zum Theile durch grosse Zähigkeit und Weichheit aus. Auch Plümicke hebt die Weichheit und Zähigkeit dieses Cämentkupfers mit der Nebenbemerkung hervor, dass besonders das haar- und drahtförmige einen hohen Grad der Reinheit zeige. Und doch wird dieses Cämentkupfer aus sehr unreiner, nach dem dritten Versieden übrig bleibender sogenannter Schwarzlauge gewonnen. Und nach der von Plümicke angeführten Analyse Hermann's enthält der aus dieser Schwarzlauge gewonnene schwarze Vitriol ausser Kupfer und Eisen vornehmlich Zink, Nickel, Kobalt, Blei, Mangan und ausserdem Spuren eines vielleicht noch unbekannten Metalls. Von allen hier genannten Metallen ist keines ausser Blei auf nassem Wege mit Eisen reducirbar; und selbst das Blei ist gemäss den von Wach angestellten Versuchen (S. 60. seiner Abhandl.) bei dieser Reductionsweise nicht als metallisch feste Bleivegetation darzustellen; auch ist seine Verwandtschaft zu Kupfer so gering, dass man eine Legirung auf nassem Wege kaum erwarten kann. Die Hervorrufung der Cohärenz des reducirten Metalls tritt also hier in den Rang eines chemischen Scheidungsmittels des Kupfers vom Blei. Zugleich aber bietet sich die technische Aufgabe dar, zu untersuchen, ob nicht vielleicht die eben bezeichnete Verdünnung der Kupferlösung mit andern nicht reducirbaren Metalllösungen zur Beförderung der Weichheit und Zähigkeit des in fester Gestalt reducirten Cämentkupfers mitwirken könne. Denn da von der Art der Elektricitätsleitung die Hervorrufung der Cohärenz abhängt: so kann schon den allgemeinen elektrischen Leitungsgesetzen gemäss eben so wenig die Art als der Grad der Verdünnung einer Metalllösung gleichgültig sein für die Bildungsform des in fester Gestalt zu reducirenden Metalls (vgl. Note 43. und 44.). Ein neuer Weg eröffnet sich hier zur Erforschung nicht blos wie bisher der elektrischen Leitungsgesetze überhaupt, sondern speciell der elektrochemischen. In solcher Weise wird das Studium der feinsten elektrochemischen Beziehungen Hand in Hand gehn mit der grossartigsten Anwendung cohärenter, auf galvanischem Wege dargestellter Gebilde zum Kriegsgebrauche.

6. Zum Schlusse bemerke ich noch, dass die schwache aber constante galvanische Kette, wie sie zuerst Wach, und zwar auch schon als mehrgliedrige angewandt, ganz in ihrer ursprünglichen Schwäche (nämlich ohne stärkere Schwefelsäure zu gebrauchen

am positiven Pol, als die durch galvanische Zersetzung des Kupfervitriols selbst gewonnene ist) zu telegraphischen Zwecken bei den in den Preussischen Staaten angelegten Eisenbahnen gebraucht wird. Das reducirte Kupfer bringt dabei noch einen Nebengewinn. Statt der Blase dient der auch schon von Wach benutzte schwach gebrannte Thon. Es stehn nämlich kleine Becher von schwach gebranntem Porzellanthon in der Kupferauflösung, umgeben von einem starken Kupferbleche, während Zink im gehörig durchnässten Becher steht, worein gewöhnliches Brunnenwasser zu giessen genügt. Eine Kette von 4—6 Gliedern ist hinreichend, ein kleines hufeisenförmig gebogenes weiches Eisenstäbchen, an dessen Enden sich mit zahlreichen Multiplicatorwindungen (aus so dünnen Drähten, wie sie bei den empfindlichsten Multiplicatoren angewandt werden) umgebene Rollen befinden, so stark zu magnetisiren, dass es einen kleinen Anker an sich zieht, der augenblicklich (wozu Herr Leonhard, der diese Telegraphen anlegt, auf eben so einfache als sinnreiche Weise einen schwachen Gegenstrom benutzt) wieder abfällt, sobald die Kette aufgehoben wird. Ein Uhrwerk regelt die Aufhebung und Schliessung der Kette, während die Bewegung des kleinen Ankers ein kleines Steigrad in Umlauf bringt, woran ein Zeiger, auf der Reihe nach geschriebene Buchstaben hindeutend, befestigt ist. Durch einen mehrere Meilen langen Kupferdraht wirkt die schwache Wach'ische Kette, während der nasse Boden durch Einsenkung von Drähten in Brunnen an den Stationsorten als zweiter Leiter benutzt wird.

Die Kette Daniell's unterscheidet sich von der Wach'ischen blos durch Anwendung stärkerer Schwefelsäure. Auch Wach gebrauchte natürlich diese öfters in bedeutender Stärke; aber es kam zur Hervorrufung der Cohärenz reducirter Metalltheile nicht auf Verstärkung, sondern auf Schwächung der Kette an. Und von diesen auf Schwächung der Kette sich beziehenden Versuchen hatte er daher seinem Zwecke gemäss allein zu sprechen[45]. — Auch zu telegraphischen Zwecken gebraucht, wie vorhin schon gesagt, Herr Leonhard nicht die stärkere sogenannte Daniell-sche Kette, sondern die ursprüngliche schwache Wachische zeigte sich ihm vortheilhafter. War ja doch Barlow, der zur Bestimmung des Gesetzes der Elektricitätsleitung durch lange Drähte Hare's Calorimeter gebrauchte, sogar zu dem Resultat gekommen, dass sich die Intensität der Ströme sehr rasch vermindere nach dem umgekehrten quadratischen Verhältnisse der Distanz, woraus er schloss, „dass die Idee elektrische Telegraphen zu construiren chimärisch sei.“ Ich zeigte aber schon damals (s. Jahrb. d. Ch. u. Ph. 1825. B. 44. S. 119. u. 365.) durch sehr leicht zu wiederholende Versuche, dass, während starke elektrische Ströme bedeutend geschwächt werden bei dem

---

[45]) Der Versuch, welcher auf der zur Abhandlung gehörigen Kupfertafel Fig. 4. dargestellt, wo Zink- und Kupferblech durch Blase getrennt in vier Gliedern Voltaisch combinirt sind, hat die Absicht, zu zeigen, dass die Voltaische Combination durch Einschiebung poröser Leiter stets geschwächt wird, ja sogar, wenn man eine doppelte Scheidewand von Blase anwendet, nämlich auch das Kupferblech in eine mit Blase unten umbundene Röhre bringt, ganz unwirksam gemacht werden kann.

Durchgänge durch lange Drähte, ganz schwache Ströme unvermindert an Kraft hindurchgehn. Eben weil ich sogleich nach der berühmten Entdeckung Oersted's, der eine Funken gebende Säule zur Darstellung der elektromagnetischen Erscheinungen verlangte, in meinen physikalischen Vorlesungen auf die unverminderte Kraft, mit welcher schwache Ströme durch lange Leiter gehn, aufmerksam wurde: so führte solches mich unmittelbar hin zur Construction des Multiplicators (s. Journ. d. Ch. u. Phys. B. 32. S. 48. u. B. 33. S. 11.). Und nun bewährt sich die Bedeutsamkeit schwacher Ströme auch in telegraphischer Beziehung vielleicht durch dieselbe krystallelektrische Einwirkung, die sie veranlasst, Cohäsion reducirter Metalltheile hervorzurufen.

Bei der Wachischen constanten Kette war (weil vier Elemente zur Natur derselben gehören) die Einschiebung eines porösen Leiters unentbehrlich. Er schadete auch hier nichts, weil es blos auf schwache Ströme ankam; vielmehr diente er zur beabsichtigten Hemmung der Schnelligkeit des elektrischen Stroms. Will man starke elektrische Ströme haben, so bleibt die Einschiebung schlechter Leiter, was poröse Körper nimmer sind, stets ein Uebelstand, den man blos durch die unvermeidliche Nothwendigkeit entschuldigen kann. Gerade aber diese unvermeidliche Nothwendigkeit glaubte ich in Zweifel ziehn zu müssen. Und der fünfte Abschnitt vorliegender Abhandlung in ihrer ursprünglichen Gestalt bezog sich darauf, die porösen Halbleiter nicht blos bei der Kohlenbatterie Bunsen's, sondern auch (in Erinnerung an Volta's thermoxydirtes Gold) selbst bei der Platinakette Grove's entbehrlich zu machen, indem man nämlich ebenso wie die Kohle (was schon bei der thermoxydirten Kohle Brugnatelli's vorhin zur Sprache kam) so auch Platin vor Construction der Batterie mit rauchender Salpetersäure (oder besser mit einem Gemisch aus concentrirter Schwefelsäure und rauchender Salpetersäure) ladet und auf entsprechende Weise durch Aetzkali (wovon vorhin gleichfalls schon die Rede war) auch die Zinkplatten. Eine zu diesem Zwecke bequeme Vorrichtung brachte ich in Vorschlag, berechnet auf schnelle Zusammensetzung der Batterie und eben so schnelle Aushebung und Ladung der einzelnen Elemente derselben. Wenn es nämlich in der neuen Ausgabe von Gehler's phys. Wörterb. B. VIII. S. 114 heisst: „Ritter's sanguinische Hoffnung, durch die Ladungssäulen die galvanischen Wirkungen ebenso verstärken zu können, wie man die Wirkung der gewöhnlichen Elektricität durch die elektrischen Batterien verstärkt, ist nicht in Erfüllung gegangen:" so suchte ich zu zeigen, dass sie wirklich in Erfüllung gegangen auf eine Weise, die allgemeines Aufsehen erregte, und doch gerade aus diesem Gesichtspunkte nicht beachtet wurde. Ich meine nämlich jene Hoffnung Ritter's sei in Erfüllung gegangen durch Grove's Platina- und Bunsen's Kohlen-Batterie. Ja ich glaube, wenn man diese Batterien aus dem oben bezeichneten Gesichtspunkt auffasst, dass jene Hoffnung Ritter's dann noch in höherm Grad in Erfüllung gehn könne. Einige Collegienversuche, welche ich in diesem Sinne mit Kohlencylindern Bunsen's anstellte, die auf Brugnatelli's Weise geladen wurden, fielen, wie schon vorhin erwähnt, günstig aus für meine Ansicht. Wäre die Assistentenstelle bei unsern physikalischen

Cabineten nicht blos, den gegebenen Verhältnissen gemäss, mit Studenten zu besetzen, oder wäre es nicht so schwer, junge Männer zu finden von solchem experimentellen Eifer wie Wach war, als er hier seine pharmaceutisch-naturwissenschaftlichen Studien machte: so hätte ich leicht sogleich auch mit Beziehung auf Grove's Batterie [46]) eine Reihe von Versuchen vorlegen können.

---

[46]) Es sei mir erlaubt, die grosse Ausdehnung des experimentellen Feldes zu bezeichnen. Bekanntlich deutet der Ausdruck katalytische Kraft eine Wirkung an durch blose Gegenwart eines andern Körpers. Und diese Wirkung durch blose Gegenwart wäre streng erwiesen, wenn wirklich der Einfluss des Platins auf Knallgas kein krystallelektrischer (vgl. die ins Philos. Magaz. and Journ. Jul. 1824. vol. 64. aus dem Journ. d. Ch. u. Ph. B. 39. S. 214—250. übergegangene Abhandlung, sowie B. 40. S. 237. u. B. 63. S. 377.), sondern einzig und allein von der Reinheit der Oberfläche des Platins abhängig wäre, welche letztere Ansicht nun allgemein geltend geworden. Sie beruht auf der im Jahr 1834 publicirten sechsten Reihe experimenteller Untersuchungen von Faraday, deren Hauptstellen ich den von ihm gebrauchten Nummern gemäss (nach der Uebers. in Poggend. Annal. der Phys. B. 33. S. 149 ff.) anführen will. Da nicht blos positiv elektrisirte Platinaplatten das Knallgas zur Vereinigung disponirten, sondern „auch negativ elektrisirte wirkten, wiewohl nicht so kräftig": so kam Faraday (N. 590.) auf die Idee, „dass die Wirkung nicht von der Elektrisirung derselben abhänge, sondern von irgend einer Structur oder Anordnung der Theilchen, die es während der Verknüpfung mit der Säule erlange, die aber dem Platin zu allen Zeiten angehöre und sich immer wirksam zeige, sobald nur dessen Oberfläche vollkommen rein sei." Es wurden daher (N. 599.) „Platinplatten, die auf ein Gemenge von Sauerstoff und Wasserstoff keine Wirkung hatten, mit einer Lösung von Aetzkali gekocht und darauf in die Gase gebracht; sie zeigten sich bisweilen recht wirksam, bisweilen aber nicht. In den letztern Fällen, schloss ich, war die Unreinigkeit von der Art, dass sie nicht durch blose Lösekraft des Aetzkalis entfernt wurde; denn wenn ich dieselben Platten mit etwas Schmirgel und der nämlichen Aetzkalilösung abscheuerte, wurden sie wirksam." Nach N. 605 war „die vortheilhafteste Behandlung des Platins, ausser dessen Gebrauch zum positiven Pol in starker Säure, folgende: Die Platte wurde über die Flamme einer Weingeistlampe gehalten, und wenn sie heiss geworden, mit einem Stück Aetzkali gerieben; der Ueberzug, welchen das schmelzende Kali auf dem Platin bildete, wurde 1—2 Minuten lang in Fluss erhalten und das Platin dann zur Fortschaffung des Aetzkalis 4—5 Minuten lang in Wasser gehalten, abgeschwenkt und etwa eine Minute lang in heisses Vitriolöl getaucht; aus diesem wurde es in destillirtes Wasser gebracht, und zur Entfernung der letzten Spuren von Säure 10—15 Minuten lang darin gelassen. Wenn es dann in ein Gemeng von Sauerstoff und Wasserstoff gebracht wurde, begann die Vereinigung sogleich und schritt rasch fort; die Röhre wurde warm, das Platin rothglühend und der Gasrückstand entzündete sich. Diese Wirkung konnte nach Belieben wiederholt und so das Maximum der Erscheinung ohne Hülfe einer Voltaischen Batterie hervorgebracht werden." — So weit Faraday, dessen Versuch entscheidend wäre für eine neue (von der elektrischen verschiedene) sogenannte katalytische Kraft, wenn wirklich durch Behandlung mit heissem Aetzkali und heissem Vitriolöl blos gereinigt und nicht zugleich elektrisch geladen worden wäre, was ja selbst dem ursprünglichen Versuche Döbereiner's gemäss schon durch die dabei angewandte Erhitzung geschehn konnte. Entscheidend gegen die Reinigungstheorie ist es, dass der Versuch sich nicht umkehren lässt, sondern heisses Vitriolöl, dessen

Nun aber schloss ich jene Abhandlung mit folgenden Worten:

„Ich bezeichnete lediglich die Experimente, welche anzustellen wären, um jüngere Männer einzuladen zur Ausführung derselben. Meinen verewigten Freund Ritter wollte ich gleichsam redend einführen,

---

Einwirkung der einer positiven Elektrisirung gleichbedeutend, immer zuletzt angewandt werden muss. Versuche anderer Art zur weitern Aufklärung dieser (mit den schon im Jahrb. der Chemie und Physik 1831. B. 63. S. 375—380. besprochenen nahe zusammenhängenden) Erscheinungen sind zusammengestellt in einer bei der Versammlung der Naturforscher in Strassburg im Jahr 1842 von mir geschriebenen Abhandlung. Die Bedeutsamkeit des Contacts der am positiven oder negativen Pole sich anhäufenden (d. h. hydroelektrisch negativen oder positiven) Körper für elektrische Ladung wurde auch dadurch dargethan, dass (worauf meines Wissens zuvor noch niemand aufmerksam war) eine Platinkette, durch elektrische Ladung nach Ritter's Weise dargestellt, im Contacte mit Knallluft sich polarisch umkehrt. Zugleich wurde nachgewiesen, dass Hydrogen es ist, welches durch seine Wirkung auf positiv an der Voltaischen Säule geladenes Platin diese Umkehrung bewirkt (zuweilen sogar unter den dort erwähnten krampfhaften Zuckungen der Magnetnadel im Multiplicator). Ich sage „positiv an der Voltaischen Säule geladenes Platin“, weil die Umkehrung der Ladungskette durch Einwirkung des Hydrogens nicht so leicht erfolgt, wenn das Platin durch Erhitzung — nach der ursprünglichen Weise Döbereiner's — positiv geladen wurde. — Zugleich zeigte ich, dass positiv geladenes Platin auch reines Hydrogen, und negativ geladenes auch reines Oxygen in Wasser verwandle, wobei allerdings eine hydroelektrische Kette einwirken mag, die aber anders aufzufassen ist, als unter der Form einer Kette aus zwei Flüssigkeiten in Contact mit einem Metall. Denn diese Auffassungsweise kann nur so lange gelten, als feuchtes Platin in der z. B. halb mit Hydrogen erfüllten Röhre theilweise sowohl mit Hydrogen als mit Wasser in Contact ist. Jedoch die Verminderung der Knallluft durch positiv (oder auch negativ) geladenes Platin dauert fort, auch wenn Platin ganz von Wasser bedeckt ist (wie ich diess oft gesehn, da ich den interessanten Faradayischen Versuch sogleich zum Collegienversuche gemacht); und dasselbe findet statt, wenn anstatt Knallluft reines Hydrogen oder reines Oxygen angewandt wird, nur dass alsdann die Wirkung viel langsamer erfolgt. Wenn also auch das vom Wasser verschluckte Oxygen und Hydrogen im Contacte mit Platin sich in Wasser verwandelt: so ist die wirksame elektrische Kette in den Elementartheilen des Platins selbst zu suchen, wie ich die Ladungserscheinung stets aufgefasst. Das am positiven Pol geladene Platin erscheint, verglichen mit der gewöhnlichen Voltaischen Kette, als eine Kette, worin die positiven (dem Zink analog wirkenden) krystallelektrischen Pole geschwächt und zum Theil ganz unterdrückt, und dafür die negativen Pole um so mehr gehoben sind. Da nun wenig Zink viel Kupfer in Action setzen kann, und diese Kette viel kräftiger wirkt, als wenn Zink und Kupfer gleich gross sind, oder Zink die relativ grössere Ausdehnung hat (wie ich durch die in Briefen an Ritter beschriebenen galvanischen Combinationen nachgewiesen): so begreift man, warum auch bei den Ladungsphänomenen der analoge Fall eintritt und das positiv geladene Platin in dem vorhin angeführten Faradayischen Versuche stärker auf Knallluft wirkt als negativ geladenes Platin. Was aber die Einwirkung des geladenen Platins auf reines Hydrogen und reines Oxygen anlangt: so werden die von mir im Jahr 1842 darüber publicirten Beobachtungen bestätigt durch die im Jahr 1845 mitgetheilten Beobachtungen von Smee (s. philos. Magaz. Ser. III. Vol. XXV. S. 434. übers. in Poggend. Annal. 1845. N. 7. oder B. 65. S. 470.). Smee nämlich brachte Platinstreifen, woran Platinschwamm angeschweisst war (wobei sie offenbar durch Erhitzung posi-

wie er mit Beziehung auf seine Ladungssäule jetzt sprechen würde, wenn er noch unter uns wäre. Der Vorwurf, welchen man ihm gemacht hat, dass er mehr speculativen als praktischen Geist gezeigt, trifft nicht sowohl ihn, als seine Lebens-Verhaltnisse. Er ist begründet überhaupt in der zu wenig praktischen, blos auf Do-

[illegible]

tiv geladen wurden) in Glasröhren, die mit Chlorplatin, oder Chlorgold, oder Chlorpalladium, oder salpetersaurem Silber erfüllt waren, und liess dann Hydrogen aufsteigen in die Röhren, so dass der Platinstreifen zur Hälfte im Hydrogen, zur Hälfte in der Metallösung sich befand. Nun sah er den Platinstreifen sich mit einem Ueberzuge des reducirten Metalls bedecken, während das Hydrogen sich verminderte. Er schliesst daraus, das Metall sei durch Hydrogen reducirt worden. Jedoch die Verminderung des Hydrogens ist ein Ausdruck der Einwirkung desselben auf positiv geladenes Platin, dessen Ladung dadurch geschwächt, ja umgekehrt wird, so dass es die Rolle eines unedlen Metalls spielt im Verhältnisse zu der in der Metalllösung stehenden Hälfte, an welcher eben daher das Metall reducirt wird. Um so beachtungswerther muss aber nun die Verminderung des Hydrogens scheinen, auch wenn die Metallauflösung fehlt und der positiv geladene Platinstreifen blos zur einen Hälfte mit Wasser, und zur andern Hälfte mit Hydrogen in Berührung ist. Macht man das Wasser alkalisch, so hemmt man die Wirkung, welche begünstigt wird durch Ansäuerung desselben. — Ich habe schon in jener vorhin erwähnten Abhandlung vom Jahr 1842 zugegeben, dass man im Sinne der gewöhnlichen Theorie die Erscheinung erklären kann, wenn man eben sowohl ein hydrogenirtes als ein oxydirtes Wasser annimmt. Sonach würde bei diesem Versuche eine Combination der Wasserzerlegung und der Wasserbildung sich uns gleichzeitig vor Augen stellen. Und die Vereinigung dieses Gegensatzes kommt vielleicht öfters auch in andern Fällen vor, wo man nicht daran denkt, indem es z. B. ganz naturgemäss scheint, selbst im sogenannten Voltameter, während Knallgas am geladenen Platin sich entbindet, zugleich an Wasserregeneration durch Combination eines, sei es auch relativ noch so kleinen Antheils dieses Knallgases zu denken. Auf alle Fälle ist die Sache dazu angethan, uns aufzurufen zur Revision der ganzen Lehre von der Wasserzerlegung. Denn (wollen wir es nicht verkennen) selbst die alten berühmten auf Wasserzerlegung sich beziehenden Versuche Lavoisier's (durch glühendes Eisen oder schmelzendes Zink) sind in neuerer Zeit wegen der Anomalien, welche sich darboten, in Vergleichung mit denen von der Wasserbildung aus Hydrogen und Oxygen, obwohl diese alleinstehend nicht entscheidend für die Theorie sind, zurückgesetzt und vernachlässigt worden. Und auch die galvanische Wasserzerlegung zeigt einige (mit der Metallladung im Sinne Ritter's zusammenhängende) sehr beachtungswerthe Anomalien, wovon schon im Jahrb. d. Ch. u. Phys. 1828. B. 52. S. 234. u. 251. die Rede war. Daran reihen sich auch die Anomalien, welche entstehn, wenn man Wasserzerlegung einleitet in zwei durch einen Zwischendraht verbundenen Gläsern. Bezeichnet man z. B. den Oxygendraht und den Hydrogendraht von Platin, welche von der Säule ausgehn, mit O und H, und die Enden des die beiden Gläser verbindenden Platindrahtes mit o und h: so stehn sich in dem einen Glase O und h, in dem andern o und H gegenüber, und wenn O' und o' die Volummenge des Oxygens, H' und h' des Hydrogens bezeichnen: so ist $2.O' > h'$ und $2o' < H'$, obwohl $2.O' = H'$ und $2.o' = h'$. In jedem einzelnen Glase ist also die Wasserzerlegung gesetzwidrig, obwohl $2.O' = H'$ und $2.o' = h'$ sich zeigen mag. Man kann aber die Gesetzwidrigkeit noch vermehren, wenn man einem dünnen Platindraht einen Platinstreifen entgegensetzt. Wollen wir die grössere Ausdehnung der Fläche des Platinstreifens durch Einschliessung in Parenthese bezeichnen. Dabei stellte im gemeinen Brunnenwasser in der Art sich die Zerlegung dar: [illegible]

citen gestellten Einrichtung unserer Universitäten. Weil man auf deutschen Akademien nur bei anatomischen Theatern, nicht aber, (wie in Frankreich und England) auch in chemischen Laboratorien und physikalischen Cabineten förmlich angestellte Präparatoren kennt: so war auch Ritter, gleich den meisten deutschen Professoren der Physik und Chemie, darauf angewiesen, vorzugsweise im Kopfe, d. h. theoretisch zu experimentiren, während er bei praktischer Ausführung, isolirt stehend, gewöhnlich mit den ersten Schritten zum Ziele sich begnügen musste."

Schluss-Anmerkung. Es sei mir vergönnt, zum Schlusse der Abhandlung noch einen Blick zu werfen auf die Einleitung zu derselben. Es war dort sogleich auf der ersten Seite von dreierlei Anwendungen der fortschreitenden Naturwissenschaft

---

O	(*h*)	(*o*)	*H*
1,78	2,35	0,78	2,8.

Man sieht, wie anomal die Zerlegung in jedem Glase ist, da in dem Glase, worein der Oxygenpol der Säule geleitet wurde, 1,78.2 = 3,56, also zu viel Oxygen erhalten wurde in Vergleichung mit 2,35 Hydrogen. Im zweiten Glas aber, worein der Hydrogenpol der Säule geleitet wurde, ist zu wenig Oxygen. Es ist nämlich 0,78.2 = 1,56; also zu wenig Oxygen in Vergleichung mit 2,8 Hydrogen. Aber es ist $2(O'+o') = H'+h'$, nämlich 1,78 + 0,78 = 2,56 Oxygen, und 2,35 + 2,8 = 5,15 Hydrogen; und 2,56.2 = 5,12, was genau (bis auf 0,03) stimmt.

Bei einem andern Versuch nicht mit combinirten Platinstreifen und Drähten angestellt, sondern allein mit Platindrähten, aber von verschiedenem Durchmesser (indem $O = 0{,}7^{mm}$, $h = 0 = 0{,}5^{mm}$ und $H = 1^{mm}$ im Durchmesser betrug), und wo in destillirtes Wasser, das mit Schwefelsäure angesäuert war, die Drähte geleitet wurden, betrug

O	*h*	*o*	*H*
18,5	35	15	32.5.

Auch hier ist in einem der beiden durch den Platindraht *ho* (von $0{,}5^{mm}$ Durchmesser) verbundenen Gläser des Oxygens zu viel in Vergleichung mit dem Hydrogen (indem 2.18,5 = 37, während nur 35 erhalten wurden). In dem andern Glas aber betrug das Oxygen zu wenig, da 2.15 = 30, während 32,5 Hydrogen erhalten wurde. Jedoch $2(O'+o') = h'+H'$ wenigstens ziemlich genau; da 18,5 + 15 = 33,5 und 35 + 32,5 = 67,5; aber 2.33,5 = 67.

Grösser werden natürlich die Anomalien, sobald Chlor mit ins Spiel kommt, nämlich wenn Kochsalz haltendes Wasser angewandt wird. Und da noch so viele andere Nebenrücksichten in Betrachtung kommen, so hätte ich längst gewünscht, einen jungen Mann zu einer grössern Arbeit über diesen Gegenstand anregen zu können. Gegenwärtig theile ich diese isolirt stehenden schon vor länger als zehn Jahren angestellten Versuche blos darum mit, weil auch andere Anomalien bei der Ueberführung der Körper von einem Pole zum andern zur Sprache kamen (s. die Abhandl. von Daniell und Miller über die Elektrolyse secundärer Verbindungen in den Phil. Transact. 1844 übers. in Poggend. Annal. B. 64. S. 18.) und weil bei der elektrischen Telegraphie die grosse Wirksamkeit der feuchten Leiter in meilenlanger Ausdehnung (durch welche momentane Uebergänge des Hydrogens und Oxygens von einem Pol zum andern, oder momentan sich fortpflanzende chemische Zersetzungen erfolgen müssten) zu neuen Untersuchungen über gewisse als längst entschieden betrachtete Gegenstände uns aufrufen.

die Rede, unter denen die zur Aufklärung der Dunkelheit des Alterthums, obwohl zuletzt genannt, doch keinesweges den letzten Rang einnimmt. Proben einer solchen Anwendung geben die ersten Hauptabschnitte der vorliegenden Abhandlung; und es zeigte sich, dass auf diesem Wege die Naturwissenschaft, indem sie uns die alterthümliche Kunst und Poesie von einer neuen Seite zeigt, zugleich einflussreich auf neuere Kunst und Poesie werden kann. — Nur einen technischen Gewinn war man bisher gewohnt von der fortschreitenden Naturwissenschaft zu erwarten. Und auf dieses technische Gebiet führte uns der Anhang zu dieser Abhandlung. Davon aber, wie im Geiste fortschreitender Naturwissenschaft und durch die von ihr dargebotenen neuen Hülfsmittel nicht blos die Medicin, sondern überhaupt alle Universitätsstudien einen neuen Aufschwung gewinnen könnten; davon sollte nur nebenbei mit einigen Worten in der Note 32. die Rede sein. Jedoch schon meine erste Abhandlung über Urgeschichte der Physik und den Zusammenhang des Heidenthums mit einer vorhistorischen Naturwissenschaft (welche im Jahrb. d. Chem. u. Phys. von 1821. d. g. R. B. 31. S. 223—252. abgedruckt ist und im Zusammenhange steht mit dem, was in vorliegender Abhandlung in Note 15. 24. 26. 28. zur Sprache kam) führte sogleich auf Gesichtspunkte hin, wie sie gegenwärtig von der in der Note 32. erwähnten Edinburgher medicinischen Missionsanstalt ins Auge gefasst werden. Und eben darin lag eine grosse Ermunterung zur Fortsetzung jener Studien über Urgeschichte der Physik, welche, da sie den Schlüssel zur symbolischen Hieroglyphe darbot, immer umfangreicher und anziehender wurde, obwohl ich damit fast ganz isolirt stehn blieb (vgl. Note 14. u. 29.) seit einer so langen Reihe von Jahren. Immerhin mag man sich eine solche Isolirung, welche vorsichtig und umsichtig zugleich macht, gefallen lassen bei theoretischen Dingen; aber bei praktischen (wie sie in jener an einen ursprünglich Leibnitz'ischen Plan erinnernden Note 32. zur Sprache kamen) ist sie um so schmerzlicher, besonders wenn man erwägt, dass (dem dort Angeführten gemäss) es leichter war in diesem Leibnitzischen Sinne auf Peking zu wirken, als das so ganz nahe liegende Ziel zu erreichen. Aus Indien brachte im Jahr 1837 der ehrwürdige Missionar Bernhard Schmid eine schöne zoologische Sammlung mit für den in seiner nächsten Umgebung unbeachtet gebliebenen Leibnitzianischen Verein. In demselben Jahr 1837 war die Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte in Prag, welche Veranlassung gab von dieser schönen ostindischen Sammlung zu sprechen und im Leibnitz'ischen Geiste die neue Akademie in Wien zu begrüssen, welche schon damals im Plane war, der nun zur Ausführung gelangen soll. Wirklich wurde sogleich damals diese zoologische Sammlung benutzt zur Bereicherung des Museums in Wien, sowie des Universitätsmuseums in Halle und eines Privatkabinets in Hamburg. Dadurch gelang es wenigstens schnell genug, den Sammler in Ostindien auf eine seine Erwartung übertreffende Weise zu entschädigen. Vieles aber ist noch übrig (vorzugsweise ostindische Vögel, welche der ausgezeichnete Ornitholog Nitzsch noch kurz vor seinem Tode systematisch geordnet und bestimmt hat, wodurch die blos mit indischen Namen versehene Sammlung einen viel höheren

Werth erhielt). Und dieser mehr als die Hälfte der Sendung betragende Ueberrest könnte, wenn ein angemessener Verkauf gelingt, nun wohl der Absicht des Ueberbringers gemäss am besten benutzt werden als erstes Samenkorn zu jenem **Reisestipendium**, *wovon in Note 32. die Rede. Wo nicht*[47]*: so bietet sich nun eine andere Gelegenheit dar im Sinne der ursprünglichen Tendenz jenes Leibnitzianischen Vereins, für welchen die Sammlung aus Indien mitgebracht wurde, den noch vorhandenen grössten Theil derselben zu benutzen. Denn offenbar geziemt es sich, mitzuwirken zur Förderung der naturwissenschaftlichen, namentlich botanischen Pflanzschule, welche der nach Ostindien zurückgekehrte Dr. theol.* **Bernhard Schmid** *nun selbst anzulegen im Begriff ist. Wie begeistert dieser höchst achtbare Missionar sei für die Idee einer* **wissenschaftlichen Propaganda**, *zeigt sein schöner Brief, welcher abgedruckt ist in den Blättern der* **Hamburger Börsenhalle** *1840. N. 1825. S. 442. und im* **Allgemeinen Anz. d. Deutschen** *1840. N. 137. S. 1834., worin es unter andern heisst: „die Mönchsklöster des finstern Mittelalters schlossen das Wenige der Religiosität und wissenschaftlichen Geistesthätigkeit, das noch in der Welt existirte, in sich ein und benutzten es zu ihrem Privatvortheile; — will Deutschland* **seine Universitäten jenen Mönchsklöstern ähnlich machen**, *allen Nutzen, den diese Hochschulen schaffen, nur für sich behalten und nur so viele Strahlen des Lichts der Welt zusenden, als gegen ihren Willen ihren Grenzen entschlüpfen?“ — Und dass Indien aus seinem Munde zu uns spricht, zeigen seine vieljährigen in Indien gemachten Erfahrungen und Beobachtungen, von denen er eine Probe den in Nürnberg versammelten*

---

[47]) Es liegt nämlich vielleicht im Plane der Berliner Universität, die Sache gegenwärtig in einer Periode theologischer Wirren noch eine Zeit lang ruhn zu lassen. Wenigstens ist bis jetzt noch keine auf diese Angelegenheit sich beziehende Publication erfolgt, und ich selbst weiss davon nicht mehr, als was ich im Jahr 1843 in der Vorrede der Denkschrift zur Säcularfeier der Universität Erlangen als actenmässigen Auszug abdrucken liess. Da kürzlich in **Hitzig's** Annalen der Criminalrechtspflege, fortges. von **Schletter**, die den Tod meines Bruders, der als Opfer seiner Wissenschaft gefallen, betreffenden Actenstücke abgedruckt wurden (im Maiheft 1846. B. 34. S. 152—185.): so schien es zweckmässig, diesen Aktenstücken auch das vortreffliche Ministerialrescript vom 24. Nov. 1822 anzureihen, welches auf jenen an seinem Grabe gestifteten Leibnitzianischen Verein sich bezog. Nachdem die Königliche Genehmigung jenes Vereins mitgetheilt war, heisst es zum Schlusse: „um diesem Verein auch einen fortdauernden Beweis thätiger Theilnahme zu geben, wird das Ministerium für denselben einen angemessenen jährlichen Beitrag auszuwirken suchen, muss sich aber den desfallsigen definitiven Beschluss bis auf weiteres vorbehalten.“ Unter diesen Umständen fügt die **Redaction** jener **Annalen** folgende Bemerkung bei: „Alles kommt hier auf **Publicität** an; und auch die Red. d. Bl. bietet, obwohl diess nicht direct juridische Interessen berührt, zu diesem Excurse gern die Hand, besonders da man bis jetzt die Sache blos in der Vorrede der **Denkschrift zur Säcularfeier der Universität Erlangen im August 1843** erwähnt findet, während von **Berlin** aus hierüber noch nichts publicirt wurde. Es ist zu wünschen, dass die versprochene **vollständige Publication der hierauf sich beziehenden Actenstücke** in einem vielgelesenen Journal erscheinen möge.“

Philologen mittheilte. (S. Denkschr. zur Säcularfeier der Universität Erlangen S. 47.). Gegenwärtig schrieb mir derselbe aus Ottacamund *(auf dem Blaugebirge Indiens) am* 1. *Jul.* 1846 *von seinem Plane, dort ein wissenschaftliches Seminar für auserlesene junge hoffnungsvolle Indier unter jenen Bergbewohnern zu begründen, und namentlich auch seine botanischen Studien zu ihrer Belehrung zu benutzen. „Ich habe", führt er fort, „meinen Plan dem tüchtigen Botaniker Dr.* Wight, *Verfasser des Prodromus Florae Peninsulae Indiae Orientalis und anderer Werke, vorgelegt, der mir seine Beihülfe verspricht. Er ist jetzt nicht weit von hier in Coimbotoor angestellt. Aber mit diesen Ansichten und Planen darf ich hier noch nicht hervortreten, wenigstens nicht unter den Engländern; sie würden auf mich mit Mitleiden als auf einen* wissenschaftlichen Schwärmer *eben so hinblicken, wie in Deutschland mancher auf mich als auf einen* religiösen Schwärmer *hingeblickt haben mag. Dieses zu errichtende Seminar muss daher durch Unterstützung deutscher wissenschaftlicher Männer vorzüglich fortgeführt werden, während die Erhaltung der drei Tamulischen und einer Hindostanischen Schule für Mohamedaner und andere Ausgaben von den Engländern bestritten werden." Den Botanikern ist Herr Dr. theol.* Schmid *vortheilhaft bekannt durch seine früheren Sendungen eben von diesem ostindischen Blaugebirge aus an den zu früh verewigten Professor* Zenker *in Jena, der mehreres davon publicirte. Durch ähnliche Sendungen wird er denen Ersatz geben, welche geneigt sind, seine dem Ausland und dem Vaterlande zugleich nützlichen Bestrebungen zu fördern. Sehr gern erbiete ich mich, die Zusendungen an ihn zu vermitteln durch Angabe des von ihm mir brieflich bezeichneten angemessenen Weges dazu. Man sieht übrigens dem Dargelegten gemäss ohne mein Erinnern, dass blos theologische Einseitigkeit, welche durch Eigenwilligkeit in der Wahl der Mittel zum Ziele die Erreichung desselben erschwert, jenem im Leibnitzischen Sinne begründeten Vereine (wovon in Note* 32. *die Rede ist) ungünstig sein kann. Was darüber auf historischem Standpunkte zu sagen, habe ich dargelegt in der am* 31. *October* 1834 *gehaltenen und auch in besonderen Abdrücken erschienenen Inaugurationsrede des Hallischen Universitätsgebäudes „*de rebus indicis Academiae Fridericianae inde ab ejus origine peculiari quodam modo eximiaque maiorum munificentia commendatis.*" — Neuerdings aber gab mir* Schubert's Spiegel der Natur *(welches Buch mit Rücksicht auf denselben unter Protection Seiner Königlichen Hoheit des Kronprinzen von Bayern stehenden Verein zur Verbreitung nützlicher Kenntnisse, von welchem schon vorhin die Rede war, abgefasst ist) ganz specielle Veranlassung, mich über* gewisse Hauptfragen unserer Zeit *auszusprechen (in der Allg. Lit. Zeit. Mai* 1846. *N.* 99. *u.* 100.*), und ich bitte besonders die dort dargelegten* Zahlenresultate *zu beachten, da deren gegenseitige Vergleichung allein schon aufrufen kann, einige Aufmerksamkeit dem zu schenken, was in jener Note* 32. *zur Sprache kam.*

XIV.

Ueber einen Satz von dem dreiaxigen Ellipsoid, von welchem die Grundformel der sphärischen Trigonometrie ein besonderer Fall ist.

Von

dem Herausgeber.

Die Formeln der sphärischen Trigonometrie auf das allgemeine dreiaxige Ellipsoid, von welchem die Kugel ein besonderer Fall ist, zu erweitern, ist mit mehrfachen Schwierigkeiten verknüpft. Nach verschiedenen derartigen Versuchen ist mir jedoch eine solche Erweiterung für jetzt wenigstens bei der Grundformel der gesammten sphärischen Trigonometrie, welche die zwischen den drei Seiten und einem Winkel des sphärischen Dreiecks Statt findende Relation ausdrückt, gelungen, und ich erlaube mir daher, den Satz von dem dreiaxigen Ellipsoid, zu welchem diese Untersuchung geführt hat, im Folgenden mitzutheilen, weitere Betrachtungen über diesen Gegenstand einer andern Gelegenheit vorbehaltend. Zugleich enthält das Folgende, wie es mir scheint, einen wegen seiner Allgemeinheit sehr befriedigenden analytischen Beweis der Grundformel der sphärischen Trigonometrie, welcher vielleicht für die Leser des Archivs gleichfalls von einigem Interesse sein dürfte, da er im Ganzen auch nur wenige Vorkenntnisse aus der analytischen Geometrie — bloss einige der einfachsten und bekanntesten Grundformeln dieser Wissenschaft — in Anspruch nimmt.

Die Gleichung einer beliebigen Fläche in Bezug auf rechtwinklige Coordinaten, die wir in dieser Abhandlung immer zum Grunde legen werden, sei

$$1)\quad u = f(x, y, z) = 0$$

und $(x_1 y_1 z_1)$ sei ein beliebiger Punkt dieser Fläche, so dass also, wenn wir der Kürze wegen

$$2)\quad u_1 = f(x_1, y_1, z_1)$$

setzen,

$$3)\quad u_1 = f(x_1, y_1, z_1) = 0$$

ist. Die Gleichungen der durch den Punkt $(x_1 y_1 z_1)$ gelegten Normale dieser Fläche sind nach den Principien der analytischen Geometrie

$$4)\quad \frac{x - x_1}{\frac{\partial u_1}{\partial x_1}} = \frac{y - y_1}{\frac{\partial u_1}{\partial y_1}} = \frac{z - z_1}{\frac{\partial u_1}{\partial z_1}},$$

wo natürlich alle Differentialquotienten partielle Differentialquotienten sind.

Ist nun die Fläche ein dreiaxiges Ellipsoid, dessen Gleichung

$$5)\quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

ist, so ist

$$6)\quad u = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 - 1,$$

und folglich

$$7)\quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{b^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2z}{c^2}.$$

Also sind die Gleichungen der durch den Punkt $(x_1 y_1 z_1)$ des Ellipsoids, für welchen

$$8)\quad \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{b}\right)^2 + \left(\frac{z_1}{c}\right)^2 = 1$$

ist, gehenden Normale des Ellipsoids:

$$9)\quad \frac{x - x_1}{\frac{x_1}{a^2}} = \frac{y - y_1}{\frac{y_1}{b^2}} = \frac{z - z_1}{\frac{z_1}{c^2}},$$

oder

$$10)\quad a^2\left(1 - \frac{x}{x_1}\right) = b^2\left(1 - \frac{y}{y_1}\right) = c^2\left(1 - \frac{z}{z_1}\right),$$

oder

$$11)\quad \frac{a^2}{x_1}(x - x_1) = \frac{b^2}{y_1}(y - y_1) = \frac{c^2}{z_1}(z - z_1).$$

Sind jetzt $(x_1 y_1 z_1)$, $(x_2 y_2 z_2)$, $(x_3 y_3 z_3)$ drei Punkte des Ellipsoids, und folglich

$$12)\quad\begin{cases}\left(\frac{x_1}{a}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c}\right)^2=1,\\ \left(\frac{x_2}{a}\right)^2+\left(\frac{y_2}{b}\right)^2+\left(\frac{z_2}{c}\right)^2=1,\\ \left(\frac{x_3}{a}\right)^2+\left(\frac{y_3}{b}\right)^2+\left(\frac{z_3}{c}\right)^2=1;\end{cases}$$

so sind nach dem Vorhergehenden

$$13)\quad\begin{cases}\frac{x-x_1}{\frac{x_1}{a^2}}=\frac{y-y_1}{\frac{y_1}{b^2}}=\frac{z-z_1}{\frac{z_1}{c^2}},\\ \frac{x-x_2}{\frac{x_2}{a^2}}=\frac{y-y_2}{\frac{y_2}{b^2}}=\frac{z-z_2}{\frac{z_2}{c^2}},\\ \frac{x-x_3}{\frac{x_3}{a^2}}=\frac{y-y_3}{\frac{y_3}{b^2}}=\frac{z-z_3}{\frac{z_3}{c^2}}\end{cases}$$

die Gleichungen der diesen Punkten entsprechenden Normalen des Ellipsoids.

Wir wollen jetzt durch die dem Punkte $(x_1y_1z_1)$ entsprechende Normale und durch den Punkt $(x_2y_2z_2)$ eine Ebene legen, und uns in dieser Ebene durch den Punkt $(x_1y_1z_1)$ eine auf der demselben entsprechenden Normale senkrecht stehende gerade Linie gezogen denken. Die Gleichungen dieser Ebene und dieser geraden Linie seien respective

$$14)\quad A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

und

$$15)\quad \frac{x-x_1}{F_1}=\frac{y-y_1}{G_1}=\frac{z-z_1}{H_1}.$$

Weil die durch die Gleichung 14) charakterisirte Ebene durch die Punkte $(x_1y_1z_1)$ und $(x_2y_2z_2)$ geht, so haben wir nach 14) die Gleichungen

$$16)\quad\begin{cases}A_1(x-x_1)+B_1(y-y_1)+C_1(z-z_1)=0,\\ A_1(x-x_2)+B_1(y-y_2)+C_1(z-z_2)=0;\end{cases}$$

und

$$17)\quad A_1(x_1-x_2)+B_1(y_1-y_2)+C_1(z_1-z_2)=0.$$

Weil ferner die durch die Gleichung 14) oder durch die Gleichung 16) charakterisirte Ebene durch die dem Punkte $(x_1y_1z_1)$ entsprechende Normale des Ellipsoids geht, und diese Normale also ganz in der in Rede stehenden Ebene liegt, so erhalten wir aus

dem ersten Systeme der Gleichungen 13) und der ersten der beiden Gleichungen 16) auf der Stelle die Gleichung

$$18)\quad A_1\frac{x_1}{a^2}+B_1\frac{y_1}{b^2}+C_1\frac{z_1}{c^2}=0.$$

Weil aber auch die durch die Gleichungen 15) charakterisirte gerade Linie ganz in der durch die Gleichung 14) oder durch die Gleichungen 16) charakterisirten Ebene liegt, so erhalten wir aus den Gleichungen 15) und der ersten der beiden Gleichungen 16) die Gleichung

$$19)\quad A_1F_1+B_1G_1+C_1H_1=0.$$

Weil endlich die durch die Gleichungen 15) charakterisirte gerade Linie auf der dem Punkte $(x_1y_1z_1)$ entsprechenden Normale des Ellipsoids senkrecht steht, so erhalten wir nach den Principien der analytischen Geometrie aus dem ersten Systeme der Gleichungen 13) und den Gleichungen 15) die Gleichung

$$1+\frac{\frac{y_1}{b^2}}{\frac{x_1}{a^2}}\cdot\frac{G_1}{F_1}+\frac{\frac{z_1}{c^2}}{\frac{x_1}{a^2}}\cdot\frac{H_1}{F_1}=0$$

oder

$$20)\quad \frac{x_1}{a^2}F_1+\frac{y_1}{b^2}G_1+\frac{z_1}{c^2}H_1=0.$$

Aus den drei Gleichungen 17), 18), 19), nämlich aus den drei Gleichungen

$$21)\quad \begin{cases}\frac{x_1}{a^2}A_1+\frac{y_1}{b^2}B_1+\frac{z_1}{c^2}C_1=0,\\ F_1A_1+G_1B_1+H_1C_1=0,\\ (x_1-x_2)A_1+(y_1-y_2)B_1+(z_1-z_2)C_1=0,\end{cases}$$

wollen wir nun die drei Grössen A_1, B_1, C_1 eliminiren. Zu dem Ende multipliciren wir diese drei Gleichungen nach der Reihe mit

$$(z_1-z_2)G_1-(y_1-y_2)H_1,$$

$$(y_1-y_2)\frac{z_1}{c^2}-(z_1-z_2)\frac{y_1}{b^2},$$

$$\frac{y_1}{b^2}H_1-\frac{z_1}{c^2}G_1$$

und addiren sie dann zu einander; so erhalten wir nach leichter Rechnung zuerst die Gleichung

$$0=\left\{\begin{array}{l}((z_1-z_2)\,G_1-(y_1-y_2)\,H_1)\,\frac{x_1}{a^2}\\ +((y_1-y_2)\,\frac{z_1}{c^2}-(z_1-z_2)\,\frac{y_1}{b^2})\,F_1\\ +(x_1-x_2)\,(\frac{y_1}{b^2}\,H_1-\frac{z_1}{c^2}\,G_1)\end{array}\right\}A_1$$

$$+\left\{\begin{array}{l}((z_1-z_2)\,G_1-(y_1-y_2)H_1)\,\frac{y_1}{b^2}\\ +((y_1-y_2)\,\frac{z_1}{c^2}-(z_1-z_2)\,\frac{y_1}{b^2})\,G_1\\ +(y_1-y_2)\,(\frac{y_1}{b^2}\,H_1-\frac{z_1}{c^2}\,G_1)\end{array}\right\}B_1$$

$$+\left\{\begin{array}{l}((z_1-z_2)\,G_1-(y_1-y_2)\,H_1)\,\frac{z_1}{c^2}\\ +((y_1-y_2)\,\frac{z_1}{c^2}-(z_1-z_2)\,\frac{y_1}{b^2})\,H_1\\ +(z_1-z_2)\,(\frac{y_1}{b^2}\,H_1-\frac{z_1}{c^2}\,G_1)\end{array}\right\}C_1,$$

und hieraus ferner die Gleichung

$$22)\quad\left.\begin{array}{l}\{(y_1-y_2)\,\frac{z_1}{c^2}-(z_1-z_2)\,\frac{y_1}{b^2}\}\,F_1\\ +\{(z_1-z_2)\,\frac{x_1}{a^2}-(x_1-x_2)\,\frac{z_1}{c^2}\}\,G_1\\ +\{(x_1-x_2)\,\frac{y_1}{b^2}-(y_1-y_2)\,\frac{x_1}{a^2}\}\,H_1\end{array}\right\}=0.$$

Weil nun aber nach 20)

$$\frac{x_1}{a^2}\,F_1+\frac{y_1}{b^2}\,G_1+\frac{z_1}{c^2}\,H_1=0$$

ist, so ist, wenn man aus diesen beiden Gleichungen nach der Reihe die Grössen H_1, G_1, F_1 eliminirt, wie man leicht findet:

$$\left.\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\frac{x_1}{a^2}((x_1-x_2)\frac{y_1}{b^2}-(y_1-y_2)\,\frac{x_1}{a^2})\\ -\frac{z_1}{c^2}((y_1-y_2)\,\frac{z_1}{c^2}-(z_1-z_2)\frac{y_1}{b^2})\end{array}\right\}F_1\\ +\left\{\begin{array}{l}\frac{y_1}{b^2}((x_1-x_2)\,\frac{y_1}{b^2}-(y_1-y_2)\,\frac{x_1}{a^2})\\ -\frac{z_1}{c_2}((z_1-z_2)\,\frac{x_1}{a^2}-(x_1-x_2)\frac{z_1}{c^2})\end{array}\right\}G_1\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\frac{x_1}{a^2}\left((z_1-z_2)\frac{x_1}{a^2}-(x_1-x_2)\frac{z_1}{c^2}\right)\\-\frac{y_1}{b^2}\left((y_1-y_2)\frac{z_1}{c^2}-(z_1-z_2)\frac{y_1}{b^2}\right)\end{array}\right\}F_1\\+\left\{\begin{array}{l}\frac{z_1}{c^2}\left((z_1-z_2)\frac{x_1}{a^2}-(x_1-x_2)\frac{z_1}{c^2}\right)\\-\frac{y_1}{b^2}\left((x_1-x_2)\frac{y_1}{b^2}-(y_1-y_2)\frac{x_1}{a^2}\right)\end{array}\right\}H_1\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\frac{y_1}{b^2}\left((y_1-y_2)\frac{z_1}{c^2}-(z_1-z_2)\frac{y_1}{b^2}\right)\\-\frac{x_1}{a^2}\left((z_1-z_2)\frac{x_1}{a^2}-(x_1-x_2)\frac{z_1}{c^2}\right)\end{array}\right\}G_1\\+\left\{\begin{array}{l}\frac{z_1}{c^2}\left((y_1-y_2)\frac{z_1}{c^2}-(z_1-z_2)\frac{y_1}{b^2}\right)\\-\frac{x_1}{a^2}\left((x_1-x_2)\frac{y_1}{b^2}-(y_1-y_2)\frac{x_1}{a^2}\right)\end{array}\right\}H_1\end{array}\right\}=0;$$

oder

$$\left.\begin{array}{l}\left\{(x_1-x_2)\frac{x_1y_1}{a^2b^2}-(y_1-y_2)\left(\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right)+(z_1-z_2)\frac{y_1z_1}{b^2c^2}\right\}F_1\\+\left\{(x_1-x_2)\left(\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right)-(y_1-y_2)\frac{x_1y_1}{a^2b^2}-(z_1-z_2)\frac{x_1z_1}{a^2c^2}\right\}G_1\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{l}\left\{(x_1-x_2)\frac{x_1z_1}{a^2c^2}+(y_1-y_2)\frac{y_1z_1}{b^2c^2}-(z_1-z_2)\left(\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2\right)\right\}F_1\\+\left\{(x_1-x_2)\left(\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right)-(y_1-y_2)\frac{x_1y_1}{a^2b^2}-(z_1-z_2)\frac{x_1z_1}{a^2c^2}\right\}H_1\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{l}\left\{(x_1-x_2)\frac{x_1z_1}{a^2c^2}+(y_1-y_2)\frac{y_1z_1}{b^2c^2}-(z_1-z_2)\left(\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2\right)\right\}G_1\\-\left\{(x_1-x_2)\frac{x_1y_1}{a^2b^2}-(y_1-y_2)\left(\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right)+(z_1-z_2)\frac{y_1z_1}{b^2c^2}\right\}H_1\end{array}\right\}=0;$$

und man kann also offenbar

$$F_1=(x_1-x_2)\left(\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right)-(y_1-y_2)\frac{x_1y_1}{a^2b^2}-(z_1-z_2)\frac{x_1z_1}{a^2c^2},$$

$$G_1=-(x_1-x_2)\frac{x_1y_1}{a^2b^2}+(y_1-y_2)\left(\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right)-(z_1-z_2)\frac{y_1z_1}{b^2c^2},$$

$$H_1=-(x_1-x_2)\frac{x_1z_1}{a^2c^2}-(y_1-y_2)\frac{y_1z_1}{b^2c^2}+(z_1-z_2)\left(\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2\right)$$

oder

$$23)\quad \begin{cases} F_1 = (x_1-x_2)\left(\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right)-(y_1-y_2)\frac{x_1y_1}{a^2b^2}-(z_1-z_2)\frac{x_1z_1}{a^2c^2}, \\ G_1 = (y_1-y_2)\left(\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right)-(z_1-z_2)\frac{y_1z_1}{b^2c^2}-(x_1-x_2)\frac{x_1y_1}{a^2b^2}, \\ H_1 = (z_1-z_2)\left(\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2\right)-(x_1-x_2)\frac{x_1z_1}{a^2c^2}-(y_1-y_2)\frac{y_1z_1}{b^2c^2} \end{cases}$$

setzen. Auch ist

$$24)\quad \begin{cases} F_1 = (x_1-x_2)\left\{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right\} \\ \qquad -\frac{x_1}{a^2}\left\{(x_1-x_2)\frac{x_1}{a}+(y_1-y_2)\frac{y_1}{b^2}+(z_1-z_2)\frac{z_1}{c^2}\right\}, \\ G_1 = (y_1-y_2)\left\{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right\} \\ \qquad -\frac{y_1}{b^2}\left\{(x_1-x_2)\frac{x_1}{a^2}+(y_1-y_2)\frac{y_1}{b^2}+(z_1-z_2)\frac{z_1}{c^2}\right\}, \\ H_1 = (z_1-z_2)\left\{\left(\frac{x_1}{a}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c}\right)^2\right\} \\ \qquad -\frac{z_1}{c^2}\left\{(x_1-x_2)\frac{x_1}{a}+(y_1-y_2)\frac{y_1}{b}+(z_1-z_2)\frac{z_1}{c}\right\}; \end{cases}$$

und folglich

$$F_1^2+G_1^2+H_1^2$$

$$=\{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2\}\{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\}^2$$

$$-2\{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\}\{(x_1-x_2)\frac{x_1}{a^2}+(y_1-y_2)\frac{y_1}{b^2}+(z_1-z_2)\frac{z_1}{c^2}\}^2$$

$$+\{\left(\frac{x_1}{a}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\}\{(x_1-x_2)\frac{x_1}{a^2}+(y_1-y_2)\frac{y_1}{b^2}+(z_1-z_2)\frac{z_1}{c^2}\}^2,$$

also

$$25)\quad F_1^2+G_1^2+H_1^2$$

$$=\{\left(\frac{x_1}{a}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\}^2\{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2\}$$

$$-\{\left(\frac{x_1}{a}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\}\{(x_1-x_2)\frac{x_1}{a^2}+(y_1-y_2)\frac{y_1}{b^2}+(z_1-z_2)\frac{z_1}{c^2}\}^2$$

Verbinden wir aber den Punkt $(x_1y_1z_1)$ auf ganz ähnliche Ar mit dem Punkte $(x_3y_3z_3)$, wie wir denselben vorher mit den Punkte $(x_2y_2z_2)$ verbunden haben, und bezeichnen dann die dei vorher durch F_1, G_1, H_1 bezeichneten Grössen entsprechendei Grössen durch F_1', G_1', H_1'; so ist

$$26)\quad\begin{cases} F_1' = (x_1-x_3)\left\{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right\} \\ \qquad -\frac{x_1}{a^2}\left\{(x_1-x_3)\frac{x_1}{a^2}+(y_1-y_3)\frac{y_1}{b^2}+(z_1-z_3)\frac{z_1}{c^2}\right\}, \\ G_1' = (y_1-y_3)\left\{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right\} \\ \qquad -\frac{y_1}{b^2}\left\{(x_1-x_3)\frac{x_1}{a^2}+(y_1-y_3)\frac{y_1}{b^2}+(z_1-z_3)\frac{z_1}{c^2}\right\}, \\ H_1' = (z_1-z_3)\left\{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right\} \\ \qquad -\frac{z_1}{c^2}\left\{(x_1-x_3)\frac{x_1}{a^2}+(y_1-y_3)\frac{y_1}{b^2}+(z_1-z_3)\frac{z_1}{c^2}\right\} \end{cases}$$

und

$$27)\quad F_1'^2+G_1'^2+H_1'^2$$

$$\left\{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right\}^2\left\{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2+(z_1-z_3)^2\right\}$$
$$-\left\{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right\}\left\{(x_1-x_3)\frac{x_1}{a^2}+(y_1-y_3)\frac{y_1}{b^2}+(z_1-z_3)\frac{z_1}{c^2}\right\}^2.$$

Aus 24) und 26) erhält man aber

$$F_1F_1'+G_1G_1'+H_1H_1'$$
$$=(x_1-x_2)(x_1-x_3)\left\{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right\}^2$$
$$-(x_1-x_2)\frac{x_1}{a_2}\left\{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right\}\left\{(x_1-x_3)\frac{x_1}{a^2}+(y_1-y_3)\frac{y_1}{b^2}+(z_1-z_3)\frac{z_1}{c^2}\right\}$$
$$-(x_1-x_3)\frac{x_1}{a^2}\left\{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right\}\left\{(x_1-x_2)\frac{x_1}{a^2}+(y_1-y_2)\frac{y_1}{b^2}+(z_1-z_2)\frac{z_1}{c^2}\right\}$$
$$+\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2\left\{(x_1-x_2)\frac{x_1}{a^2}+(y_1-y_2)\frac{y_1}{b^2}+(z_1-z_2)\frac{z_1}{c^2}\right\}\left\{(x_1-x_3)\frac{x_1}{a^2}+(y_1-y_3)\frac{y_1}{b^2}+(z_1-z_3)\frac{z_1}{c^2}\right\}$$
$$+(y_1-y_2)(y_1-y_3)\left\{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right\}^2$$
$$-(y_1-y_2)\frac{y_1}{b^2}\left\{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right\}\left\{(x_1-x_3)\frac{x_1}{a^2}+(y_1-y_3)\frac{y_1}{b^2}+(z_1-z_3)\frac{z_1}{c^2}\right\}$$

$$-(y_1-y_3)\frac{y_1}{b^2}\left\{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right\}\left\{(x_1-x_2)\frac{x_1}{a^2}+(y_1-y_2)\frac{y_1}{b^2}+(z_1-z_2)\frac{z_1}{c^2}\right\}$$

$$+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2\left\{(x_1-x_2)\frac{x_1}{a^2}+(y_1-y_2)\frac{y_1}{b^2}+(z_1-z_2)\frac{z_1}{c^2}\right\}\left\{(x_1-x_3)\frac{x_1}{a^2}+(y_1-y_3)\frac{y_1}{b^2}+(z_1-z_3)\frac{z_1}{c^2}\right\}$$

$$+(z_1-z_2)(z_1-z_3)\left\{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right\}$$

$$-(z_1-z_2)\frac{z_1}{c^2}\left\{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right\}\left\{(x_1-x_3)\frac{x_1}{a^2}+(y_1-y_3)\frac{y_1}{b^2}+(z_1-z_3)\frac{z_1}{c^2}\right\}$$

$$-(z_1-z_3)\frac{z_1}{c^2}\left\{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right\}\left\{(x_1-x_2)\frac{x_1}{a^2}+(y_1-y_2)\frac{y_1}{b^2}+(z_1-z_2)\frac{z_1}{c^2}\right\}$$

$$+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\left\{(x_1-x_2)\frac{x_1}{a^2}+(y_1-y_2)\frac{y_1}{b^2}+(z_1-z_2)\frac{z_1}{c^2}\right\}\left\{(x_1-x_3)\frac{x_1}{a^2}+(y_1-y_3)\frac{y_1}{b^2}+(z_1-z_3)\frac{z_1}{c^2}\right\}$$

also, wie leicht erhellet:

$$28)\quad F_1F_1'+G_1G_1'+H_1H_1'$$

$$=\left\{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right\}^2\left\{(x_1-x_2)(x_1-x_3)+(y_1-y_2)(y_1-y_3)+(z_1-z_2)(z_1-z_3)\right\}$$

$$-\left\{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right\}\left\{(x_1-x_2)\frac{x_1}{a^2}+(y_1-y_2)\frac{y_1}{b^2}+(z_1-z_2)\frac{z_1}{c^2}\right\}$$

$$\times\left\{(x_1-x_3)\frac{x_1}{a^2}+(y_1-y_3)\frac{y_1}{b^2}+(z_1-z_3)\frac{z_1}{c^2}\right\}.$$

Von dem Anfange der Coordinaten wollen wir uns jetzt an die Punkte

$$(x_1y_1z_1),\ (x_2y_2z_2),\ (x_3y_3z_3)$$

des Ellipsoids respective die geraden Linien

$$R_1,\ R_2,\ R_3$$

gezogen denken, und die von den Linien

$$R_2,\ R_3;\quad R_3,\ R_1;\quad R_1,\ R_2$$

m Anfangspunkte der Coordinaten als ihrer gemeinschaftlichen pitze eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel respective durch

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3;$$

ie Entfernungen der Punkte

$$(x_2y_2z_2),\ (x_3y_3z_3);\ (x_3y_3z_3),\ (x_1y_1z_1);\ (x_1y_1z_1),\ (x_2y_2z_2)$$

on einander aber respective durch

$$E_1, E_2, E_3$$

ezeichnen; so ist nach einem bekannten Satze der ebenen Trionometrie

$$E_1{}^2 = R_2{}^2 + R_3{}^2 - 2R_2R_3\cos\alpha_1,$$
$$E_2{}^2 = R_3{}^2 + R_1{}^2 - 2R_3R_1\cos\alpha_2,$$
$$E_3{}^2 = R_1{}^2 + R_2{}^2 - 2R_1R_2\cos\alpha_3.$$

ach einer bekannten Formel der analytischen Geometrie ist aber

$$R_1{}^2 = x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2,$$
$$R_2{}^2 = x_2{}^2 + y_2{}^2 + z_2{}^2,$$
$$R_3{}^2 = x_3{}^2 + y_3{}^2 + z_3{}^2$$

nd

$$E_1{}^2 = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2,$$
$$E_2{}^2 = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2,$$
$$E_3{}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2.$$

ührt man dies in die obigen Ausdrücke von

$$E_1{}^2, E_2{}^2, E_3{}^2$$

in, so erhält man nach einigen ganz leichten Reductionen die leichungen

$$x_2x_3 + y_2y_3 + z_2z_3 = R_2R_3\cos\alpha_1,$$
$$x_3x_1 + y_3y_1 + z_3z_1 = R_3R_1\cos\alpha_2,$$
$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = R_1R_2\cos\alpha_3;$$

us denen sich sogleich

$$29)\quad \begin{cases} \cos\alpha_1 = \dfrac{x_2x_3 + y_2y_3 + z_2z_3}{R_2R_3}, \\ \cos\alpha_2 = \dfrac{x_3x_1 + y_3y_1 + z_3z_1}{R_3R_1}, \\ \cos\alpha_3 = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{R_1R_2} \end{cases}$$

rgiebt.

Durch den Anfang der Coordinaten wollen wir uns jetzt eine der dem Punkte $(x_1 y_1 z_1)$ entsprechenden Normale des Ellipsoids parallele gerade Linie gelegt denken, und die Coordinaten eines der beiden Durchschnittspunkte dieser geraden Linie mit der Oberfläche des Ellipsoids durch ξ_1, η_1, ζ_1 bezeichnen; so sind nach 13)

$$30)\quad \frac{x}{\frac{x_1}{a^2}} = \frac{y}{\frac{y_1}{b^2}} = \frac{z}{\frac{z_1}{c^2}}$$

oder

$$31)\quad \frac{a^2 x}{x_1} = \frac{b^2 y}{y_1} = \frac{c^2 z}{z_1}.$$

die Gleichungen dieser geraden Linie. Die Entfernung des Punktes $(\xi_1 \eta_1 \zeta_1)$ von dem Anfange der Coordinaten sei ϱ_1, und die von den Linien

$$\varrho_1, R_1; \quad \varrho_1, R_2; \quad \varrho_1, R_3$$

an dem Anfangspunkte der Coordinaten als ihrer gemeinschaftlichen Spitze eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel seien respective

$$N_{1,1}, \quad N_{1,2}, \quad N_{1,3};$$

so ist, wenn wir die Entfernungen des Punktes $(\xi_1 \eta_1 \zeta_1)$ von den Punkten

$$(x_1 y_1 z_1), \quad (x_2 y_2 z_2), \quad (x_3 y_3 z_3)$$

respective durch

$$E_{1,1}, \quad E_{1,2}, \quad E_{1,3}$$

bezeichnen, nach einem bekannten, schon oben angewandten Satze der ebenen Trigonometrie

$$E^2_{1,1} = \varrho_1^2 + R_1^2 - 2\varrho_1 R_1 \cos N_{1,1},$$
$$E^2_{1,2} = \varrho_1^2 + R_2^2 - 2\varrho_1 R_2 \cos N_{1,2},$$
$$E^2_{1,3} = \varrho_1^2 + R_3^2 - 2\varrho_1 R_3 \cos N_{1,3};$$

und folglich, auf ganz ähnliche Art wie oben:

$$32)\quad \begin{cases} \cos N_{1,1} = \dfrac{\xi_1 x_1 + \eta_1 y_1 + \zeta_1 z_1}{\varrho_1 R_1}, \\[2ex] \cos N_{1,2} = \dfrac{\xi_1 x_2 + \eta_1 y_2 + \zeta_1 z_2}{\varrho_1 R_2}, \\[2ex] \cos N_{1,3} = \dfrac{\xi_1 x_3 + \eta_1 y_3 + \zeta_1 z_3}{\varrho_1 R_3}. \end{cases}$$

Weil nun aber der Punkt $(\xi_1 \eta_1 \zeta_1)$ in der durch die Gleichungen 30) charakterisirten geraden Linie liegt; so ist

$$\frac{\xi_1}{\frac{x_1}{a^2}} = \frac{\eta_1}{\frac{y_1}{b^2}} = \frac{\zeta_1}{\frac{z_1}{c^2}},$$

also

$$\xi_1 = \frac{\frac{x_1}{a^2}}{\frac{z_1}{c^2}}\zeta_1, \quad \eta_1 = \frac{\frac{y_1}{b^2}}{\frac{z_1}{c^2}}\zeta_1;$$

und folglich nach 32):

$$33) \begin{cases} \cos N_{1,1} = \dfrac{\frac{x_1}{a^2}x_1 + \frac{y_1}{b^2}y_1 + \frac{z_1}{c^2}z_1}{\frac{z_1}{c^2}\varrho_1 R_1}\zeta_1, \\[2ex] \cos N_{1,2} = \dfrac{\frac{x_1}{a^2}x_2 + \frac{y_1}{b^2}y_2 + \frac{z_1}{c^2}z_2}{\frac{z_1}{c^2}\varrho_1 R_2}\zeta_1, \\[2ex] \cos N_{1,3} = \dfrac{\frac{x_1}{a^2}x_3 + \frac{y_1}{b^2}y_3 + \frac{z_1}{c}z_3}{\frac{z_1}{c^2}\varrho_1 R_3}\zeta_1. \end{cases}$$

Nach den Principien der analytischen Geometrie ist aber

$$\varrho_1^2 = \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2,$$

also nach dem Obigen

$$\varrho_1^2 = \frac{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2}{\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2}\zeta_1^2$$

oder

$$\left(\frac{z_1}{c^2}\varrho_1\right)^2 = \left\{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right\}.\zeta_1^2.$$

Folglich ist

$$\frac{z_1}{c^2}\varrho_1 = \pm\zeta_1\sqrt{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2},$$

indem man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem z_1 und ζ_1 gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben, d. h. jenachdem die Punkte $(x_1 y_1 z_1)$ und $(\xi_1 \eta_1 \zeta_1)$ auf einer und derselben oder auf entgegengesetzten Seiten der Ebene der xy liegen. Nehmen wir also, was offenbar verstattet ist, für $(\xi_1 \eta_1 \zeta_1)$ immer denjenigen der

beiden Durchschnittspunkte der durch den Anfang der Coordinaten mit der dem Punkte $(x_1y_1z_1)$ entsprechenden Normale des Ellipsoids parallel gelegten geraden Linie mit der Oberfläche des Ellipsoids, welcher mit dem Punkte $(x_1y_1z_1)$ auf einer und derselben Seite der Ebene der xy liegt, so ist

$$\frac{z_1}{c^2}\varrho_1=\zeta_1\sqrt{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2},$$

und folglich nach 33):

$$34)\quad\begin{cases}\cos N_{1,1}=\dfrac{\frac{x_1}{a^2}x_1+\frac{y_1}{b^2}y_1+\frac{z_1}{c^2}z_1}{R_1\sqrt{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2}},\\[2ex]\cos N_{1,2}=\dfrac{\frac{x_1}{a^2}x_2+\frac{y_1}{b^2}y_2+\frac{z_1}{c^2}z_2}{R_2\sqrt{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2}},\\[2ex]\cos N_{1,3}=\dfrac{\frac{x_1}{a^2}x_3+\frac{y_1}{b^2}y_3+\frac{z_1}{c^2}z_3}{R_3\sqrt{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2}};\end{cases}$$

von welchen drei Formeln man wegen 12) die erste auch unter der einfacheren Form

$$35)\quad\cos N_{1,1}=\frac{1}{R_1\sqrt{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2}}$$

darstellen kann.

Nach 25) ist nun

$$\frac{F_1{}^2+G_1{}^2+H_1{}^2}{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2}$$

$$=\left\{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right\}\{x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2+x_2{}^2+y_2{}^2+z_2{}^2$$
$$-2(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)\}$$
$$-\left\{\frac{x_1}{a^2}x_1+\frac{y_1}{b^2}y_1+\frac{z_1}{c^2}z_1-\left(\frac{x_1}{a^2}x_2+\frac{y_1}{b^2}y_2+\frac{z_1}{c^2}z_2\right)\right\},$$

also nach dem Vorhergehenden, wie leicht erhellen wird:

$$R_1^2 \cos N^2_{1,1} (F_1^2 + G_1^2 + H_1^2)$$

$$= \frac{1}{R_1^2 \cos N^2_{1,1}} (R_1^2 + R_2^2 - 2 R_1 R_2 \cos \alpha_3) - (1 - \frac{R_2 \cos N_{1,2}}{R_1 \cos N_{1,1}})^2$$

$$= \frac{1}{\cos N^2_{1,1}} \left\{ \sin N^2_{1,1} - 2 \frac{R_2}{R_1} (\cos \alpha_3 - \cos N_{1,1} \cos N_{1,2}) + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \sin N^2_{1,2} \right\}$$

$$= \frac{1}{\cos N^2_{1,1}} \left\{ (\sin N_{1,1} - \frac{R_2}{R_1} \sin N_{1,2})^2 - 2 \frac{R_2}{R_1} (\cos \alpha_3 - \cos (N_{1,1} - N_{1,2})) \right\}$$

$$= \frac{1}{\cos N^2_{1,1}} \left\{ (\sin N_{1,1} + \frac{R_2}{R_1} \sin N_{1,2})^2 - 2 \frac{R_2}{R_1} (\cos \alpha_3 - \cos (N_{1,1} + N_{1,2})) \right\}.$$

Auf ganz ähnliche Art ist nach 27)

$$R_1^2 \cos N_{1,1}^2 (F_1'^2 + G_1'^2 + H_1'^2)$$

$$= \frac{1}{\cos N^2_{1,1}} \left\{ \sin N^2_{1,1} - 2 \frac{R_3}{R_1} (\cos \alpha_2 - \cos N_{1,1} \cos N_{1,3}) + \left(\frac{R_3}{R_1}\right)^2 \sin N^2_{1,3} \right\}$$

$$= \frac{1}{\cos N^2_{1,1}} \left\{ (\sin N_{1,1} - \frac{R_3}{R_1} \sin N_{1,3})^2 - 2 \frac{R_3}{R_1} (\cos \alpha_2 - \cos (N_{1,1} - N_{1,3})) \right\}$$

$$= \frac{1}{\cos N^2_{1,1}} \left\{ (\sin N_{1,1} + \frac{R_3}{R_1} \sin N_{1,3})^2 - 2 \frac{R_3}{R_1} (\cos \alpha_2 - \cos (N_{1,1} + N_{1,3})) \right\}.$$

Nach 28) ist aber

$$\frac{F_1 F_1' + G_1 G_1' + H_1 H_1'}{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2}$$

$$= \left\{ \left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2 \right\} \left\{ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) + (x_2 x_3 + y_2 y_3 + z_2 z_3) - (x_3 x_1 + y_3 y_1 + z_3 z_1) \right\}$$

$$- \left\{ 1 - \left(\frac{x_1}{a^2} x_2 + \frac{y_1}{b^2} y_2 + \frac{z_1}{c^2} z_2\right) \right\} \left\{ 1 - \left(\frac{x_1}{a^2} x_3 + \frac{y_1}{b^2} y_3 + \frac{z_1}{c^2} z_3\right) \right\},$$

also nach dem Vorhergehenden

$$R_1^2 \cos N_{1,1}^2 (F_1 F_1' + G_1 G_1' + H_1 H_1')$$

$$= \frac{1}{R_1^2 \cos N_{1,1}^2}(R_1^2 - R_1 R_2 \cos\alpha_3 + R_2 R_3 \cos\alpha_1 - R_3 R_1 \cos\alpha_2)$$

$$-(1 - \frac{R_2 \cos N_{1,2}}{R_1 \cos N_{1,1}})(1 - \frac{R_3 \cos N_{1,3}}{R_1 \cos N_{1,1}})$$

$$= \frac{1}{\cos N_{1,1}^2}(1 + \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{R_3}{R_1} \cos\alpha_1 - \frac{R_3}{R_1}\cos\alpha_2 - \frac{R_2}{R_1}\cos\alpha_3)$$

$$-(1 - \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{\cos N_{1,2}}{\cos N_{1,1}} - \frac{R_3}{R_1} \cdot \frac{\cos N_{1,3}}{\cos N_{1,1}} + \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{R_3}{R_1} \cdot \frac{\cos N_{1,2}}{\cos N_{1,1}} \cdot \frac{\cos N_{1,3}}{\cos N_{1,1}})$$

$$= \frac{1}{\cos N_{1,1}^2}\left\{\begin{array}{l} \sin N_{1,1}^2 + \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{R_3}{R_1}(\cos\alpha_1 - \cos N_{1,2} \cos N_{1,3}) \\ \qquad - \frac{R_3}{R_1}(\cos\alpha_2 - \cos N_{1,3} \cos N_{1,1}) \\ \qquad - \frac{R_2}{R_1}(\cos\alpha_3 - \cos N_{1,1} \cos N_{1,2}) \end{array}\right\}.$$

Von dem Anfange der Coordinaten aus wollen wir uns jetzt zwei den beiden in dem Punkte $(x_1 y_1 z_1)$ auf die diesem Punkte entsprechende Normale errichteten Senkrechten, deren Gleichungen

$$\frac{x - x_1}{F_1} = \frac{y - y_1}{G_1} = \frac{z - z_1}{H_1}$$

und

$$\frac{x - x_1}{F_1'} = \frac{y - y_1}{G_1'} = \frac{z - z_1}{H_1'}$$

sind, parallele gerade Linien gezogen denken, deren Gleichungen also

$$\frac{x}{F_1} = \frac{y}{G_1} = \frac{z}{H_1}$$

und

$$\frac{x}{F_1'} = \frac{y}{G_1'} = \frac{z}{H_1'}$$

sind, und in diesen beiden geraden Linien zwei beliebige durch die Coordinaten X_1, Y_1, Z_1 und X_1', Y_1', Z_1' bestimmte Punkte, deren Entfernung von einander durch $\mathfrak{E}_1$ bezeichnet werden mag, und deren Entfernungen vom Anfange der Coordinaten respective $\mathfrak{X}_1$ und $\mathfrak{X}_1'$ sein sollen, annehmen. Bezeichnen wir nun den von diesen beiden geraden Linien eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel durch A_1, so ist bekanntlich

$$\mathfrak{E}_1^2 = \mathfrak{X}_1^2 + \mathfrak{X}_1'^2 - 2\mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_1' \cos A_1,$$

also nach einem bekannten, im Obigen schon mehrfach angewandten Satze der analytischen Geometrie:

$$(X_1-X_1')^2+(Y_1-Y_1')^2+(Z_1-Z_1')^2$$
$$=X_1^2+Y_1^2+Z_1^2+X_1'^2+Y_1'^2+Z_1'^2-2\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_1'\cos A_1,$$

woraus sogleich

$$\cos A_1=\frac{X_1X_1'+Y_1Y_1'+Z_1Z_1'}{\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_1'}$$

folgt. Nun ist aber nach dem Vorhergehenden

$$\frac{X_1}{F_1}=\frac{Y_1}{G_1}=\frac{Z_1}{H_1}$$

und

$$\frac{X_1'}{F_1'}=\frac{Y_1'}{G_1'}=\frac{Z_1'}{H_1'},$$

also

$$X_1=\frac{F_1}{H_1}Z_1,\ Y_1=\frac{G_1}{H_1}Z_1 \text{ und } X_1'=\frac{F_1'}{H_1'}Z_1',\ Y_1'=\frac{G_1'}{H_1'}Z_1'.$$

Folglich ist

$$\cos A_1=\frac{F_1F_1'+G_1G_1'+H_1H_1'}{H_1H_1'\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_1'}Z_1Z_1'.$$

Aber bekanntlich

$$\mathfrak{X}_1=\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2},$$
$$\mathfrak{X}_1'=\sqrt{X_1'^2+Y_1'^2+Z_1'^2}$$

und folglich

$$\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_1'=\sqrt{(X_1^2+Y_1^2+Z_1^2)(X_1'^2+Y_1'^2+Z_1'^2)}$$
$$=\sqrt{\frac{(F_1^2+G_1^2+H_1^2)(F_1'^2+G_1'^2+H_1'^2)Z_1^2Z_1'^2}{H_1^2H_1'^2}}$$
$$=\pm Z_1Z_1'\sqrt{\frac{(F_1^2+G_1^2+H_1^2)(F_1'^2+G_1'^2+H_1'^2)}{H_1^2H_1'^2}},$$

wo man das obere oder untere Zeichen nehmen muss, jenachdem Z_1 und Z_1' gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben, d. h. jenachdem die beiden von dem Anfange der Coordinaten aus gezogenen geraden Linien auf einer und derselben oder auf entgegengesetzten Seiten der Ebene der xy liegen. Also ist nach dem Obigen mit derselben Bedingung wegen des Vorzeichens:

36) $$\cos A_1=\pm\frac{F_1F_1'+G_1G_1'+H_1H_1'}{H_1H_1'\sqrt{\frac{(F_1^2+G_1^2+H_1^2)(F_1'^2+G_1'^2+H_1'^2)}{H_1^2H_1'^2}}}.$$

Ist nun $H_1 H_1'$ positiv, d. h. haben die Grössen H_1 und H_1' gleiche Vorzeichen, so ist mit derselben Bedingung wegen des Vorzeichens wie vorher:

$$37)\quad \cos A_1 = \pm \frac{F_1 F_1' + G_1 G_1' + H_1 H_1'}{\sqrt{(F_1^2 + G_1^2 + H_1^2)(F_1'^2 + G_1'^2 + H_1'^2)}}.$$

Ist dagegen $H_1 H_1'$ negativ, d. h. haben die Grössen H_1 und H_1' ungleiche Vorzeichen, so ist mit derselben Bedingung wegen des Vorzeichens wie vorher:

$$38)\quad \cos A_1 = \mp \frac{F_1 F_1' + G_1 G_1' + H_1 H_1'}{\sqrt{(F_1^2 + G_1^2 + H_1^2)(F_1'^2 + G_1'^2 + H_1'^2)}}$$

Nach dem Obigen ist aber, wie man leicht findet:

$$39)\quad \begin{cases} H_1 = \dfrac{z_1 - z_2}{R_1^2 \cos N_{1,1}^2} - \dfrac{z_1}{c^2}\left(1 - \dfrac{R_2 \cos N_{1,2}}{R_1 \cos N_{1,1}}\right), \\ H_1' = \dfrac{z_1 - z_3}{R_1^2 \cos N_{1,1}^2} - \dfrac{z_1}{c^2}\left(1 - \dfrac{R_3 \cos N_{1,3}}{R_1 \cos N_{1,1}}\right). \end{cases}$$

Wenn wir nun in den Ausdruck von $\cos A_1$ die aus dem Obigen sich ergebenden Ausdrücke von

$$F_1 F_1' + G_1 G_1' + H_1 H_1'$$

und

$$F_1^2 + G_1^2 + H_1^2,\quad F_1'^2 + G_1'^2 + H_1'^2$$

einführen, so erhalten wir Folgendes.

Wenn die Grössen H_1, H_1', d. i.

$$\frac{z_1 - z_2}{R_1^2 \cos N_{1,1}^2} - \frac{z_1}{c^2}\left(1 - \frac{R_2 \cos N_{1,2}}{R_1 \cos N_{1,1}}\right),$$

$$\frac{z_1 - z_3}{R_1^2 \cos N_{1,1}^2} - \frac{z_1}{c^2}\left(1 - \frac{R_3 \cos N_{1,3}}{R_1 \cos N_{1,1}}\right);$$

oder, was Dasselbe ist, die Grössen

$$z_1 - z_2 - \frac{z_1 R_1 \cos N_{1,1}}{c^2}(R_1 \cos N_{1,1} - R_2 \cos N_{1,2}),$$

$$z_1 - z_3 - \frac{z_1 R_1 \cos N_{1,1}}{c^2}(R_1 \cos N_{1,1} - R_3 \cos N_{1,3})$$

gleiche Vorzeichen haben, so ist mit derselben Bestimmung wegen des Vorzeichens wie vorher

40) $\cos A_1 =$

$$\frac{\left\{\begin{array}{l} \sin N_{1,1}{}^2 + \frac{R_2}{R_1}\cdot\frac{R_3}{R_1}(\cos\alpha_1 - \cos N_{1,2}\cos N_{1,3}) \\ \qquad - \frac{R_3}{R_1}(\cos\alpha_2 - \cos N_{1,3}\cos N_{1,1}) \\ \qquad - \frac{R_2}{R_1}(\cos\alpha_3 - \cos N_{1,1}\cos N_{1,2}) \end{array}\right\}}{\pm\left\{\begin{array}{l} \left[\sin N_{1,1}{}^2 - 2\frac{R_2}{R_1}(\cos\alpha_3 - \cos N_{1,1}\cos N_{1,2}) + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \sin N_{1,2}{}^2\right] \\ \times\left[\sin N_{1,1}{}^2 - 2\frac{R_3}{R_1}(\cos\alpha_2 - \cos N_{1,1}\cos N_{1,3}) + \left(\frac{R_3}{R_1}\right)^2 \sin N_{1,3}{}^2\right] \end{array}\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{\left\{\begin{array}{l} \sin N_{1,1}{}^2 + \frac{R_2}{R_1}\cdot\frac{R_3}{R_1}(\cos\alpha_1 - \cos N_{1,2}\cos N_{1,3}) \\ \qquad - \frac{R_3}{R_1}(\cos\alpha^2 - \cos N_{1,3}\cos N_{1,1}) \\ \qquad - \frac{R_2}{R_1}(\cos\alpha_3 - \cos N_{1,1}\cos N_{1,2}) \end{array}\right\}}{\pm\left\{\begin{array}{l} \left[\left(\sin N_{1,1} - \frac{R_2}{R_1}\sin N_{1,2}\right)^2 - 2\frac{R_2}{R_1}(\cos\alpha_3 - \cos(N_{1,1} - N_{1,2}))\right] \\ \times\left[\left(\sin N_{1,1} - \frac{R_3}{R_1}\sin N_{1,3}\right)^2 - 2\frac{R_3}{R_1}(\cos\alpha_3 - \cos(N_{1,1} - N_{1,3}))\right] \end{array}\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{\left\{\begin{array}{l} \sin N_{1,1}{}^2 + \frac{R_2}{R_1}\cdot\frac{R_3}{R_1}(\cos\alpha_1 - \cos N_{1,2}\cos N_{1,3}) \\ \qquad - \frac{R_3}{R_1}(\cos\alpha_2 - \cos N_{1,3}\cos N_{1,1}) \\ \qquad - \frac{R_2}{R_1}(\cos\alpha_3 - \cos N_{1,1}\cos N_{1,2}) \end{array}\right\}}{\pm\left\{\begin{array}{l} \left[\left(\sin N_{1,1} + \frac{R_2}{R_1}\sin N_{1,2}\right)^2 - 2\frac{R_2}{R_1}(\cos\alpha_3 - \cos(N_{1,1} + N_{1,2}))\right] \\ \times\left[\left(\sin N_{1,1} + \frac{R_3}{R_1}\sin N_{1,3}\right)^2 - 2\frac{R_3}{R_1}(\cos\alpha_2 - \cos(N_{1,1} + N_{1,3}))\right] \end{array}\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

oder

41) $\cos A_1 =$

$$\frac{\left\{\begin{array}{l} R_1{}^2 \sin N_{1,1}{}^2 + R_2 R_3(\cos\alpha_1 - \cos N_{1,2}\cos N_{1,3}) \\ \qquad - R_1 R_3(\cos\alpha_2 - \cos N_{1,3}\cos N_{1,1}) \\ \qquad - R_1 R_2(\cos\alpha_3 - \cos N_{1,1}\cos N_{1,2}) \end{array}\right\}}{\pm\sqrt{\begin{array}{l} \{R_1{}^2 \sin N_{1,1}{}^2 - 2R_1 R_2(\cos\alpha_3 - \cos N_{1,1}\cos N_{1,2}) + R_2{}^2 \sin N_{1,2}{}^2\} \\ \times\{R_1{}^2 \sin N_{1,1}{}^2 - 2R_1 R_3(\cos\alpha_2 - \cos N_{1,1}\cos N_{1,3}) + R_3{}^2 \sin N_{1,3}{}^2\} \end{array}}}$$

$$=\pm\frac{\left\{\begin{array}{r}R_1{}^2\sin N_{1,1}{}^2+R_2R_3(\cos\alpha_1-\cos N_{1,2}\cos N_{1,3})\\-R_1R_3(\cos\alpha_2-\cos N_{1,3}\cos N_{1,1})\\-R_1R_2(\cos\alpha_3-\cos N_{1,1}\cos N_{1,2})\end{array}\right\}}{\sqrt{\begin{array}{r}\{(R_1\sin N_{1,1}-R_2\sin N_{1,2})^2-2R_1R_2(\cos\alpha_3-\cos(N_{1,1}-N_{1,2}))\}\\\times\{(R_1\sin N_{1,1}-R_3\sin N_{1,3})^2-2R_1R_3(\cos\alpha_2-\cos(N_{1,1}-N_{1,3}))\}\end{array}}}$$

$$=\pm\frac{\left\{\begin{array}{r}R_1{}^2\sin N_{1,1}{}^2+R_2R_3(\cos\alpha_1-\cos N_{1,2}\cos N_{1,3})\\-R_1R_3(\cos\alpha_2-\cos N_{1,3}\cos N_{1,1})\\-R_1R_2(\cos\alpha_3-\cos N_{1,1}\cos N_{1,2})\end{array}\right\}}{\sqrt{\begin{array}{r}\{(R_1\sin N_{1,1}+R_2\sin N_{1,2})^2-2R_1R_2(\cos\alpha_3-\cos(N_{1,1}+N_{1,2}))\}\\\times\{(R_1\sin N_{1,1}+R_3\sin N_{1,3})^2-2R_1R_3(\cos\alpha_2-\cos(N_{1,1}+N_{1,3}))\}\end{array}}}$$

Wenn dagegen die Grössen H_1, H_1', d. i.

$$\frac{z_1-z_2}{R_1{}^2\cos N_{1,1}{}^2}-\frac{z_1}{c^2}\left(1-\frac{R_2\cos N_{1,2}}{R_1\cos N_{1,1}}\right),$$

$$\frac{z_1-z_3}{R_1{}^2\cos N_{1,1}{}^2}-\frac{z_1}{c^2}\left(1-\frac{R_3\cos N_{1,3}}{R_1\cos N_{1,1}}\right);$$

oder, was Dasselbe ist, die Grössen

$$z_1-z_2-\frac{z_1R_1\cos N_{1,1}}{c^2}(R_1\cos N_{1,1}-R_2\cos N_{1,2}),$$

$$z_1-z_3-\frac{z_1R_1\cos N_{1,1}}{c^2}(R_1\cos N_{1,1}-R_3\cos N_{1,3})$$

ungleiche Vorzeichen haben, so ist mit derselben Bestimmung wegen des Vorzeichens wie vorher:

$$42)\quad \cos A_1=$$

$$\pm\frac{\left\{\begin{array}{l}\sin N_{1,1}{}^2+\frac{R_2}{R_1}\cdot\frac{R_3}{R_1}(\cos\alpha_1-\cos N_{1,2}\cos N_{1,3})\\\qquad-\frac{R_3}{R_1}(\cos\alpha_2-\cos N_{1,3}\cos N_{1,1})\\\qquad-\frac{R_2}{R_1}(\cos\alpha_3-\cos N_{1,1}\cos N_{1,2})\end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{l}[\sin N_{1,1}{}^2-2\frac{R_2}{R_1}(\cos\alpha_3-\cos N_{1,1}\cos N_{1,2})+\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2\sin N_{1,2}{}^2]\\\times[\sin N_{1,1}{}^2-2\frac{R_3}{R_1}(\cos\alpha_2-\cos N_{1,1}\cos N_{1,3})+\left(\frac{R_3}{R_1}\right)^2\sin N_{1,3}{}^2]\end{array}\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$\mp\frac{\left\{\begin{array}{l}\sin N_{1,1}{}^2+\frac{R_2}{R_1}\cdot\frac{R_3}{R_1}(\cos\alpha_1-\cos N_{1,2}\cos N_{1,3})\\ \qquad-\frac{R_3}{R_1}(\cos\alpha_2-\cos N_{1,3}\cos N_{1,1})\\ \qquad-\frac{R_2}{R_1}(\cos\alpha_3-\cos N_{1,1}\cos N_{1,2})\end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{l}\left[(\sin N_{1,1}-\frac{R_2}{R_1}\sin N_{1,2})^2-2\frac{R_2}{R_1}(\cos\alpha_3-\cos(N_{1,1}-N_{1,2}))\right]\\ \times\left[(\sin N_{1,1}-\frac{R_3}{R_1}\sin N_{1,3})^2-2\frac{R_3}{R_1}(\cos\alpha_2-\cos(N_{1,1}-N_{1,3}))\right]\end{array}\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$\mp\frac{\left\{\begin{array}{l}\sin N_{1,1}{}^2+\frac{R_2}{R_1}\cdot\frac{R_3}{R_1}(\cos\alpha_1-\cos N_{1,2}\cos N_{1,3})\\ \qquad-\frac{R_3}{R_1}(\cos\alpha_2-\cos N_{1,3}\cos N_{1,1})\\ \qquad-\frac{R_2}{R_1}(\cos\alpha_3-\cos N_{1,1}\cos N_{1,2})\end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{l}\left[(\sin N_{1,1}+\frac{R_2}{R_1}\sin N_{1,2})^2-2\frac{R_2}{R_1}(\cos\alpha_3-\cos(N_{1,1}+N_{1,2}))\right]\\ \times\left[(\sin N_{1,1}+\frac{R_3}{R_1}\sin N_{1,3})^2-2\frac{R_3}{R_1}(\cos\alpha_2-\cos(N_{1,1}+N_{1,3}))\right]\end{array}\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

oder

$$43)\quad \cos A_1 =$$

$$\mp\frac{\left\{\begin{array}{l}R_1{}^2\sin N_{1,1}{}^2+R_2R_3(\cos\alpha_1-\cos N_{1,2}\cos N_{1,3})\\ \qquad-R_1R_3(\cos\alpha_2-\cos N_{1,3}\cos N_{1,1})\\ \qquad-R_1R_2(\cos\alpha_3-\cos N_{1,1}\cos N_{1,2})\end{array}\right\}}{\sqrt{\begin{array}{l}\{R_1{}^2\sin N_{1,1}{}^2-2R_1R_2(\cos\alpha_3-\cos N_{1,1}\cos N_{1,2})+R_2{}^2\sin N_{1,2}{}^2\}\\ \times\{R_1{}^2\sin N_{1,1}{}^2-2R_1R_3(\cos\alpha_2-\cos N_{1,1}\cos N_{1,3})+R_3{}^2\sin N_{1,3}{}^2\}\end{array}}}$$

$$=\mp\frac{\left\{\begin{array}{l}R_1{}^2\sin N_{1,1}{}^2+R_2R_3(\cos\alpha_1-\cos N_{1,2}\cos N_{1,3})\\ \qquad-R_1R_3(\cos\alpha_2-\cos N_{1,3}\cos N_{1,1})\\ \qquad-R_1R_2(\cos\alpha_3-\cos N_{1,1}\cos N_{1,2})\end{array}\right\}}{\sqrt{\begin{array}{l}\{(R_1\sin N_{1,1}-R_2\sin N_{1,2})^2-2R_1R_2(\cos\alpha_3-\cos(N_{1,1}-N_{1,2}))\}\\ \times\{(R_1\sin N_{1,1}-R_3\sin N_{1,3})^2-2R_1R_3(\cos\alpha_2-\cos(N_{1,1}-N_{1,3}))\}\end{array}}}$$

$$=\mp\frac{\left\{\begin{array}{l}R_1{}^2\sin N_{1,1}{}^2+R_2R_3(\cos\alpha_1-\cos N_{1,2}\cos N_{1,3})\\ \qquad-R_1R_3(\cos\alpha_2-\cos N_{1,3}\cos N_{1,1})\\ \qquad-R_1R_2(\cos\alpha_3-\cos N_{1,1}\cos N_{1,2})\end{array}\right\}}{\sqrt{\begin{array}{l}\{(R_1\sin N_{1,1}+R_2\sin N_{1,2})^2-2R_1R_2(\cos\alpha_3-\cos(N_{1,1}+N_{1,2}))\}\\ \times\{(R_1\sin N_{1,1}+R_3\sin N_{1,3})^2-2R_1R_3(\cos\alpha_2-\cos(N_{1,1}+N_{1,3}))\}\end{array}}}.$$

Für $A_1 = 90^0$, also $\cos A_1 = 0$, ist nach dem Vorhergehenden:

$$44)\quad 0 = R_1{}^2 \sin N_{1,1}{}^2 + R_2 R_3 (\cos\alpha_1 - \cos N_{1,2} \cos N_{1,3}) \\ - R_1 R_3 (\cos\alpha_2 - \cos N_{1,3} \cos N_{1,1}) \\ - R_1 R_2 (\cos\alpha_3 - \cos N_{1,1} \cos N_{1,2})$$

oder

$$45)\quad - R_2 R_3 \cos\alpha_1 + R_1 R_3 \cos\alpha_2 + R_1 R_2 \cos\alpha_3 \\ = R_1{}^2 \sin N_{1,1}{}^2 - R_2 R_3 \cos N_{1,2} \cos N_{1,3} \\ + R_1 R_3 \cos N_{1,1} \cos N_{1,3} \\ + R_1 R_2 \cos N_{1,1} \cos N_{1,2} \\ = R_1{}^2 - R_2 R_3 \cos N_{1,2} \cos N_{1,3} \\ - R_1 \cos N_{1,1} (R_1 \cos N_{1,1} - R_2 \cos N_{1,2} - R_3 \cos N_{1,3}).$$

Für $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 90^0$ wird diese Gleichung

$$46)\quad R_1{}^2 \sin N_{1,1}{}^2 = - R_1 R_2 \cos N_{1,1} \cos N_{1,2} \\ - R_1 R_3 \cos N_{1,1} \cos N_{1,3} \\ + R_2 R_3 \cos N_{1,2} \cos N_{1,3}$$

oder

$$47)\quad R_1{}^2 = R_2 R_3 \cos N_{1,2} \cos N_{1,3} \\ - R_1 \cos N_{1,1} (R_1 \cos N_{1,1} - R_2 \cos N_{1,2} - R_3 \cos N_{1,3}).$$

Besondere Relationen dieser Art würden sich aus dem Obigen noch mehrere ableiten lassen, wobei wir jedoch jetzt nicht länger verweilen wollen.

Entwickelt man

$$\sin A_1{}^2 = 1 - \cos A_1{}^2,$$

so erhält man als Zähler von $\sin A_1{}^2$ die Grösse

$$R_1{}^2 R_2{}^2 \{\sin N_{1,1}{}^2 \sin N_{1,2}{}^2 - (\cos\alpha_3 - \cos N_{1,1} \cos N_{1,2})^2\} \\ + R_2{}^2 R_3{}^2 \{\sin N_{1,2}{}^2 \sin N_{1,3}{}^2 - (\cos\alpha_1 - \cos N_{1,2} \cos N_{1,3})^2\} \\ + R_3{}^2 R_1{}^2 \{\sin N_{1,3}{}^2 \sin N_{1,1}{}^2 - (\cos\alpha_2 - \cos N_{1,3} \cos N_{1,1})^2\}$$

$$- 2 R_1 R_2 R_3 \left\{ \begin{array}{l} R_1 \left[\begin{array}{l} \sin N_{1,1}{}^2 (\cos\alpha_1 - \cos N_{1,2} \cos N_{1,3}) \\ -(\cos\alpha_2 - \cos N_{1,3} \cos N_{1,1})(\cos\alpha_3 - \cos N_{1,1} \cos N_{1,2}) \end{array} \right] \\ + R_2 \left[\begin{array}{l} \sin N_{1,2}{}^2 (\cos\alpha_2 - \cos N_{1,3} \cos N_{1,1}) \\ -(\cos\alpha_3 - \cos N_{1,1} \cos N_{1,2})(\cos\alpha_1 - \cos N_{1,2} \cos N_{1,3}) \end{array} \right] \\ + R_3 \left[\begin{array}{l} \sin N_{1,3}{}^2 (\cos\alpha_3 - \cos N_{1,1} \cos N_{1,2}) \\ -(\cos\alpha_1 - \cos N_{1,2} \cos N_{1,3})(\cos\alpha_2 - \cos N_{1,3} \cos N_{1,1}) \end{array} \right] \end{array} \right.$$

$$= -R_1^2R_2^2\{\cos\alpha_3-\cos(N_{1,1}+N_{1,2})\}\{\cos\alpha_3-\cos(N_{1,1}-N_{1,2})\}$$
$$-R_2^2R_3^2\{\cos\alpha_1-\cos(N_{1,2}+N_{1,3})\}\{\cos\alpha_1-\cos(N_{1,2}-N_{1,3})\}$$
$$-R_3^2R_1^2\{\cos\alpha_2-\cos(N_{1,3}+N_{1,1})\}\{\cos\alpha_2-\cos(N_{1,3}-N_{1,1})\}$$
$$R_2R_3\left\{\begin{array}{l} R_1\left[\begin{array}{l}\cos\alpha_1-\cos\alpha_2\cos\alpha_3-\cos N_{1,2}\cos N_{1,3}\\ -\cos N_{1,1}(\cos\alpha_1\cos N_{1,1}-\cos\alpha_2\cos N_{1,2}-\cos\alpha_3\cos N_{1,3})\end{array}\right]\\ +R_2\left[\begin{array}{l}\cos\alpha_2-\cos\alpha_3\cos\alpha_1-\cos N_{1,3}\cos N_{1,1}\\ -\cos N_{1,2}(\cos\alpha_2\cos N_{1,2}-\cos\alpha_3\cos N_{1,3}-\cos\alpha_1\cos N_{1,1})\end{array}\right]\\ +R_3\left[\begin{array}{l}\cos\alpha_3-\cos\alpha_1\cos\alpha_2-\cos N_{1,1}\cos N_{1,2}\\ -\cos N_{1,3}(\cos\alpha_3\cos N_{1,3}-\cos\alpha_1\cos N_{1,1}-\cos\alpha_2\cos N_{1,2})\end{array}\right]\end{array}\right\}$$

Der Nenner von $\sin A_1^2$ ist aber das Quadrat des obigen Nenners von $\cos A_1$, welchen wir hier nicht weiter entwickeln wollen.

Wir wollen nun annehmen, dass das im Obigen betrachtete allgemeine dreiaxige Ellipsoid in eine mit dem Halbmesser r beschriebene Kugel übergehe, und dass dann die Punkte $(x_1y_1z_1)$, $(x_2y_2z_2)$, $(x_3y_3z_3)$ auf der auf der positiven Seite der Ebene der xy liegenden Halbkugel ein sphärisches Dreieck bestimmen, in welchem keine Seite und kein Winkel 180° übersteigt. Dann sind offenbar $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ die drei Seiten dieses sphärischen Dreiecks, und es ist, weil jetzt offenbar der Punkt $(\xi_1\eta_1\zeta_1)$ mit dem Punkte $(x_1y_1z_1)$ zusammenfällt, augenscheinlich

$$N_{1,1}=0, N_{1,2}=\alpha_3, N_{1,3}=\alpha_2.$$

Legen wir nun, was im vorliegenden Falle offenbar verstattet ist, die Ebene der (xy) durch den Mittelpunkt der Kugel und durch die Punkte $(x_2y_2z_2)$ und $(x_3y_3z_3)$, so ist $z_2=z_3=0$, und nach dem Obigen ist folglich

$$H_1=\frac{z_1}{r^2}-\frac{z_1}{r^2}(1-\cos\alpha_3)=\frac{z_1\cos\alpha_3}{r^2},$$

$$H_1'=\frac{z_1}{r^2}-\frac{z_1}{r^2}(1-\cos\alpha_2)=\frac{z_1\cos\alpha_2}{r^2}.$$

Da unter der gemachten Voraussetzung z_1 positiv ist, so haben H_1 und H_1' gleiche oder ungleiche Vorzeichen, jenachdem $\cos\alpha_2$ und $\cos\alpha_3$ gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben, d. h. jenachdem die Winkel α_2, α_3 beide $\begin{matrix}\text{kleiner}\\ \text{grösser}\end{matrix}$ als 90° sind, oder von denselben der eine kleiner und der andere grösser als 90° ist. Nehmen wir nun die von dem Anfange der Coordinaten oder dem Mittelpunkte der Kugel aus mit den auf die dem Punkte $(x_1y_1z_1)$ entsprechende Normale in diesem Punkte im Obigen errichteten Senkrechten parallel gezogenen geraden Linien im ersten Falle auf einer und derselben, im zweiten Falle dagegen auf entgegengesetzten Seiten der Ebene der (xy) an, so ist der im Obigen durch A_1 bezeichnete Winkel, wie mittelst einer einfachen Betrachtung sogleich erhellen wird, jederzeit der von den Seiten α_2, α_3 des sphärischen Dreiecks eingeschlossene oder der Seite α_1 desselben gegenüberstehende Winkel. Im ersten Falle, wo H_1 und H_1' gleiche Vorzeichen haben, muss man aber unter dieser

Voraussetzung in der Gleichung 41) das obere Zeichen, im zweiten Falle, wo H_1 und H_1' ungleiche Vorzeichen haben, muss man dagegen unter dieser Voraussetzung in der Gleichung 43) das untere Zeichen nehmen, und erhält daher in beiden Fällen, also in völliger Allgemeinheit,

$$\cos A_1 = \frac{\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2 \cos\alpha_3}{\sqrt{\sin\alpha_2{}^2 \sin\alpha_3{}^2}}.$$

Weil nun aber keiner der beiden Winkel α_2 und α_3 grösser als 180° ist, also $\sin\alpha_2$ und $\sin\alpha_3$ beide positiv sind, so ist

$$\sqrt{\sin\alpha_2{}^2 \sin\alpha_3{}^2} = \sin\alpha_2 \sin\alpha_3,$$

und folglich

$$48) \quad \cos A_1 = \frac{\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2 \cos\alpha_3}{\sin\alpha_2 \sin\alpha_3},$$

welches die bekannte Grundformel der sphärischen Trigonometrie ist, aus welcher sich diese ganze Wissenschaft ableiten lässt.

Weitere Untersuchungen über diesen, wie es uns scheint, nicht uninteressanten Gegenstand, behalten wir einer anderen Gelegenheit vor.

XV.

Ueber eine geometrische Aufgabe.

Von dem

Herrn Professor Dr. Anger

in Danzig.

Leonhard Euler hat in den Novis Actis der Petersburger Akademie, Tom. IX. 1795. pag. 132 u. f., die Aufgabe behandelt:

„Die kleinste Ellipse zu finden, welche einem gegebenen Viereck umschrieben werden kann."

Er führt die Aufgabe auf die Auflösung einer Gleichung vom dritten Grade zurück, und macht dann eine Anwendung auf den besondern Fall, in welchem das Viereck ein Parallelogramm ist. Den noch einfacheren für das Rechteck hat er bereits in den Acten

derselben Akademie für das Jahr 1780, im 2ten Theile, gelöst, als ihm die Auflösung der allgemeinen Aufgabe noch nicht in gewünschter Einfachheit gelungen war. In einer auf die obige Abhandlung unmittelbar folgenden, Nova Acta 1791 pag. 146 u. f., betrachtet er dieselbe Aufgabe für das Dreieck.

Für das Parallelogramm und Dreieck ergeben sich einige merkwürdige Eigenschaften der gesuchten Ellipse. Der Zweck dieses Aufsatzes ist, zu zeigen, wie dieselben ganz einfach ohne Calcul, durch geometrische Betrachtungen erhalten werden, und auch noch andere auf demselben Wege sich leicht erhalten lassen, dass endlich die Projectionslehre die allgemeine Aufgabe auf eine andere vom Kreise zurückzuführen gestattet. Um jedoch alles hieher gehörige beisammen zu haben, werde ich die Euler'sche Auflösung voranschicken und darauf eine Betrachtung über die Wurzeln der cubischen Gleichung, auf welche sich das Problem reducirt, folgen lassen.

Es seien (Taf. IV. Fig. 1) A, B, C, D die vier Punkte, durch welche die Ellipse gehen soll. Euler verlängert die Seiten AB, CD, nimmt den Durchschnittspunkt O derselben zum Anfangspunkte schiefwinkliger Coordinaten, die Gerade ABO zur Abscissen-Axe und CDO zur Ordinaten-Axe an, so dass die y's der Seite CD parallel werden. Der Coordinaten-Winkel AOC wird durch ω bezeichnet und $OA=a, OB=b, OC=c, OD=d$ gesetzt, woraus sich ergiebt:

$$AB=b-a,$$
$$CD=d-c,$$
$$AC^2=a^2+c^2-2ac\operatorname{Cos}\omega,$$
$$AD^2=a^2+d^2-2ad\operatorname{Cos}\omega,$$
$$BC^2=b^2+c^2-2bc\operatorname{Cos}\omega,$$
$$BD^2=b^2+d^2-2bd\operatorname{Cos}\omega.$$

Da durch die Punkte A, B, C, D eine Ellipse gehen soll, so wird dieselbe durch die Gleichung

$$\alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2+2\delta x+2\varepsilon y+\zeta=0 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

ausgedrückt, in welcher zunächst die Grössen α und γ dasselbe Zeichen haben müssen, ausserdem aber das Product derselben $\alpha\gamma$ grösser sein muss als β^2, weil $\alpha\gamma$ gleich β^2 und $\alpha\gamma$ kleiner als β^2, resp. eine Parabel und Hyperbel geben würden. Die Bezeichnung der Coefficienten ist hier von der bei Euler verschieden, und auch im Folgenden so beibehalten, wodurch natürlich im Wesentlichen nichts geändert, vielleicht aber der Ueberblick etwas erleichtert wird.

Um nun diese Gleichung dem vorliegenden Falle entsprechend einzurichten, setze man $y=0$, wodurch dieselbe in

$$\alpha x^2+2\delta x+\zeta=0$$

übergeht, welche also die beiden Punkte A und B ergeben muss,

in welchen die Abscissen-Axe von der krummen Linie geschnitten wird; da für jenen $x=a$, für diesen $x=b$ ist, so müssen a und b die Wurzeln dieser Gleichung sein. Setzen wir demnach

$$\alpha x^2+2\delta x+\zeta=m(x-a)(x-b),$$

so wird

$$\alpha=m,\delta=-\frac{m(a+b)}{2},\zeta=mab.$$

Setzt man ferner $x=0$, so entsteht die Gleichung

$$\gamma y^2+2\varepsilon y+\zeta=0,$$

deren Wurzeln c und d sein müssen, weshalb man haben wird

$$\gamma y^2+2\varepsilon y+\zeta=n(y-c)(y-d),$$

wo

$$\gamma=n,\varepsilon=-\frac{n(c+d)}{2},\zeta=ncd.$$

Da aber auch $\zeta=mab$, so müssen die Grössen m und n so gewählt werden, dass

$$mab=ncd$$

werde, welches durch die Annahme

$$m=cd \text{ und } n=ab$$

geschieht.

Die Gleichung (1) wird demnach einer durch die vier gegebenen Punkte gehenden Ellipse entsprechen, wenn man setzt:

$$\alpha=cd,\gamma=ab,2\delta=-cd(a+b),2\varepsilon=-ab(c+d),\zeta=abcd,$$

so dass, ausser β, alle übrigen Coefficienten der Gleichung (1) bestimmt sind. Auf diese Weise bleibt also β unbestimmt, und es entstehen unzählig viele durch die vier gegebenen Punkte gehende Ellipsen, wenn β beliebig, doch so angenommen wird, dass $\beta^2<\alpha\gamma$ werde.

Wir wollen nun die Ordinate XY suchen (Taf. IV. Fig. 2). Es ist aber klar, dass im Allgemeinen jeder Abscisse zwei Ordinaten XY und XY' entsprechen müssen, welche die Wurzeln unserer allgemeinen Gleichung sind. Die Auflösung derselben ergiebt:

$$XY=-\frac{\beta x+\varepsilon-\sqrt{\{(\beta x+\varepsilon)^2-\alpha\gamma x^2-2\gamma\delta x-\gamma\zeta\}}}{\gamma},$$

$$XY'=-\frac{\beta x+\varepsilon+\sqrt{\{(\beta x+\varepsilon)^2-\alpha\gamma x^2-2\gamma\delta x-\gamma\zeta\}}}{\gamma}.$$

Da die Punkte X und Y in der durch die Punkte A,B,C,D

gehenden Ellipse liegen, so wird das Intervall YY' zwischen der Ellipse enthalten sein; man wird also haben, da $YY' = XY' - XY$ ist,

$$YY' = \frac{2\sqrt{\{(\beta x + \varepsilon)^2 - \alpha\gamma x^2 - 2\gamma\delta x - \gamma\zeta\}}}{\gamma}.$$

Wenn der Ordinate XYY' unendlich nahe eine andere xyy' gezogen wird, welche von derselben um das Intervall xv absteht, so wird, da $Xx = \partial x$ ist,

$$xv = \text{Sin}\,\omega \,.\, \partial x$$

sein, und es ergiebt sich das Element des Inhalts der Ellipse

$$xv \,.\, YY' = \frac{2\,\text{Sin}\,\omega \,.\, \partial x}{\gamma} \sqrt{\{(\beta x + \varepsilon)^2 - \alpha\gamma x^2 - 2\gamma\delta x - \gamma\zeta\}}$$

ein Differenzial, dessen Integral auf die ganze Ellipse ausgedehnt, den Inhalt derselben ergiebt. Für diesen findet Euler folgenden Ausdruck:

$$\pi \,.\, \text{Sin}\,\omega \left\{ \frac{\gamma\delta^2 + \alpha\varepsilon^2 - 2\beta\delta\varepsilon}{(\alpha\gamma - \beta^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\zeta}{\sqrt{(\alpha\gamma - \beta^2)}} \right\},$$

von welchem er sagt:

> „haec expressio ideo maxime est notatu digna, quod ejus ope omnium ellipsium areae totae satis expedite assignari possunt ex sola aequatione inter coordinatas, sive eae sint rectangulae sive obliquangulae".

Da nun auf diese Weise der Inhalt aller Ellipsen, welche durch vier gegebene Punkte gehen, ausgedrückt ist, so wird β so zu bestimmen sein, dass jener Ausdruck ein Minimum werde. Differenziirt man denselben in Beziehung auf β und setzt den Differenzialquotienten gleich Null, so ergiebt sich zur Bestimmung von β die folgende cubische Gleichung:

$$\zeta\beta^3 - 4\delta\varepsilon\beta^2 + (3\gamma\delta^2 + 3\alpha\varepsilon^2 - \alpha\gamma\zeta)\beta - 2\alpha\gamma\delta\varepsilon = 0 \;\ldots\ldots\; (2)$$

wodurch die Aufgabe gelöst ist. Euler bemerkt noch folgendes:

> „Ecce ergo tota solutio problematis propositi perducta est ad resolutionem aequationis cubicae, quae cum semper habeat radicem realem, certum est, quomodocunque quatuor puncta fuerint disposita, semper unam ellipsin assignari posse per quatuor illa puncta transeuntem, cujus area omnium sit minima, pro qua aequatio inter coordinatas x et y exhiberi poterit, si modo loco B*) radix ex illa aequatione cubica oriunda substituatur. Quodsi forte eveniat ut aequatio illa cubica tres admittat radices reales, totidem quoque solutiones locum habebunt, quarum autem indolem aliis perscrutandam relinquo".

---

*) Bei Euler hat B die Bedeutung unseres β.

Für den Fall, dass $a=0$ und $c=0$ wird, das Viereck sich also in ein Dreieck verwandelt, ist die obige cubische Gleichung nicht anwendbar, weil ausser β auch α und γ unbestimmt bleiben. Der Ausdruck für den Inhalt der Ellipse wird dann

$$\tfrac{1}{4}\pi \operatorname{Sin}\omega \left\{\frac{\alpha^2\gamma^2 b^2+\alpha\gamma^2 d^2-2\alpha\beta\gamma bd}{(\alpha\gamma-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}\right\}$$

wo α, β, γ so zu bestimmen sind, dass derselbe ein Minimum werde. Euler setzt hier $\frac{\beta^2}{\alpha\gamma}=\operatorname{Cos}\varphi^2$, wodurch sich der Ausdruck für den Inhalt

$$\tfrac{1}{4}\pi \operatorname{Sin}\omega \left\{\frac{\alpha b^2+\gamma d^2-2bd\operatorname{Cos}\varphi\sqrt{\alpha\gamma}}{\operatorname{Sin}\varphi^3\sqrt{\alpha\gamma}}\right\},$$

oder, wenn zur Wegschaffung der Irrationalität

$$\gamma=\alpha m^2$$

angenommen wird,

$$\tfrac{1}{4}\pi \operatorname{Sin}\omega \left\{\frac{b^2+d^2m^2-2bdm\operatorname{Cos}\varphi}{m\operatorname{Sin}\varphi^3}\right\}$$

ergiebt, und die Aufgabe reducirt sich darauf, die Grösse m und den Winkel φ so zu bestimmen, dass dieser Ausdruck ein Minimum werde. Sieht man den Winkel φ als bereits gefunden an, so kommt es nur darauf an, den Ausdruck

$$\frac{b^2+d^2m^2}{m}$$

zu einem Minimum zu machen. Die Differenziation giebt

$$m=\frac{b}{d},$$

also

$$\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{b^2}{d^2},$$

und man kann, da es sich nur um das Verhältniss von α zu β und γ handelt,

$$\alpha=d^2 \text{ und } \gamma=b^2$$

annehmen.

Substituirt man diese Werthe in den Ausdruck des Inhalts, so wird derselbe

$$\tfrac{1}{2}\pi bd\operatorname{Sin}\omega\left(\frac{1-\operatorname{Cos}\varphi}{\operatorname{Sin}\varphi^3}\right).$$

Setzt man hier Tang $\frac{1}{2}\varphi = t$, so wird

$$\frac{1-\operatorname{Cos}\varphi}{\operatorname{Sin}\varphi^3} = \frac{(1+t^2)^2}{4t},$$

und die Differenziation ergiebt

$$t = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

also $\varphi = 60^0$, woraus man für den Inhalt der dem Dreiecke umschriebenen kleinsten Ellipse

$$\frac{2\pi bd \operatorname{Sin}\omega}{3\sqrt{3}}$$

erhält. Der Inhalt dieser Ellipse verhält sich also immer zu dem Inhalte des gegebenen Dreiecks wie $4\pi : 3\sqrt{3}$.

Die Gleichung der gesuchten Ellipse ergiebt sich auf folgende Weise. Da angenommen wurde $\alpha = d^2$ und $\gamma = b^2$, so wird $\beta = \frac{1}{2}bd$ und durch Substitution dieses Werthes erhält man

$$d^2x^2 + bdxy + b^2y^2 - bd^2x - b^2dy = 0,$$

also

$$y = \frac{d(b-x) \pm d\sqrt{(b-x)(b+3x)}}{2b}.$$

Aus dieser Gleichung geht hervor, dass die Abscisse x niemals grösser werden kann als b, und die negativen Abscissen nicht die Grenze $\frac{1}{3}b$ überschreiten können.

Verlängert man (Taf. IV. Fig. 3) die Seite OB des gegebenen Dreiecks OBD über O hinaus, und macht $OE = \frac{1}{3}b$, so wird die Ordinate $EF = \frac{2}{3}d$, die beiden Werthe von y fallen in EF zusammen, und diese Linie berührt die Ellipse im Punkte F. Wenn nun die Gerade BF gezogen wird, welche die Seite OD in G schneidet, so ist, wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke OBG und EBF,

$$BE : EF = BO : OG,$$

also $OG = \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}OD$, so dass die Gerade BGF die Seite OD halbirt. Da ferner OE der dritte Theil von OB, so ist auch FG der dritte Theil von BG, wodurch der Punkt F sehr leicht bestimmt wird.

Für $x = b$ fallen, da die Grösse unter dem Wurzelzeichen verschwindet, die beiden Werthe von y in einen zusammen, welcher gleich Null sein wird, d. h., zieht man durch B eine unendlich kleine Gerade der OD parallel, so wird dieselbe die Ellipse in B berühren, und deshalb wird BF ein Durchmesser derselben sein, in dessen Mitte S der Mittelpunkt der Ellipse fallen muss. Da nun $FG = \frac{1}{3}BG$, so fällt der Mittelpunkt der Ellipse in S, wenn man $BS = \frac{2}{3}BG$ oder $GS = \frac{1}{3}BG$ macht; dieser Durchmesser wird alle der Seite OD parallele Ordinaten halbiren. Da

ferner die drei Punkte B, O, D unter sich verwechselt werden können, so müssen sich auch die Linien OK und DH, welche resp. die Seiten BD und BO halbiren, im Punkte S schneiden. Es ist aber bekannt, dass auf diese Weise der Schwerpunkt des Dreiecks bestimmt wird, so dass wir folgende merkwürdige Eigenschaft erhalten:

„Der Mittelpunkt der kleinsten Ellipse, welche einem gegebenen Dreiecke umschrieben werden kann, ist der Schwerpunkt desselben".

Wenn das Dreieck gleichseitig, also $b=d$ und $\omega=60^0$, so wird die Gleichung für die demselben umschriebene kleinste Ellipse

$$x^2+xy+y^2-bx-by=0$$

und der Inhalt dieser kleinsten Ellipse, welche sich in einen Kreis verwandelt,

$$\tfrac{1}{3}\pi b^2.$$

Wir betrachten jetzt den Fall, in welchem das Viereck ein Parallelogramm ist. Hier nehmen wir die Diagonalen zu Coordinaten-Axen, und den Durchschnittspunkt derselben zum Anfangspunkte, welche Wahl sich auch später als zweckmässiger für die allgemeine Aufgabe herausstellen wird.

Es sei (Taf. IV, Fig. 4) $ABCD$ das gegebene Parallelogramm. Man ziehe die Diagonalen AD, BC, welche sich in O schneiden. Bezeichnet man AO durch $+a$ und OC durch $+b$, so ist $OD=-a$ und $OB=-b$. Nehmen wir nun die allgemeine Gleichung der gesuchten Ellipse (1) wieder vor, so wird für $y=0$

$$\alpha x^2+2\delta x+\zeta=0,$$

welche Gleichung die beiden Wurzeln $x=+a$ und $x=-a$ haben muss. Setzt man also

$$\alpha x^2+2\delta x+\zeta=m(x-a)(x+a),$$

so ergiebt sich

$$\alpha=m, \delta=0, \zeta=-ma^2.$$

Für $x=0$ wird

$$\gamma y^2+2\varepsilon y+\zeta=0,$$

welche Gleichung die beiden Wurzeln $y=+b$ und $y=-b$ haben muss.

Setzt man

$$\gamma y^2+2\varepsilon y+\zeta=n(y-b)(y+b),$$

so wird

$$\gamma=n, \varepsilon=0, \zeta=-nb^2,$$

und da

$$ma^2=nb^2$$

sein muss, so wird man setzen können

$$m=b^2, n=a^2.$$

Die allgemeine Gleichung für eine dem Parallelogramme umschriebene Ellipse wird also folgende sein:

$$b\,x^2 + 2\beta xy + a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

Benutzen wir nun die obige Gleichung (2), so entsteht

$$a^2b^2\beta - \beta^3 = 0,$$

deren Wurzeln $0, +ab$ und $-ab$ sind, wo nur die erste in Betracht kommen kann, da die Bedingung

$$\beta^2 < \alpha\gamma$$

erfüllt werden muss. Bei dieser Gelegenheit bemerke ich aber, dass die Gleichung (2) in diesem Falle aufhört vom dritten Grade zu sein und sich in der That in eine vom ersten Grade verwandelt. Sie ist nämlich entstanden durch Differenziation des allgemeinen Ausdrucks für den Inhalt der Ellipse in Beziehung auf β, welche sich wegen $\delta = 0$ und $\varepsilon = 0$ auf

$$\pi \operatorname{Sin} \omega . \frac{a^2b^2}{\sqrt{(a^2b^2 - \beta^2)}}$$

reducirt. Die Differenziation giebt für den Differenzialquotienten dieser Function in Beziehung auf β

$$\pi \operatorname{Sin} \omega . \frac{a^2b^2\beta}{(a^2b^2 - \beta^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

also nur

$$\beta = 0.$$

Die beiden andern Wurzeln $+ab$ und $-ab$ scheiden also von selbst aus.

Zu ähnlichen Betrachtungen wird sich auch noch im Folgenden Gelegenheit bieten.

Die Gleichung für die gesuchte Ellipse ist demnach

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

und der Inhalt dieser Ellipse

$$\pi \operatorname{Sin} \omega . ab.$$

Der Inhalt der Ellipse verhält sich also zu dem Inhalte des Parallelogrammes wie $\pi : 2$.

Man sieht ferner, dass der Mittelpunkt dieser Ellipse in den Durchschnittspunkt O der beiden Diagonalen des Parallelogramms fällt, welche als conjugirte Durchmesser erscheinen, die sich unter dem Winkel ω schneiden. Daraus folgt, dass die Tangenten in den Punkten A und D dem Durchmesser BC, und die Tangenten in B und C dem Durchmesser AD parallel sein werden, woraus die Construction der Ellipse sich leicht ergiebt. Wenn der Winkel

ω ein Rechter ist, so verwandelt sich das Parallelogramm in einen Rhombus, dessen Diagonalen die Haupt-Axen unserer Ellipse sind. Für $a=b$ wird das Parallelogramm ein Rechteck, und man erhält, wenn f und g die halben Haupt-Axen der gesuchten Ellipse sind,

$$f=a\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\,\omega\sqrt{2},$$
$$g=a\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\,\omega\sqrt{2},$$

woraus die bekannte Eigenschaft

$$f^2+g^2=2\,a^2,$$
$$fg=a^2\,\mathrm{Sin}\,\omega$$

hervorgeht.

Wir kommen jetzt zu der Betrachtung der Wurzeln der von Euler aufgestellten Gleichung (2). Ich werde zeigen, dass diese cubische Gleichung, auf welche das Problem führt, im Allgemeinen immer drei mögliche und zwar positive Wurzeln hat, und dass diejenige, welche hier allein in Betracht kommt, stets die kleinste von allen ist, während die beiden andern Wurzeln sich auf Kegelschnitte, die nicht Ellipsen sind, beziehen.

Zu diesem Ende setze ich

$$\beta=\tfrac{1}{2}z\sqrt{bacd}$$

und transformire die Gleichung (2), welche durch Substitution der Werthe von α, γ, δ, ε, ζ folgende wird:

$$\beta^3-(a+b)(c+d)\beta^2$$
$$+\frac{3cd(a+b)^2+3ab(c+d)^2-4abcd}{4}\beta-\frac{abcd(a+b)(c+d)}{2}=0\ldots\ (3)$$

in nachstehende:

$$z^3-2pqz^2+\{3(p^2+q^2)-4\}z-4pq=0\ldots\ldots\ (4)$$

wo

$$p=\frac{a+b}{\sqrt{ab}},\ q=\frac{c+d}{\sqrt{cd}}.$$

Das allgemeine Criterium, dass die cubische Gleichung

$$z^3+Az^2+Bz+C=0$$

drei mögliche Wurzeln habe, ist bekanntlich:

$$B^2(A^2-4B)>27C^2+2AC(2A^2-9B),$$

welches sich für unsere Gleichung in

$$\{9(p^2+q^2)^2-24(p^2+q^2)+16\}\{p^2q^2-3(p^2+q^2)+4\}$$
$$>108p^2q^2+4p^2q^2\{8p^2q^2-27(p^2+q^2)+36\}$$

verwandelt. Da nun sowohl p als q grösser als 2 sind, so wird man haben

$$p^2=4+t,\ q^2=4+u,$$

wo $t=\frac{(a-b)^2}{ab}$ und $u=\frac{(c-d)^2}{cd}$ positive Grössen sind; die obige Bedingung wird demnach erfüllt, wenn der Ausdruck:

$$4(t^2+u^2)+9(t^3+u^3)+9tu(t+u)^2-4tu-tu^2-t^2u-32t^2u^2$$

positiv ist. Derselbe kann aber wie folgt geschrieben werden:

$$4(t-u)^2+4tu+8(t^3+u^3)+(t+u)(t-u)^2+9tu(t-u)^2+4t^2u^2,$$

woraus hervorgeht, dass diese Grösse in der That stets positiv ist, also die Gleichung (4), und daher auch die Gleichung (3) oder (2), immer drei mögliche Wurzeln hat. Da ferner der Coefficient von z in der Gleichung (4) offenbar positiv ist, so sind nach dem Descartes'schen Satze die Wurzeln dieser Gleichung zugleich alle positiv.

Die Bedingung $\beta^2<\alpha\gamma$ fordert, dass $z<2$ sei. Da in der Gleichung (4) der links stehende Theil für $z=0$ negativ, nämlich $-4pq$ und für $z=2$ positiv, nämlich $6(p-q^2)$ wird, so liegt eine Wurzel zwischen den Grenzen 0 und 2, und da das Glied $4pq$ immer grösser als 16 ist, so können zwischen diesen Grenzen nicht alle drei Wurzeln enthalten sein, sondern nur eine und zwar die kleinste von allen, wodurch die obige Behauptung, dass diejenige Wurzel, welche für die Aufgabe allein in Betracht kommt, die kleinste der drei Wurzeln ist, sich bestätigt.

Nicolaus Fuss hat in den Novis Actis der Petersburger Akademie Tom XI. 1798. eine Abhandlung *) veröffentlicht, in welcher er die von Euler gegebene cubische Gleichung in Beziehung auf ihre Wurzeln untersucht, und auf einem von dem hier eingeschlagenen sehr verschiedenen Wege ebenfalls findet, dass dieselbe immer drei reelle Wurzeln hat, von denen eine dem vorliegenden Probleme entspricht, die andern beiden aber sich auf Hyperbeln beziehen. Um das Erscheinen derselben zu erklären, betrachtet er die in Rede stehende Aufgabe als einen besondern Fall dieser allgemeinen:

„Unter allen durch vier gegebene Punkte gehenden krummen Linien der zweiten Ordnung diejenigen zu finden, bei welchen das Rechteck aus den Halbaxen ein Kleinstes wird",

wo jedoch die Parabel wegen ihrer unendlich grossen Axe ausgeschlossen ist.

---

*) „Dilucidationes super problemate geometrico de ellipsi minima per data quatuor puncta ducenda."

Anwendung der Projectionslehre auf die Aufgabe: „Die kleinste Ellipse zu finden, welche einem gegebenen Vierecke umschrieben werden kann.“

Aufgabe.

Zwei einander schneidende Sehnen eines Kreises sind mit ihren Segmenten gegeben, man sucht den Winkel, unter welchem diese Linien sich schneiden müssen, damit der Inhalt des durch ihre Endpunkte gehenden Kreises in Beziehung auf den Inhalt des Vierecks, welches durch Verbindung dieser Punkte entsteht, ein Kleinstes werde.

Auflösung.

Wir bezeichnen die Segmente der einen Sehne durch α und β, die der andern durch γ und δ, wo im Allgemeinen $\alpha > \beta$ und $\gamma > \delta$ sein mag, den gesuchten Winkel durch φ, den Inhalt des entsprechenden Kreises und Vierecks resp. durch K und J, dann ist

$$\alpha\beta = \gamma\delta$$

und

$$\frac{K}{J} = \frac{(\alpha-\beta)^2 + (\gamma-\delta)^2 - 2(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)\operatorname{Cos}\varphi + 4\alpha\beta\operatorname{Sin}\varphi^2}{2(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)\operatorname{Sin}\varphi^3},$$

welcher Ausdruck ein Kleinstes werden soll. Differenziirt man denselben in Beziehung auf φ und setzt den ersten Differenzialquotienten gleich Null, so ergiebt sich der gesuchte Winkel aus folgender Gleichung:

$$\text{(I)} \ldots\ \operatorname{Cosec}\varphi^2 \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Cos}\varphi^3 + \dfrac{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}{\alpha\beta}\operatorname{Cos}\varphi^2 \\ -\dfrac{3[(\alpha-\beta)^2+(\gamma-\delta)^2]+4\alpha\beta}{4\alpha\beta}\operatorname{Cos}\varphi + \dfrac{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}{2\alpha\beta} \end{array} \right\} = 0$$

oder wenn man den Factor $\operatorname{Cosec}\varphi^2$ weglässt, aus dieser:

$$\text{(II)} \ldots\ \operatorname{Cos}\varphi^3 + \frac{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}{\alpha\beta}\operatorname{Cos}\varphi^2$$
$$-\frac{3\{(\alpha-\beta)^2+(\gamma-\delta)^2\}+4\alpha\beta}{4\alpha\beta}\operatorname{Cos}\varphi + \frac{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}{2\alpha\beta} = 0.$$

Im Allgemeinen kann man zwar mit diesem Factor die Gleichung dividiren, allein in besondern Fällen wird man durch Berücksich-

tigung desselben diejenigen Wurzeln, welche nicht zum Probleme gehören, sogleich entfernen können.

Als specielle Fälle betrachten wir folgende:

Setzt man $\alpha = \gamma$ und $\beta = \delta$, in welchem Falle das Viereck ein **Trapez** wird, dessen nicht parallele Seiten einander gleich sind, so entsteht:

$$\text{Cosec}\,\varphi^4 \left\{ \text{Cos}\,\varphi^3 + \frac{(\alpha-\beta)^2}{\alpha\beta} \text{Cos}\,\varphi^2 - \frac{3(\alpha-\beta)^2 + 2\alpha\beta}{2\alpha\beta} \text{Cos}\,\varphi + \frac{(\alpha-\beta)^2}{2\alpha\beta} \right\}$$

$$= \text{Cosec}\,\varphi^4 \left\{ \text{Cos}\,\varphi^2 + \left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta} - 1 \right) \text{Cos}\,\varphi - \frac{(\alpha-\beta)^2}{2\alpha\beta} \right\} (1 - \text{Cos}\,\varphi) = 0,$$

also bleibt, da der Factor $1 - \text{Cos}\,\varphi$ sich gegen denselben Factor in $\text{Sin}\,\varphi^2$ weghebt, nur die **quadratische** Gleichung

$$\text{Cos}\,\varphi^2 + \left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta} - 1 \right) \text{Cos}\,\varphi - \frac{(\alpha-\beta)^2}{2\alpha\beta} = 0,$$

und man erhält

$$\text{Cos}\,\varphi = \frac{-((\alpha-\beta)^2 + \alpha\beta) \pm \sqrt{((\alpha-\beta)^2 + \alpha\beta)^2 + 2\alpha\beta(\alpha-\beta)^2}}{2\alpha\beta},$$

wo aber nur der erste Werth in Betracht kommen kann, da der andere $\text{Cos}\,\varphi > -1$, also für φ einen unmöglichen Werth giebt.

Setzt man ferner $\gamma = \delta$, d. h. ist das Viereck ein solches,* in welchem eine von beiden Diagonalen durch die andere halbirt wird, so hat man

$$\text{Cosec}\,\varphi^2 \left\{ \text{Cos}\,\varphi^3 - \frac{3(\alpha-\beta)^2 + 4\alpha\beta}{4\alpha\beta} \text{Cos}\,\varphi \right\} = 0,$$

also nur $\text{Cos}\,\varphi = 0$, d. h. $\varphi = 90^\circ$, da die andern beiden Wurzeln

$$\text{Cos}\,\varphi = \pm \sqrt{\left\{ 1 + \tfrac{3}{4} \frac{(\alpha-\beta)^2}{\alpha\beta} \right\}},$$

also für φ unmögliches geben.

Wenn $\alpha = \beta$ und $\gamma = \delta$, also, da $\alpha\beta \doteq \gamma\delta$ sein muss, das Viereck ein Rechteck wird, so findet sich

$$\text{Cosec}\,\varphi^2 . (\text{Cos}\,\varphi^3 - \text{Cos}\,\varphi) = 0,$$

also ist die einzige Wurzel

$$\text{Cos}\,\varphi = 0 \text{ und daher } \varphi = 90^\circ,$$

welches mit dem bekannten Satze, dass das **Quadrat** unter allen einem gegebenen Kreise eingeschriebenen Vierecken den grössten Inhalt hat, übereinstimmt.

Setzt man $\alpha = \gamma = 0$ und $\beta = \delta$, in welchem Falle sich das

Viereck in ein gleichschenkliges Dreieck verwandelt, so ergiebt sich nur die eine Wurzel

$$\text{Cos}\,\varphi = \tfrac{1}{2},$$

also $\varphi = 60^0$, welches den Satz enthält, dass unter allen einem Kreise eingeschriebenen Dreiecken das gleichseitige den grössten Inhalt hat.

Wir wollen jetzt die Gleichung (II) in Beziehung auf ihre Wurzeln untersuchen.

Setzt man $\text{Cos}\,\varphi = 0$, so ist der Werth des links vom Gleichheitszeichen stehenden Ausdrucks

$$\frac{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}{2\alpha\beta},$$

also positiv, wenn $\alpha-\beta$ und $\gamma-\delta$ gleiche Zeichen haben, negativ, wenn eine von beiden Grössen + und die andere — ist; setzt man $\text{Cos}\,\varphi = +1$, so wird derselbe

$$-\frac{\frac{3}{4}\{(\alpha-\beta)-(\gamma-\delta)\}^2}{\alpha\beta},$$

also negativ.

Für $\text{Cos}\,\varphi = -1$ geht jener Ausdruck in

$$+\frac{\frac{3}{4}\{(\alpha-\beta)+(\gamma-\delta)\}^2}{\alpha\beta}$$

über, ist also positiv, für $\text{Cos}\,\varphi = +\infty$ wird derselbe

$+\infty$, also positiv

und für $\text{Cos}\,\varphi = -\infty$ wird er

$-\infty$, also negativ,

weshalb eine Wurzel zwischen $+1$ und -1 liegt; eine zweite Wurzel liegt zwischen $+1$ und $+\infty$ und eine dritte zwischen -1 und $-\infty$. Diese beiden Wurzeln geben aber $\text{Cos}\,\varphi > \pm 1$, also für φ einen unmöglichen Winkel und gehören daher nicht zum Probleme, so dass nur die eine, zwischen $+1$ und -1 liegende, für unsere Aufgabe in Betracht kommt. Dieselbe ist + wenn $\alpha-\beta$ und $\gamma-\delta$ gleiche, und — wenn sie ungleiche Zeichen haben. In jenem Falle erscheint der spitze, in diesem sein stumpfer Nebenwinkel.

Wenn man in dem gegebenen Vierecke $ABCD$ (Taf. IV. Fig. 5.) die beiden einander innerhalb desselben in O schneidenden Diagonalen AC und BD zieht und die Abschnitte $AO = a$, $OC = b$, $BO = c$, $OD = d$ setzt, wo im Allgemeinen immer $a > b$, $c > d$ anzunehmen ist, so kann man alle Ellipsen, welche diesem Vierecke umschrieben sind, als Projectionen des Kreises K, und das gegebene Viereck als Projection des entsprechenden Kreisvierecks J betrachten, wobei zugleich a als Projection von α, b als Projection von β, c als Projection von γ und d als Projection von δ erscheint, so dass

$$\alpha=\alpha,$$

$$\beta=\alpha\frac{b}{a},$$

$$\gamma=\alpha\sqrt{\frac{bc}{ad}},$$

$$\delta=\alpha\sqrt{\frac{bd}{ac}}$$

esetzt werden darf.

Bezeichnet man den Inhalt des gegebenen Vierecks *ABCD* urch i und den Inhalt einer ihm umschriebenen Ellipse durch E, o ist offenbar

$$\frac{K}{J}=\frac{E}{i},$$

lso, wenn man den Winkel, unter welchem die Diagonalen des egebenen Vierecks einander schneiden, durch ω bezeichnet,

$$E=\frac{\pi}{4}\operatorname{Sin}\omega\left\{\frac{(a-b)^2\sqrt{\frac{cd}{ab}}+(c-d)^2\sqrt{\frac{ab}{cd}}-2(a-b)(c-d)\operatorname{Cos}\varphi+4\sqrt{abcd}\operatorname{Sin}\varphi^2}{\operatorname{Sin}\varphi^3}\right\},$$

wo φ den Winkel bedeutet, welchen die beiden Diagonalen desjenigen Kreisvierecks einschliessen, von welchem das gegebene Viereck die orthographische Projection ist.

Wenn nun

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

die Gleichung einer dem gegebenen Vierecke umschriebenen Ellipse ist, der Anfangspunkt der schiefwinkligen Coordinaten in dem Durchschnittspunkte O der Diagonalen liegt, und die Axen des schiefwinkligen Coordinatensystems in diese Diagonalen fallen, wobei zugleich die Richtungen a und c als positiv, die von b und d als negativ anzunehmen sind, so ergiebt sich

$$A=cd,\ C=ab,\ D=-\tfrac{1}{2}cd(a-b),\ E=-\tfrac{1}{2}ab(c-d),$$
$$F=-abcd,$$

während B unbestimmt bleibt.

Die Gleichung des Kreises K auf schiefwinklige Coordinaten bezogen, deren Anfangspunkt der Durchschnittspunkt der Diagonalen des Kreisvierecks ist, und deren Axen in diese Diagonalen fallen, ist

$$(\xi-g)^2+(\eta-h)^2+2(\xi-g)(\eta-h)\operatorname{Cos}\varphi=r^2,$$

wo g und h resp. die Abscisse und Ordinate des Mittelpunkts des Kreises, r seinen Radius bedeutet und φ seine obige Bedeutung behält. Bezeichnet man ferner die Winkel, welche die Diagonalen des Kreisvierecks mit der Projections-Ebene bilden, in welcher das gegebene Viereck liegt, durch ϑ und λ, und die Coordinaten des Mittelpunkts der dem gegebenen Vierecke umschriebenen Ellipse durch m und n, so ist

$$\xi=x\operatorname{Sec}\vartheta,\quad g=m\operatorname{Sec}\vartheta,$$
$$\eta=y\operatorname{Sec}\lambda,\quad h=n\operatorname{Sec}\lambda;$$

und man erhält:

$$A=\operatorname{Cos}\lambda^2,$$
$$B=+\operatorname{Cos}\vartheta\operatorname{Cos}\lambda\operatorname{Cos}\varphi,$$
$$C=\operatorname{Cos}\vartheta^2,$$
$$D=-(m\operatorname{Cos}\lambda-n\operatorname{Cos}\varphi\operatorname{Cos}\vartheta)\operatorname{Cos}\vartheta\operatorname{Cos}\lambda,$$
$$E=-(n\operatorname{Cos}\vartheta-m\operatorname{Cos}\varphi\operatorname{Cos}\lambda)\operatorname{Cos}\vartheta\operatorname{Cos}\lambda,$$
$$F=m^2\operatorname{Cos}\lambda^2+n^2\operatorname{Cos}\vartheta^2-2mn\operatorname{Cos}\vartheta\operatorname{Cos}\lambda\operatorname{Cos}\varphi-r^2\operatorname{Cos}\vartheta^2\operatorname{Cos}\lambda^2.$$

Demnach ist

$$B^2=abcd\operatorname{Cos}\varphi^2,$$

und man erhält

$$B=\operatorname{Cos}\varphi\sqrt{abcd}.$$

Der Werth von B, welcher der kleinsten dem gegebenen Vierecke umschriebenen Ellipse entspricht, ergiebt sich also aus der Gleichung (II); man erhält nämlich durch die Substitution folgende cubische Gleichung

$$\text{(III)} \; \ldots\ldots \; B^3+(a-b)(c-d)B^2$$
$$-\frac{3\{(a-b)^2cd+(c-d)^2ab\}+4abcd}{4}B+\frac{(a-b)(c-d)abcd}{2}=0.$$

Die Euler'sche cubische Gleichung (2) verwandelt sich, wenn man den Anfangspunkt, wie hier geschehen, in den Durchschnittspunkt der Diagonalen verlegt, also dort für α, γ etc. resp. die obigen Werthe für A, C etc. setzt, genau in diese Gleichung (III). Bei der Untersuchung specieller Fälle wird man auch hier den Factor $\operatorname{Cosec}\varphi^2$ nicht unberücksichtiget lassen, indem man statt Gleichung (III) unmittelbar anzuwenden, dieselbe zuvor durch den Factor

$$\frac{1}{(B+\sqrt{abcd})(B-\sqrt{abcd})}$$

multipliciren wird.

Setzt man $ad=bc$, wodurch das gegebene Viereck sich in ein Trapez verwandelt, so ergiebt sich

$$\operatorname{Cos}\varphi=\frac{-((a-b)^2+ab)\mp\sqrt{((a-b)^2+ab)^2+2ab(a-b)^2}}{2ab},$$

wo aber nur der erste Werth in Betracht kommt, da der andere für φ einen unmöglichen Werth giebt.

Wenn $c=d$ ist, d. h. ist das Viereck ein solches, in welchem eine von beiden Diagonalen durch die andere halbirt wird, so ergiebt sich

$$\operatorname{Cos}\varphi=0 \text{ und } \operatorname{Cos}\varphi=\pm\sqrt{\{1+\tfrac{3}{4}\frac{(a-b)^2}{ab}\}};$$

man hat also allein $B=0$, indem die anderen beiden Wurzeln ausscheiden, weil φ unmögliche Werthe erhält.

Die Gleichung der gesuchten Ellipse ist folgende:

$$c^2x^2+aby^2-c^2(a-b)x-abc^2=0,$$

oder, wenn man den Anfangspunkt der Coordinaten in die Mitte der ungleich getheilten Diagonale verlegt, wodurch

$$x \text{ in } x+\frac{a-b}{2}$$

übergeht,

$$c^2x^2+aby^2=c^2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

und man erhält folgenden Satz:

„**Wenn in dem gegebenen Vierecke eine von beiden Diagonalen durch die andere halbirt wird, so fällt der Mittelpunkt der kleinsten umschriebenen Ellipse in den Halbirungspunkt der ungleich getheilten Diagonale.**"

Hier sind $\frac{a+b}{2}$ und $\frac{c(a+b)}{2\sqrt{ab}}$ conjugirte Halbmesser der gesuchten Ellipse, die Construction derselben ist daher sehr leicht. Wenn ausser $c=d$ auch $a=b$, also das gegebene Viereck ein Parallelogramm ist, so ergiebt sich als Gleichung der gesuchten Ellipse:

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2,$$

übereinstimmend mit dem obigen Resultate.

Die Aufgabe: „die kleinste Ellipse zu finden, welche einem gegebenen Dreiecke umschriebenen werden kann" von welcher wir oben die Euler'sche Auflösung gegeben haben, ordnet sich auch jenem Falle sehr einfach unter. Ist nämlich (Taf. IV. Fig. 3.) BOD das gegebene Dreieck, halbirt man eine Seite OD in G, zieht BG und verlängert dieselbe bis $FG=\frac{1}{3}BG$ wird, so muss die gesuchte kleinste Ellipse durch den Punkt F gehen. Setzt man also $DG=GO=c$, $BG=a$ und $FG=\frac{1}{3}a$, so wird die obige Gleichung folgende:

$$9c^2x^2+3a^2y^2=4a^2c^2.$$

Hier sind $\frac{2}{3}a$ und $\frac{2c}{\sqrt{3}}$ conjugirte Halbmesser. Der Anfangspunkt der Coordinaten ist Mittelpunkt der Ellipse und fällt in den Schwerpunkt des gegebenen Dreiecks.

Die Gleichung (III) kann auf ähnliche Weise wie Gleichung (3) transformirt werden. Setzt man nämlich

$$p=\frac{a-b}{\sqrt{ab}} \text{ und } q=\frac{c-d}{\sqrt{cd}},$$

so ergiebt sich, wenn $B=\frac{1}{2}z\sqrt{abcd}$ gesetzt wird:

$$\text{(IV)} \quad \ldots \quad z^3+2pqz^2-\{3(p^2+q^2)+4\}z+4pq=0,$$

wo p und q stets positiv angenommen werden können. Diese Gleichung hat offenbar zwei positive und eine negative Wurzel; für unsere Aufgabe kommt nur die positive zwischen 0 und 2 liegende Wurzel in Betracht.

Will man den Factor $\operatorname{Cosec}\varphi^2$ gleich mit berücksichtigen, so nimmt diese Gleichung folgende Gestalt an:

$$\text{(V)} \quad \{z^3+2pqz^2-[3(p^2+q^2)+4]z+4pq\}.\frac{1}{(z-2)(z+2)}=0.$$

Ist das gegebene Viereck ein Trapez, so wird $p=q$ und diese Gleichung reducirt sich auf folgende quadratische:

$$z^2+2(p^2+1)z-2p^2=0.$$

Ist das gegebene Viereck ein Parallelogramm, so wird $p=q=0$, und die Gleichung verwandelt sich in

$$z=0,$$

übereinstimmend mit den obigen Resultaten.

Nachdem wir die Aufgabe: „die kleinste einem gegebenen Vierecke umschriebene Ellipse zu finden“, in ihrer allgemeinsten Form gelöst haben, stellen wir noch einige Sätze zusammen, welche sich ohne Calcul auf elementare Weise ableiten lassen, und zum Theil in jener Aufgabe enthalten sind. Wir schicken folgende leicht zu beweisende Sätze voran.

1) Bezeichnet i den Neigungswinkel einer geraden Linie a gegen die Projections-Ebene, und a' die orthographische Projection dieser Linie, so ist

$$a'=a\,\mathrm{Cos}\,i.$$

Zusatz. Jede gerade Linie, welche in irgend einem Verhältnisse getheilt ist, erscheint in der Projection in demselben Verhältnisse getheilt.

2) Jedes Dreieck ist zu betrachten als die Projection eines gleichseitigen Dreiecks, jedes Parallelogramm als die Projection eines Quadrats, jede Ellipse als die Projection eines Kreises.

3) Wenn der Flächen-Inhalt irgend einer ebenen Figur durch F, der ihrer Projection durch F' bezeichnet wird, so ist

$$F'=F.\mathrm{Cos}\,i,$$

wo i den Neigungswinkel der zu projicirenden Figur gegen die Projections-Ebene bedeutet.

Zusatz. Jede ebene Figur, welche in einem gewissen Verhältnisse getheilt ist, erscheint in der Projection in demselben Verhältnisse getheilt.

Aus der Lehre vom Grössten und Kleinsten sind folgende elementare leicht zu beweisende Sätze bekannt:

1) Unter allen nEcken, welche einem gegebenen Kreise eingeschrieben werden können, hat das reguläre den grössten Flächen-Inhalt.

Zusatz. Das gleichseitige Dreieck ist das grösste unter allen Dreiecken und das Quadrat das grösste unter allen Vierecken, welche einem gegebenen Kreise eingeschrieben werden können.

2) Unter allen nEcken, welche einem gegebenen Kreise umschrieben werden können, hat das reguläre den kleinsten Flächen-Inhalt.

Zusatz. Das gleichseitige Dreieck ist das kleinste unter allen Dreiecken und das Quadrat das kleinste unter allen Vierecken, welche einem gegebenen Kreise umschrieben werden können.

Diesen Sätzen fügen wir noch folgenden hinzu:

Lehrsatz.

Wenn eine von zwei Sehnen eines Kreises durch die andere halbirt wird, so ist der Inhalt des durch die Endpunkte derselben gehenden Kreises in Beziehung auf den Inhalt des Kreisvierecks, welches durch die Verbindung dieser Endpunkte entsteht, ein *Kleinstes*, wenn die beiden Sehnen auf einander senkrecht stehen, also der Mittelpunkt des Kreises in den Halbirungspunkt der ungleich getheilten Sehne fällt.

Beweis.

Es seien (Taf. IV. Fig. 6.) AB, CD die beiden Sehnen, welche sich in E schneiden, so dass $AE=EB$ ist. CD stehe auf AB senkrecht. Man halbire CD in F, so ist dieser Punkt der Mittelpunkt des durch die Punkte A, B, C, D gehenden Kreises; der Inhalt desselben ist in Beziehung auf das Viereck $ACBD$ ein Kleinstes. Denn zieht man durch E die Linie $C'D'$ beliebig, macht $C'E=CE$, $D'E=DE$, halbirt $C'D'$ in G und zieht GH senkrecht auf $C'D'$, so ist H der Mittelpunkt des durch die Punkte A, B, C', D' gehenden Kreises und $C'H$ ein Radius desselben. Da nun $C'H > C'G$ und $C'G = CF$, so ist $C'H > CF$, also der Inhalt des durch A, B, C', D' gehenden Kreises grösser als der Inhalt des durch A, B, C, D gehenden. Zugleich ist Viereck $AC'BD' <$ Viereck $ACBD$, demnach

$$\frac{\text{Kreis } AC'BD'}{\text{Viereck } AC'BD'} > \frac{\text{Kreis } ACBD}{\text{Viereck } ACBD},$$

w. z. b. w.

Aus der Verbindung dieser Sätze mit den obigen erhält man nun leicht die folgenden:

> „Wenn in einem Vierecke eine von beiden Diagonalen durch die andere halbirt wird, so fällt der Mittelpunkt der diesem Vierecke umschriebenen kleinsten Ellipse in den Halbirungspunkt der ungleich getheilten Diagonale, woraus sich eine leichte geometrische Construction dieser Ellipse ergiebt."

Zusatz 1. Der Mittelpunkt der einem Parallelogramme umschriebenen kleinsten Ellipse liegt im Durchschnittspunkte der beiden Diagonalen.

Zusatz 2. Der Mittelpunkt der einem Dreiecke umschriebenen kleinsten Ellipse liegt im Schwerpunkte desselben.

Wenn ein gleichseitiges Dreieck mit dem ihm umschriebenen und eingeschriebenen Kreise orthographisch projicirt wird, so entstehen in der Projection zwei concentrische ähnliche und ähnlich liegende Ellipsen, und zwar sind die Axen der kleineren die Hälften der ihnen entsprechenden Axen der grössern Ellipse; die Projection des gleichseitigen Dreiecks wird ein Dreieck, dessen Ecken in dem Umfange der grössern Ellipse liegen und dessen Seiten die kleinere berühren. Der gemeinschaftliche Mittelpunkt der Ellipsen ist der Schwerpunkt dieses Dreiecks.

„Demnach lässt sich in eine gegebene Ellipse eine Schaar grösster Dreiecke einschreiben; nämlich jeder Punkt der Ellipse ist Ecke eines solchen Dreiecks; dieselben haben gleichen Inhalt, ihre Schwerpunkte liegen im Mittelpunkte der Ellipse, und ihre Seiten hüllen eine zweite der gegebenen concentrische, ähnliche und ähnlich liegende Ellipse ein, deren Axen halb so gross sind, als die entsprechenden jener." *)

Wenn ein Quadrat mit dem ihm umschriebenen und eingeschriebenen Kreise orthographisch projicirt wird, so entstehen in der Projection zwei concentrische ähnliche und ähnlich liegende Ellipsen, und zwar verhalten sich die Axen der kleineren zu den entsprechenden der grösseren wie $1:\sqrt{2}$; die Projection des Quadrats ist ein Parallelogramm, dessen Ecken in dem Umfange der grössern Ellipse liegen und dessen Seiten die kleinere berühren. Der gemeinschaftliche Mittelpunkt der Ellipsen ist der Schwerpunkt dieses Parallelogramms.

„Demnach lässt sich in eine gegebene Ellipse eine Schaar grösster Parallelogramme einschreiben; nämlich jeder Punkt der Ellipse ist Ecke eines solchen Parallelogramms; dieselben haben gleichen Inhalt, ihre Schwerpunkte liegen im Mittelpunkte der Ellipse und ihre Seiten hüllen eine zweite der gegebenen concentrische ähnliche und ähnlich liegende Ellipse ein, deren Axen sich zu den entsprechenden der gegebenen wie $1:\sqrt{2}$ verhalten", und allgemein:

Wenn ein reguläres nEck mit dem ihm umschriebenen und eingeschriebenen Kreise orthographisch projicirt wird, so entstehen in der Projection zwei concentrische ähnliche und ähnlich liegende Ellipsen, und zwar verhalten sich die Axen der kleineren zu den entsprechenden der grössern wie $\text{Cos}\,\frac{2\pi}{n}:1$; die Projection des regulären nEcks ist ein nEck, dessen Ecken in dem Umfange der grössern Ellipse liegen und dessen Seiten die kleinere berühren. Der gemeinschaftliche Mittelpunkt beider Ellipsen ist der Schwerpunkt dieses nEcks.

---

*) Man vergleiche Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik. Bd. XXX. Heft 3. S. 275.

„Demnach lässt sich in eine gegebene Ellipse eine Schaar grösster nEcke einschreiben; nämlich jeder Punkt der Ellipse ist Ecke eines solchen nEcks; dieselben haben gleichen Inhalt, ihre Schwerpunkte liegen im Mittelpunkte der Ellipse und ihre Seiten hüllen eine zweite der gegebenen concentrische ähnliche und ähnlich liegende Ellipse ein, deren Axen sich zu den entsprechenden der gegebenen wie $\text{Cos}\frac{2\pi}{n}:1$ verhalten."

XVI.

Ueber einige Relationen zwischen den Inhalten zweier Tetraëder, die für eine Fläche zweiter Ordnung reciprok von einander sind.

Von dem
Herrn Doctor A. R. Luchterhandt
zu Berlin.

Nehmen wir zunächst als Fläche zweiter Ordnung eine Kugel, deren Gleichung

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

ist und bezeichnen die Coordinaten der Ecken des einen Tetraëders mit x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3; x_4, y_4, z_4; so hat man für die Polarebenen derselben die Gleichungen

$$x_1 x+y_1 y+z_1 z=r^2, \quad (1)$$
$$x_2 x+y_2 y+z_2 z=r^2, \quad (2)$$
$$x_3 x+y_3 y+z_3 z=r^2, \quad (3)$$
$$x_4 x+y_4 y+z_4 z=r^2. \quad (4)$$

Der Durchschnitt je dreier dieser Ebenen giebt eine Ecke des reciproken Tetraëders. Bezeichnen wir die Coordinaten dieser

Punkte mit ξ_1, η_1, ζ_1; ξ_2, η_2, ζ_2; ξ_3, η_3, ζ_3; ξ_4, η_4, ζ_4 und zwar in dem Sinne, dass ξ_1, η_1, ζ_1 dem Schneidepunkt der Ebenen (2), (3) und (4) entsprechen, und setzt man noch der Kürze wegen

$$y_1z_2 - y_2z_1 = a_{12}\ ,\ z_1x_2 - z_2x_1 = b_{12}\ ,\ x_1y_2 - x_2y_1 = c_{12};$$
$$y_1z_3 - y_3z_1 = a_{13}\ ,\ z_1x_3 - z_3x_1 = b_{13}\ ,\ x_1y_3 - x_3y_1 = c_{13};$$
$$y_1z_4 - y_4z_1 = a_{14}\ ,\ z_1x_4 - z_4x_1 = b_{14}\ ,\ x_1y_4 - x_4y_1 = c_{14};$$
$$y_2z_3 - y_3z_2 = a_{23}\ ,\ z_2x_3 - z_3x_2 = b_{23}\ ,\ x_2y_3 - x_3y_2 = c_{23};$$
$$y_2z_4 - y_4z_2 = a_{24}\ ,\ z_2x_4 - z_4x_2 = b_{24}\ ,\ x_2y_4 - x_4y_2 = c_{24};$$
$$y_3z_4 - y_4z_3 = a_{34}\ ,\ z_3x_4 - z_4x_3 = b_{34}\ ,\ x_3y_4 - x_4y_3 = c_{34};$$

und bemerkt, dass $a_{12} + a_{21} = 0$ u. s. w., so erhält man

$$\xi_1 = r^2\frac{a_{34}+a_{42}+a_{23}}{N(234)}\ ,\ \eta_1 = r^2\frac{b_{34}+b_{42}+b_{23}}{N(234)}\ ,\ \zeta_1 = r^2\frac{c_{34}+c_{42}+c_{23}}{N(234)};$$
$$\xi_2 = r^2\frac{a_{41}+a_{13}+a_{34}}{N(134)}\ ,\ \eta_2 = r^2\frac{b_{41}+b_{13}+b_{34}}{N(134)}\ ,\ \zeta_2 = r^2\frac{c_{41}+c_{13}+c_{34}}{N(134)};$$
$$\xi_3 = r^2\frac{a_{12}+a_{24}+a_{41}}{N(124)}\ ,\ \eta_3 = r^2\frac{b_{12}+b_{24}+b_{41}}{N(124)}\ ,\ \zeta_3 = r^2\frac{c_{12}+c_{24}+c_{41}}{N(124)};$$
$$\xi_4 = r^2\frac{a_{23}+a_{31}+a_{12}}{N(123)}\ ,\ \eta_4 = r^2\frac{b_{23}+b_{31}+b_{12}}{N(123)}\ ,\ \zeta_4 = r^2\frac{c_{23}+c_{31}+c_{12}}{N(123)};$$

wo

$$N(234) = x_2a_{34} + x_3a_{42} + x_4a_{23} = y_2b_{34} + y_3b_{42} + y_4b_{23}$$
$$= z_2c_{34} + z_3c_{42} + z_4c_{23};$$
$$N(134) = x_3a_{41} + x_4a_{13} + x_1a_{34} = y_3b_{41} + y_4b_{13} + y_1b_{34}$$
$$= z_3c_{41} + z_4c_{13} + z_1c_{34};$$
$$N(124) = x_4a_{12} + x_1a_{24} + x_2a_{41} = y_4b_{12} + y_1b_{24} + y_2b_{41}$$
$$= z_4c_{12} + z_1c_{24} + z_2c_{41};$$
$$N(123) = x_1a_{23} + x_2a_{31} + x_3a_{12} = y_1b_{23} + y_2b_{31} + y_3b_{12}$$
$$= z_1c_{23} + z_2c_{31} + z_3c_{12}.$$

Bezeichnet P den Inhalt des einen und Π den des anderen Tetraëders, so hat man, ohne Rücksicht auf das Zeichen,

$$6P = x_1(a_{23}+a_{34}+a_{42}) + x_2(a_{14}+a_{43}+a_{31}) + x_3(a_{12}+a_{24}+a_{41})$$
$$+ x_4(a_{13}+a_{32}+a_{21}),$$
$$6\Pi = \xi_1(\alpha_{23}+\alpha_{34}+\alpha_{42}) + \xi_2(\alpha_{24}+\alpha_{43}+\alpha_{31}) + \xi_3(\alpha_{12}+\alpha_{24}+\alpha_{41})$$
$$+ \xi_4(\alpha_{13}+\alpha_{32}+\alpha_{21}).$$

Nun ist aber

$$\alpha_{12} = \eta_1\zeta_2 - \eta_2\zeta_1 = \frac{6(x_4-x_3)r^4.P}{N(234)\,N(134)},$$

$$\alpha_{13}=\eta_1\zeta_3-\eta_3\zeta_1=\frac{6(x_4-x_2)r^4.P}{N(234)N(124)},$$

$$\alpha_{14}=\eta_1\zeta_4-\eta_4\zeta_1=\frac{6(x_3-x_2)r^4.P}{N(123)N(234)},$$

$$\alpha_{23}=\eta_2\zeta_3-\eta_3\zeta_2=\frac{6(x_4-x_1)r^4.P}{N(134)N(124)},$$

$$\alpha_{24}=\eta_2\zeta_4-\eta_4\zeta_2=\frac{6(x_3-x_1)r^4.P}{N(123)N(134)},$$

$$\alpha_{34}=\eta_3\zeta_4-\eta_4\zeta_3=\frac{6(x_2-x_1)r^4.P}{N(123)N(124)};$$

und deshalb

$$\alpha_{23}+\alpha_{34}+\alpha_{42}=-\frac{36r^4P^2.x_1}{N(123)N(124)N(134)},$$

$$\alpha_{14}+\alpha_{43}+\alpha_{31}=+\frac{36r^4P^2.x_2}{N(123)N(234)N(124)},$$

$$\alpha_{12}+\alpha_{24}+\alpha_{41}=-\frac{36r^4P^2.x_3}{N(123)N(134)N(234)},$$

$$\alpha_{13}+\alpha_{32}+\alpha_{21}=+\frac{36r^4P^2.x_4}{N(124)N(134)N(234)};$$

und hiernach:

$$6\Pi=36r^6.P^2.\frac{\left\{\begin{array}{c}x_1(\alpha_{23}+\alpha_{34}+\alpha_{42})+x_2(\alpha_{14}+\alpha_{43}+\alpha_{31})+x_3(\alpha_{12}+\alpha_{24}+\alpha_{41})\\ +x_4(\alpha_{13}+\alpha_{32}+\alpha_{21})\end{array}\right\}}{N(123)N(124)N(134)N(234)}$$

$$=\frac{216r^6P^3}{N(123)N(124)N(134)N(234)}.$$

Bedeuten nun noch P_1, P_2, P_3, P_4 die Rauminhalte der Tetraëder, welche durch den Mittelpunkt der Kugel und durch je drei der Eckpunkte des ersten Tetraëders gebildet werden, so dass also

$$N(123)=6P_4,\quad N(124)=6P_3,\quad N(134)=6P_2,\quad N(234)=6P_1$$

ist, so kann man obige Relation so darstellen:

$$\Pi=\frac{r^6P^3}{36P_1P_2P_3P_4}. \quad \ldots \ldots \quad \text{(A)}$$

Da nun

$$x_1=r^2\frac{\alpha_{34}+\alpha_{42}+\alpha_{23}}{x_2\alpha_{34}+x_3\alpha_{42}+x_4\alpha_{23}},\quad y_1=r^2\frac{\beta_{34}+\beta_{42}+\beta_{23}}{x_2\alpha_{34}+x_3\alpha_{42}+x_4\alpha_{23}},$$

$$z_1=r^2\frac{\gamma_{34}+\gamma_{42}+\gamma_{23}}{x_2\alpha_{34}+x_3\alpha_{42}+x_4\alpha_{23}};$$

u. s. w.

wo die Bedeutung von β und γ leicht erhellt, so hat man auch

$$P=\frac{r^6 \Pi^3}{36.\Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 \Pi_4} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (B)$$

wo $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$ eine ähnliche Bedeutung haben wie P_1 u. s. w.

Aus den beiden aufgestellten Ausdrücken ergeben sich nun leicht auch die folgenden:

$$\frac{P^4}{P_1 P_2 P_3 P_4}=\frac{\Pi^4}{\Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 \Pi_4}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (C)$$

$$r^{12} P^2.\Pi^2=6^4.P_1 P_2 P_3 P_4 \Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 \Pi_4, \quad \ldots\ldots \quad (D)$$

$$r^{24} P^8=6^8.(P_1 P_2 P_3 P_4)^3 \Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 \Pi_4, \quad \ldots\ldots \quad (E)$$

$$r^{24} \Pi^8=6^8.(\Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 \Pi_4)^3 P_1 P_2 P_3 P_4. \quad \ldots\ldots \quad (F)$$

Bezieht man die Tetraëder nicht auf die Kugel, sondern auf eine solche Fläche der zweiten Ordnung, die einen Mittelpunkt hat und deren Halbaxen a, b, c sind, so gehen die angegebenen Relationen in die nachstehenden über:

$$\Pi=\frac{a^2 b^2 c^2 P^3}{36 P_1 P_2 P_3 P_4}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (A')$$

$$P=\frac{a^2 b^2 c^2 \Pi^3}{36 \Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 \Pi_4}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (B')$$

$$\frac{P^4}{P_1 P_2 P_3 P_4}=\frac{\Pi^4}{\Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 \Pi_4}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (C')$$

$$a^4 b^4 c^4 P^2 \Pi^2=6^4.P_1 P_2 P_3 P_4 \Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 \Pi_4, \quad \ldots\ldots \quad (D')$$

$$a^8 b^8 c^8 P^8=6^8.(P_1 P_2 P_3 P_4)^3 \Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 \Pi_4, \quad \ldots\ldots \quad (E')$$

$$a^8 b^8 c^8 \Pi^8=6^8.(\Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 \Pi_4)^3 P_1 P_2 P_3 P_4, \quad \ldots\ldots \quad (F')$$

welche man aus jenen leicht erhält, wenn man für r^3 überall $a.b.c$ setzt.

Betrachtet man ein Paraboloid, dem die Gleichung

$$p_1 y^2+p z^2=p p_1 x$$

entspricht, und bezeichnet man mit D_1 u. s. w. den Inhalt desjenigen auf die Ebene der yz projicirten Dreieckes, welches von den Punkten x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3; x_4, y_4, z_4 gebildet wird, und legt man dem Zeichen Δ_1 eine ähnliche Bedeutung bei, so hat man:

$$\Pi=\frac{9 p p_1 P^3}{16 D_1 D_2 D_3 D_4}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (A'')$$

$$P=\frac{9 p p_1 \Pi^3}{16 \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (B'')$$

$$\frac{P^4}{D_1 D_2 D_3 D_4}=\frac{\Pi^4}{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (C'')$$

$$3^4 . p^2 p_1{}^2 P^2 \Pi^2 = 4^4 . D_1 D_2 D_3 D_4 \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4, \quad . \, . \, . \quad (D'')$$

$$3^8 . p^4 p_1{}^4 P^8 = 4^8 . (D_1 D_2 D_3 D_4)^3 \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4, \quad . \, . \, . \quad (E'')$$

$$3^8 . p^4 p_1{}^4 \Pi^8 = 4^8 . (\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4)^3 D_1 D_2 D_3 D_4 . \quad . \, . \, . \quad (F'')$$

XVII.

Ueber den geometrischen Ort des Scheitels eines Kegels zweiten Grades, welcher die Seiten eines windschiefen Sechsecks berührt.

Von

Herrn Fr. Seydewitz,

Oberlehrer am Gymnasium zu Heiligenstadt.

I.

Lehrsatz.

Ist im Raume irgend ein windschiefes Sechseck $\mathfrak{abcdef}$ gegeben, und man verbindet die Hauptgegenecken $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{f}$ desselben durch drei gerade Linien $\mathfrak{ad}$, $\mathfrak{be}$, $\mathfrak{cf}$; so ist jeder Punkt einer Geraden, welche diese drei letzteren durchschneidet, also jeder Punkt des durch dieselben bestimmten einfachen Hyperboloids der Scheitel eines Kegels zweiten Grades, welcher die sechs Seiten des Sechsecks berührt.

Beweis.

Es sei D ein Punkt einer Geraden m, welche die Geraden $\mathfrak{ad}$, $\mathfrak{be}$, $\mathfrak{cf}$ schneidet; so schneiden sich die drei Ebenen $D\mathfrak{ad}$, $D\mathfrak{be}$, $D\mathfrak{cf}$ in dieser Geraden m. Eine beliebige Ebene $\mathfrak{E}$ treffe die Geraden $D\mathfrak{a}$, $D\mathfrak{b}$, $D\mathfrak{c}$, $D\mathfrak{d}$, $D\mathfrak{e}$, $D\mathfrak{f}$ in den Punkten α, β, γ, δ, ε, φ und die m in u; so schneiden sich die Geraden $\alpha\delta$, $\beta\varepsilon$, $\gamma\varphi$ in dem Punkte u; nach dem Satze des Brianchon lässt sich also in das Sechseck $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\varphi$ ein Kegelschnitt beschreiben. Also muss der Kegel zweiten Grades, dessen Strahlen den Punkt D mit den Punkten dieses Kegelschnittes verbinden, die Ebenen

$\mathfrak{D}ab$, $\mathfrak{D}bc$, $\mathfrak{D}cd$, $\mathfrak{D}de$, $\mathfrak{D}ef$, $\mathfrak{D}fa$, und daher auch die Geraden ab, bc, cd, de, ef, fa berüh. w. z. b. w.

II.

Lehrsatz.

Ist im Raume irgend ein windschiefes Sechseck $abcdef$ gegeben, und man legt durch je zwei aneinanderstossende Seiten ab und bc, bc und cd, cd und de, de und ef, ef und fa desselben eine Ebene, im Ganzen sechs Ebenen β, γ, δ, ε, φ, α, welche sich paarweise, nämlich β und ε, γ und φ, δ und α in drei Geraden m, n, p schneiden; zieht man endlich eine beliebige Gerade q, welche m, n und p durchschneidet; so muss eine jede Ebene $\mathfrak{E}$, welche durch diese Gerade q geht, also eine jede Berührungsebene des durch die Geraden m, n, p bestimmten einfachen Hyperboloids, die Seiten ab, bc, cd, de, ef, fa in sechs Punkten a', b', c', d', e', f' schneiden, welche einem und demselben Kegelschnitte angehören.

Beweis.

Die Ebene $\mathfrak{E}$ schneide die Geraden m, n, p in den Punkten $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$; so liegen diese in einer Geraden q. Da nun $\mathfrak{E}$ die Ebenen β und ε in den Linien $a'b'$ und $d'e'$ schneidet, und m die Durchschnittslinie von β und ε ist, so ist $\mathfrak{m}$ der Durchschnittspunkt der Hauptgegenseiten $a'b'$, $d'e'$ des ebenen Sechsecks $a'b'c'd'e'f'$; und ebenso ist $\mathfrak{n}$ der Durchschnittspunkt von $b'c'$ und $e'f'$, $\mathfrak{p}$ der von $c'd'$ und $f'a'$, der beiden anderen Paar Hauptgegenseiten desselben. Nach dem Satze des Pascal liegen demnach die sechs Ecken des Sechsecks $a'b'c'd'e'f'$ auf dem Umfange eines Kegelschnitts, w. z. b. w.

XVIII.

Lineäre Konstruktion einer Curve doppelter Krümmung.

Von
Herrn Fr. Seydewitz,
Oberlehrer am Gymnasium zu Heiligenstadt.

Erklärung.

Unter einer Curve doppelter Krümmung der $n$ten Ordnung verstehe ich ein jedes räumliche System stetig auf-

einander folgender Punkte, welches mit einer beliebigen Ebene im Raume im Allgemeinen und höchstens n Punkte gemein hat; und unter einer Curve doppelter Krümmung der $n$ten Klasse ein jedes System stetig aufeinander folgender Ebenen, welches mit einem beliebigen Punkte im Raume im Allgemeinen und höchstens n Ebenen gemein hat. Tangente einer Curve doppelter Krümmung heisst eine jede Gerade, längs welcher sich bezüglich zwei stetig aufeinander folgende Punkte oder Ebenen der Curve, und Berührungsebene oder Berührungspunkt derselben eine jede Ebene oder Punkt, in welchen sich bezüglich wenigstens drei stetig aufeinander folgende Punkte oder Ebenen der Curve vereinigen.

I.

1. Es seien im Raume zwei beliebig (schief) liegende collineare räumliche Strahlbüschel D und D_1 gegeben (siehe S. 169. des 9ten Theils des Archivs); so werden die entsprechenden Strahlenpaare a, a_1; b, b_1; c, c_1; d, d_1.... derselben im Allgemeinen sich nicht im Raume begegnen; es entsteht aber die Frage: ob nicht gewisse und wieviele entsprechende Strahlenpaare einander begegnen, und was für einem Systeme von Punkten deren Durchschnittspunkte angehören?

Eine beliebige Ebene 𝔈 im Raume werde von den Strahlen a, b, c, d.... des D in den Punkten 𝔞, 𝔟, 𝔠, 𝔡...., und eine auf 𝔈 liegende Ebene $𝔈_1$ von den entsprechenden Strahlen a_1, b_1, c_1, d_1.... des D_1 in den Punkten $𝔞_1$, $𝔟_1$, $𝔠_1$, $𝔡_1$.... getroffen; so sind die Ebenen 𝔈, $𝔈_1$ in Ansehung der entsprechenden Punktenpaare 𝔞, 𝔟, 𝔠, 𝔡.... und $𝔞_1$, $𝔟_1$, $𝔠_1$, $𝔡_1$.... collinear, und folglich müssen sich (nach S. 25. des 8ten Theils des Archivs) in denselben im Allgemeinen und höchstens drei, jedenfalls ein Paar entsprechende Punkte vereinigen. Also gibt es in jeder Ebene des Raumes im Allgemeinen drei Punkte, in denen sich entsprechende Strahlen von D und D_1 begegnen. Zwei solche Punkte sind offenbar die Mittelpunkte D, D_1 der Strahlbüschel selber, indem ihr gemeinschaftlicher Strahl DD_1, nämlich e, von dem entsprechenden Strahle e_1 im Punkte D_1, und dieselbe Gerade, nämlich f_1, von dem entsprechenden Strahle f in D geschnitten wird.

Durch die Gerade DD_1 gehe eine beliebige Ebene, welche α oder α_1' heisse, jenachdem sie zu D oder zu D_1 gerechnet wird. Die der α entsprechende Ebene α_1 schneidet die α_1' in einem Strahle a_1, welchem, als zu α_1 gehörig, ein in α liegender Strahl a entsprechen muss. Also schneiden sich die Strahlen a, a_1 in einem Punkte 𝔞, welcher auch einer der fraglichen Punkte ist. Denkt man sich nun um DD_1, als Achse, einen Ebenenbüschel 𝔄 von stetig aufeinander folgenden Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$...., so erhält man eine stetige Reihe von Punkten 𝔞, 𝔟, 𝔠, 𝔡...., in deren jedem zwei entsprechende Strahlen a, a_1; b, b_1; c, c_1; d, d_1.... von D, D_1 sich schneiden. Diese Punkte bilden also eine Curve, und, weil sie in einer beliebigen Ebene des Raumes im Allgemeinen

und höchstens drei zu drei liegen, eine Curve doppelter Krümmung der dritten Ordnung.

Der Punkt D_1 heisse e, als Durchschnitt der Strahlen e, e_1; ein Punkt m der Curve, Durchschnitt von m, m_1, nähere sich dem e ins Unendliche; so wird die Sekante em oder m_1 allmählig in die Tangente für e übergehen, und gleichzeitig m mit e, m_1 mit e_1 zusammenfallen. Also ist der dem gemeinschaftlichen Strahle e beider Strahlbüschel entsprechende Strahl e_1 Tangente der Curve im Punkte D_1.

Es sei ε diejenige Ebene des Ebenenbüschels $\mathfrak{A}$, welche den Strahl e mit seinem entsprechenden e_1 verbindet; und es sei ε_1 die der ε entsprechende Ebene in D_1. Da jede durch e_1 gehende Ebene bereits die beiden längs e_1 vereinigten Punkte der Curve enthält, so muss jede noch einen dritten Punkt derselben enthalten. Es sei $\mathfrak{x}$ dieser dritte, der Ebene ε_1 zugehörige Punkt; so liegt derselbe entweder auf der Geraden e_1, oder irgend wo ausserhalb e_1 auf ε_1, oder fällt mit e zusammen. Im ersten Falle aber würde einem von e verschiedenem Strahle x ein mit e_1 identischer Strahl x_1 entsprechen, was unmöglich ist; im zweiten würde dem in ε_1 liegenden Strahle x_1 ein nicht in ε liegender Strahl x entsprechen, was gleichfalls unmöglich; also fallen auf ε_1 drei Punkte in e zusammen, und es ist ε_1 die Berührungsebene in D_1.

Lehrsatz 1.

Sind im Raume zwei collineare räumliche Strahlbüschel in beliebiger schiefer Lage gegeben, so gibt es in denselben unzählige Paare entsprechender Strahlen, welche einander begegnen, und zwar bilden die Durchschnittspunkte aller dieser Strahlenpaare nebst den Mittelpunkten der beiden Strahlbüschel eine Curve doppelter Krümmung der dritten Ordnung, und diese wird in jenen Mittelpunkten von denjenigen Strahlen, deren entsprechende sich vereinigen, und von denjenigen Ebenen berührt, deren entsprechende den gemeinschaftlichen Strahl mit den betreffenden Tangenten verbinden.

Dem Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$ von D entspricht in D_1 ein Ebenenbüschel $\mathfrak{A}_1$, dessen Achse e_1, und der mit ersterem in Ansehung der entsprechenden Ebenenpaare α, β, γ, δ.... und α_1, β_1, γ_1, δ_1.... projektivisch ist; also bilden die Durchschnittslinien a_1, b_1, c_1, d_1.... der entsprechenden Ebenenpaare Linien, welche, wie oben gezeigt, den Punkt D_1 mit sämmtlichen Punkten der Curve verbinden, einen Kegel des zweiten Grades K_1, welcher auch die Strahlen e_1 und e enthält und längs den Strahlen e_1 und e bezüglich von denjenigen Ebenen ε_1 und ε' berührt wird, denen in D und D_1 die Ebene ee_1 (ε und ε_1') entspricht. Aus demselben Grunde bilden auch die den vorigen entsprechenden und nach denselben Punkten der Curve gehenden Strahlen a, b, c, d.... einen Kegel zweiten Grades K, welcher längs f und f_1 bezüglich von zwei Ebenen φ' und φ_1 berührt wird, denen in D_1 und D die Ebene ff_1 (φ_1' und φ) entspricht. Diese beiden Kegel haben also einen

Strahl DD_1 gemein. Der Ebene ff_1 oder $fe(\varphi)$ entspricht in D_1 die Ebene f_1e_1 oder $ee_1(\varepsilon_1')$; also fällt die Ebene φ_1, welche K längs f_1 berührt, mit der Ebene ε_1' oder ee_1; und ebenso die ε', welche K_1 längs e berührt, mit der Ebene φ oder ff_1 zusammen. Die Tangenten e_1, f der Curve sind also die Durchschnittslinien der entsprechenden Ebenen ε_1 und ε, φ' und φ_1', welche die beiden Kegel K_1 und K, K und K_1, berühren.

Das nämliche gilt nun aber auch von allen übrigen Tangenten der Curve. Denn sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{m}$ irgend zwei Punkte der letzteren, und man denkt sich den $\mathfrak{m}$ ins Unendliche dem $\mathfrak{a}$ genähert, so geht die Sekante $\mathfrak{am}$ allmählig in die Tangente für $\mathfrak{a}$, und gleichzeitig die die Strahlen a und m, a_1 und m_1 verbindenden entsprechenden Ebenen in die Berührungsebenen von K und K_1 längs a und a_1 über. In der That: legt man durch die Durchschnittslinie dieser zwei Berührungsebenen irgend eine Ebene, so schneidet letztere die beiden Kegel in zwei Kegelschnitten, welche beide von jener Linie in $\mathfrak{a}$ berührt werden und einen auf DD_1 liegenden, zur Curve nicht gehörigen Punkt gemein haben. Da nun ein Kegelschnitt durch vier seiner Punkte und die Tangente in dem einen auf einzige Weise bestimmt ist, so können jene beiden keine zwei neuen Punkte, müssen aber einen Punkt noch nothwendig gemeinschaftlich besitzen, und dieser Punkt gehört auch unserer Curve an. Die Ebene hat also ausser $\mathfrak{a}$ noch einen Punkt mit der Curve gemein und muss daher auch noch einen dritten besitzen; dieser letztere würde aber ein neuer Durchschnittspunkt jener Kegelschnitte sein, was unmöglich ist; also muss derselbe sich mit dem Punkte $\mathfrak{a}$ vereinigen.

Und da endlich eine solche Vereinigung auf jeder Ebene, welche durch jene Linie geht, stattfindet, so muss diese eine Tangente der Curve sein.

Auf ähnliche Weise, nämlich mittels zweier Kegelschnitte, zeigt man, dass die Curve in jedem ihrer Punkte nur eine einzige Tangente besitzt.

Lehrsatz 2.

Die Curve, welche die Durchschnittspunkte entsprechender Strahlenpaare zweier schiefliegenden collinearen räumlichen Strahlbüschel enthält, gehört den Oberflächen zweier Kegel des zweiten Grades an, welche einen Strahl gemein haben, und deren Scheitel die Mittelpunkte jener Strahlbüschel sind. Sämmtliche Tangenten der Curve sind die Durchschnittslinien der nach einerlei Punkte derselben gehenden Berührungsebenen beider Kegel; insbesondere sind die Tangenten in den Mittelpunkten der Strahlbüschel diejenigen Strahlen der Kegel, in welchen ein jeder von der den anderen im gemeinschaftlichen Strahle berührenden Ebene geschnitten wird, und die Berührungsebenen der Curve in diesen Mittelpunkten sind die, die beiden Kegel längs jenen Strahlen berührenden Ebenen.

Die in Rede stehende Curve — man mag nun ihre Erzeugung durch räumliche Strahlbüschel oder durch zwei Kegel im Auge haben — hat grosse Aehnlichkeit mit derjenigen ebenen Curve, welche durch zwei projektivische ebene Strahlbüschel und zugleich auch durch den Schnitt eines Kegels mit einer Ebene erzeugt wird. Man kann sie daher, um sie einerseits von den ebenen Schnitten des Kegels dritten Grades, andererseits von der Durchschnittslinie zweier beliebiger Kegel des zweiten, welche eine Curve doppelter Krümmung der vierten Ordnung ist und durch räumliche Strahlbüschel von höherer Verwandtschaft erzeugt wird, zu unterscheiden, den räumlichen Kegelschnitt der dritten Ordnung heissen.

Dass der letzte Satz auch umgekehrt gelte, hiervon wird man sich mittels des Ebenenbüschels $\mathfrak{A}$ leicht überzeugen können.

2. Es seien jetzt $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ irgend zwei entsprechende und in einem Punkte D_2 sich treffende Strahlen von D, D_1; so bilden die denselben angehörigen entsprechenden Ebenenpaare der räumlichen Strahlbüschel zwei Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, welche in Ansehung dieser Ebenenpaare α, β, γ, δ.... und α_1, β_1, γ_1, δ_1.... projektivisch sind. Also bilden die Durchschnittslinien von α, α_1; β, β_1; γ, γ_1; δ, δ_1 einen Kegel zweiten Grades K_2, welcher auch die Strahlen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ enthält und z. B. längs $\mathfrak{A}$ von derjenigen Ebene berührt wird, welche, der Ebene $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ von D_1 entsprechend, den Strahl $\mathfrak{A}$ mit der Tangente f verbindet. Bedenkt man nun noch, dass man die Ebenen α, α_1; β, β_1.... erhält, wenn man die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$.... der Curve mit den Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ verbindet, und dass die Curve in jedem ihrer Punkte nur eine einzige Tangente hat, so gelangt man zu folgendem merkwürdigen Satze:

Lehrsatz 3.

Ein jeder Punkt eines räumlichen Kegelschnittes dritter Ordnung ist der Scheitel eines Kegels zweiten Grades, dessen Strahlen nach den übrigen Punkten, und dessen Berührungsebenen nach den Tangenten der Curve gehen.

Die Punkte D, D_1 sind also keine eigenthümlichen Punkte der Curve; vielmehr wird der Punkt D_2 und der Kegel K_2 die nämlichen Eigenschaften haben müssen, als D und K oder D_1 und K_1; unter anderen folgende:

Lehrsatz 4.

Je zwei Punkte eines räumlichen Kegelschnittes dritter Ordnung sind die Mittelpunkte zweier collinearen räumlichen Strahlbüschel, und zwar sind die nach einerlei Punkten und Tangenten des ersteren gehenden Strahlen- und Ebenenpaare entsprechende Elemente der letzteren.

Lehrsatz 5.

Die Berührungsebene in einem beliebigen Punkte eines räumlichen Kegelschnittes dritter Ordnung berührt den durch jenen Punkt, als Scheitel, und die Curve selbst erzeugten Kegel längs der jenem Punkte zugehörigen Tangente der Curve.

Aufgabe.

Durch sechs im Raume beliebig gegebene Punkte einen räumlichen Kegelschnitt dritter Ordnung zu legen, nämlich: α) auf jeder Ebene, welche durch zwei der gegebenen Punkte geht, den der Curve angehörigen dritten Punkt; β) die Tangenten und γ) die Berührungsebenen in diesen Punkten; δ) die Punkte, welche eine im Raume beliebig gegebene Ebene mit der Curve gemein hat, und insbesondere ε) die unendlich entfernten Punkte, die Asymptotenlinien und Asymptotenebenen der Curve zu finden.

Auflösung.

Verbindet man irgend zwei der gegebenen Punkte, z. B. D, D_1, mit den vier übrigen 𝔞, 𝔟, 𝔠, 𝔡 durch gerade Linien a, b, c, d und a_1, b_1, c_1, d_1, so sind hierdurch zwei collin. räumliche Strahlbüschel D, D_1 bestimmt, in denen diese vier Linienpaare einander entsprechen, und diese Strahlbüschel erzeugen nach Lehrs. 2. einen räumlichen Kegelschnitt dritter Ordnung, welcher durch jene sechs Punkte geht. Gäbe es nun einen zweiten solchen Kegelschnitt, welcher durch dieselben sechs Punkte ginge, so würden nicht nur alle Geraden, welche den Punkt D mit den Punkten des ersteren verbinden, einen Kegel zweiten Grades K, sondern auch alle Strahlen, welche D mit den Punkten des zweiten verbinden, einen Kegel zweiten Grades K' kraft Lehrs. 3. erzeugen. Diese beiden Kegel aber würden fünf Strahlen a, b, c, d und DD_1 gemein haben; also würden sie zusammenfallen müssen, d. h. der zweite räumliche Kegelschnitt würde auch der Oberfläche von K angehören. Ebenso zeigt man aber auch, dass derselbe der Oberfläche des Kegels K_1 angehört, welcher um D_1 als Scheitel durch den ersten räumlichen Kegelschnitt erzeugt wird. Also fallen beide räumlichen Kegelschnitte in allen ihren Punkten zusammen.

α) Es sei v eine beliebige, durch D und D_1 gehende Ebene, deren dritter Durchschnitt 𝔫 mit der Curve gesucht wird. Denkt man sich unter n und n_1 die Strahlen, welche von D und D_1 nach 𝔫 gehen, und den Strahl DD_1, jenachdem er dem Kegel K oder K_1 angehört, mit e oder f_1 bezeichnet, so bilden einerseits die Strahlen a, b, c, d, e, n ein dem Kegel K, andererseits die Strahlen a_1, b_1, c_1, d_1, f_1, n_1 ein dem Kegel K_1 eingeschriebenes einfaches 6-Flach im Strahlbüschel *). Kraft des sogenann-

*) Siehe Steiner's Systemat. Entwickelung d. Abh. u. s. w. Thl. I. S. 236.

ten mystischen Sechsecks liegen die drei Geraden, in denen sich die drei Paar Hauptgegenflächen eines solchen 6-Flachs schneiden, in einer und derselben Ebene. Legt man also durch a und b, b und c, c und d, d und e vier Ebenen ab, bc, cd, de, so erhält man als Durchschnittslinien von ab und de, bc und v zwei Gerade p und q, und legt man durch letztere eine Ebene pqr, so schneidet diese die Ebene cd in einer Geraden r, und verbindet man r mit a durch eine neue Ebene an, so schneidet diese die v in dem Strahle n, welcher durch den gesuchten Punkt $\mathfrak{n}$ geht. Auf gleiche Weise findet man auch den Strahl n_1 und somit den Punkt $\mathfrak{n}$.

Am Einfachsten wird es sein, statt im Raume, in einer der Ebenen (Taf. IV. Fig. 7.) zu operiren, welche drei der Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, z. B. $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, verbinden. Nämlich: hat man die Geraden DD_1, $D\mathfrak{a}$ und $D_1\mathfrak{a}$ gezogen, welche diese Ebene in den Punkten $(\mathfrak{e}\mathfrak{f}_1)$, $\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{a}_1'$ schneiden, und ist $(n'n_1')$ der Durchschnitt derselben Ebene mit v, so ziehe man die Geraden $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}\mathfrak{e}$; den Durchschnitt $\mathfrak{q}$ von n' und $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ verbinde man mit dem Durchschnitte $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{d}\mathfrak{e}$ durch eine Gerade, und den Punkt $\mathfrak{r}$, wo letztere die $\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ trifft, mit dem Punkte $\mathfrak{a}'$ durch eine andere Gerade; so trifft letztere die n' in einem Punkte $\mathfrak{n}'$. Sodann ziehe man die Gerade $\mathfrak{a}_1'\mathfrak{b}_1$ $(\mathfrak{a}_1'\mathfrak{b})$, welche die $\mathfrak{d}_1\mathfrak{f}_1$ $(\mathfrak{d}\mathfrak{e})$ in $\mathfrak{p}_1$ schneidet, verbinde $\mathfrak{p}_1$ mit $\mathfrak{q}_1$ ($\mathfrak{q}$ durch eine Gerade und den Punkt $\mathfrak{r}_1$, wo letztere die $\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1$ $(\mathfrak{c}\mathfrak{d})$ trifft, mit $\mathfrak{a}_1'$ durch eine neue Gerade; so schneidet letztere die n_1' (oder n') in einem Punkte $\mathfrak{n}_1'$. Endlich verbinde man im Raume den Punkt D mit $\mathfrak{n}'$, den Punkt D_1 mit $\mathfrak{n}_1'$ durch zwei Gerade n und n_1; so schneiden sich diese in dem gesuchten Punkte $\mathfrak{n}$ der Curve.

β) Um die Tangente der Curve im Punkte $\mathfrak{n}$ zu finden, konstruire man die beiden Ebenen, welche den Kegel K längs n, K_1 längs n_1 berühren; so ist sie deren Durchschnittslinie. Bedenkt man nämlich, dass bei einem, einem Kegelschnitte eingeschriebenen Fünfeck die Tangente in der einen Ecke die Hauptgegenseite dieser Ecke in einem Punkte trifft, welcher mit den Durchschnittspunkten zweier anderer Seitenpaare in gerader Linie liegt, und überträgt man diese Eigenschaft auf das dem Kegel K eingeschriebene Fünf-Flach, dessen Kanten der Reihe nach n, a, b, c, d sein mögen, so findet man die erstere von jenen beiden Berührungsebenen, wenn man noch die Ebene nd legt, welche die ab in der Linie s schneidet, diese letztere mit dem bereits gefundenen Durchschnitte r von cd und an durch eine Ebene verbindet, und durch die Gerade t, wo letztere die bc schneidet, und durch n eine neue Ebene legt; diese nämlich berührt K längs n. Die andere Berührungsebene ergibt sich auf ähnliche Weise.

In der Ebene der Punkte $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ ist zu dem gegenwärtigen Zwecke nur noch Folgendes hinzuzufügen. Man ziehe die Gerade $\mathfrak{d}\mathfrak{n}'$, welche die $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{s}$ schneidet, sofort die Gerade $\mathfrak{s}\mathfrak{r}$, welche die $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ in $\mathfrak{t}$ schneidet, und verbinde $\mathfrak{t}$ mit $\mathfrak{n}'$ durch eine Gerade. Wiederum ziehe man $\mathfrak{d}_1\mathfrak{n}_1'$, welche die $\mathfrak{a}_1'\mathfrak{b}_1$ in $\mathfrak{s}_1$ schneidet, sofort $\mathfrak{s}_1\mathfrak{r}_1$, welche die $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ in $\mathfrak{t}_1$ schneidet, und verbinde $\mathfrak{t}_1$ mit $\mathfrak{n}_1'$ durch eine Gerade. Endlich verbinde man den Durchschnittspunkt der Geraden $\mathfrak{t}\mathfrak{n}'$ und $\mathfrak{t}_1\mathfrak{n}_1'$ mit dem Punkte $\mathfrak{n}$ durch eine Gerade; so ist letztere die gesuchte Tangente.

γ) Die Tangente in 𝔫 und irgend vier Gerade, welche diesen Punkt mit vier der gegebenen sechs Punkte verbinden, bestimmen einen Kegel K_2. Man suche wie oben diejenige Ebene, welche diesen Kegel längs jener Tangente berührt; so ist dieselbe nach Lehrsatz 5. die Berührungsebene der Curve im Punkte 𝔫.

δ) Man ziehe aus zweien der gegebenen sechs Punkte, z. B. aus D und D_1, zweimal fünf Gerade a, b, c, d, e und a_1, b_1, c_1, d_1, f_1 nach den jedesmaligen fünf übrigen Punkten 𝔞, 𝔟, 𝔠, 𝔡, D_1 und 𝔞, 𝔟, 𝔠, 𝔡, D; so treffen diese Geraden die im Raume beliebig gegebene Ebene in den Punkten 𝔞′, 𝔟′, 𝔠′, 𝔡′, 𝔢′ und $𝔞_1'$, $𝔟_1'$, $𝔠_1'$, $𝔡_1'$, $𝔣_1'$, wo 𝔢′ und $𝔣_1'$, ebensowie e und f_1, sich vereinigen. Jetzt lege man durch die ersteren fünf Punkte einen Kegelschnitt 𝔎, und durch die letzteren fünf Punkte einen Kegelschnitt $𝔎_1$, und suche die drei (resp. zwei oder einen) übrigen Punkte, welche 𝔎 und $𝔎_1$ ausser dem Punkte $(𝔢'𝔣_1')$ gemein haben; so sind diese die Durchschnittspunkte jener Ebene mit der durch die gegebenen sechs Punkte gehenden Curve. Denn diese Kegelschnitte gehören den durch die Punkte D, D_1, als Scheitel, und durch die Curve erzeugten Kegeln, und folglich ein jeder den ersteren gemeinschaftliche Punkt, welcher nicht auf dem gemeinschaftlichen Strahle der Kegel liegt, der Curve selber an. — Es muss aber bemerkt werden, dass die Aufgabe: Wenn von zwei Kegelschnitten ein Durchschnittspunkt bekannt ist, die übrigen zu finden — eine Aufgabe, auf welche auch die Verdoppelung des Würfels zurückkommt — schwerlich mittels des blossen Lineals und eines festen Kreises gelöst werden kann. Doch lassen sich jedesmal ein Kreis und eine gleichseitige Hyperbel finden, deren Durchschnitte jene Punkte sind, wovon der Grund im 8ten Theile des Archivs S. 10., Lehrs. 3., *a*) und *f*) und S. 24. zu suchen ist.

ε) Die Strahlen eines Punktes, welche den sämmtlichen Strahlen eines Kegels zweiten Grades parallel sind, bilden einen dem letzteren congruenten Kegel; sind daher fünf Paar Strahlen zweier Kegel zweiten Grades parallel, so ist jeder Strahl des einen einem Strahle des anderen parallel. Hierauf beruht folgende Konstruktion: Man ziehe, wie vorhin, die Geraden a, b, c, d, e und a_1, b_1, c_1, d_1, f_1, und sodann durch einen der Punkte D, D_1, z. B. durch D, mit den Strahlen a_1, b_1, c_1, d_1 des anderen die parallelen Strahlen a'', b'', c'', d''. Eine beliebige feste Ebene werde von a, b, c, d, a'', b'', c'', d'' und (ef_1) der Reihe nach in den Punkten 𝔞′, 𝔟′, 𝔠′, 𝔡′, 𝔞″, 𝔟″, 𝔠″, 𝔡″ und (𝔢′𝔣″) geschnitten. Man lege durch 𝔞′, 𝔟′, 𝔠′, 𝔡′, 𝔢′ einen Kegelschnitt 𝔎′, und durch 𝔞″, 𝔟″, 𝔠″, 𝔡″, 𝔣″ einen zweiten 𝔎″, suche die Punkte 𝔭, 𝔮, 𝔯, welche 𝔎′ und 𝔎″ ausser (𝔢′𝔣″) gemein haben, und ziehe durch D nach diesen Punkten die Strahlen p, q, r (mit welchen die Strahlen p_1, q_1, r_1 des Punktes D_1 parallel sein mögen); so bestimmen p, q, r die Richtungen dreier unendlich entfernter Punkte der Curve. Sucht man ferner die beiden Ebenen, welche die durch a, b, c, d, e und a_1, b_1, c_1, d_1, f_1 bestimmten Kegel K, K_1 längs p und p_1 (oder q und q_1, r und r_1) berühren, so ist ihre Durchschnittslinie die Tangente der Curve in dem Punkte, nach welchem $p(q,r)$ gerichtet ist, d. h. eine Asymptotenlinie derselben; und zieht man durch zwei der Punkte 𝔞

b, c, d mit p die Parallelen m, n und sucht die Ebene, welche den durch jene Asymptote und die Geraden p, p_1, m, n bestimmten Cylinder längs der ersteren berührt, so hat man die Berührungsebene der Curve in jenem unendlich entfernten Punkte, d. h. eine Asymptotenebene der Curve.

Die unter α) angestellte Betrachtung hat zugleich ergeben:

Lehrsatz 6.

Durch sechs im Raume beliebig gegebene Punkte, von welchen keine vier in einer Ebene liegen, lässt sich allemal einer, aber auch nur ein einziger räumlicher Kegelschnitt der dritten Ordnung legen.

Ferner folgt aus δ) und Lehrsatz 3.

Lehrsatz 7.

Sind im Raume 6 beliebige Punkte gegeben, so sind in jeder beliebigen Ebene 15 Punkte gegeben, in welchen die Verbindungslinien der ersteren die Ebene schneiden; durch je fünf dieser Punkte, welche den Strahlen je eines der gegebenen sechs Punkte angehören, geht ein bestimmter Kegelschnitt, im Ganzen sechs Kegelschnitte; und diese letzteren haben nicht nur paarweise jene 15, sondern alle zugleich im Allgemeinen auch noch entweder einen oder drei besondere Punkte gemein.

Die unendlich entfernten Punkte der in Rede stehenden Curve bieten den natürlichsten Eintheilungsgrund ihrer Arten dar. — Von den Durchschnittspunkten p, q, r der unter ε) gedachten Kegelschnitte $\mathfrak{K}'$, $\mathfrak{K}''$ sind im Allgemeinen entweder nur einer oder alle drei vorhanden. Im Besonderen aber können auch zwei derselben oder alle drei sich vereinigen, d. h. mit andern Worten: jene Kegelschnitte können ausser dem Punkte (e′f″) einen Punkt p und einen Punkt (qr), in welchem sie einander berühren, oder aber nur noch einen einzigen Punkt (pqr), in welchem sie sich oskuliren, gemein haben. Ein fünfter Fall, dass einer der Punkte p, q, r sich mit (e′f″) vereinige, ist hier nicht zulässig, weil dann die Kegel K, K_1 einander längs ihrem gemeinschaftlichen Strahle (ef_1) berühren, und hiermit die Curve selbst in einen gewöhnlichen Kegelschnitt ausarten würde. Entweder also 1) wenn überhaupt nur ein Punkt p existirt, hat die Curve nur einen einzigen unendlich entfernten Punkt und in demselben eine Asymptotenlinie und eine Asymptotenebene von endlicher Entfernung. Unter allen Kegeln, welche sie erzeugt, gibt es also nur einen einzigen Cylinder und zwar einen elliptischen. Sie mag daher selbst eine räumliche Ellipse heissen. Oder 2) wenn drei Punkte p, q, r getrennt von einander existiren, besitzt die Curve drei unendlich entfernte Punkte mit drei Asymptotenlinien und drei Asymptotenebenen von endlicher Entfernung, und es gibt dann unter jenen Kegeln drei hyperbolische Cylinder, deren Asymptotenebe-

nen paarweise parallel sind. Die Curve heisse dann eine räumliche Hyperbel. 3) Wenn es einen Punkt p und einen Punkt (qr) gibt, hat die Curve nur zwei unendlich entfernte Punkte mit einer unendlich entfernten Tangente und einer Asymptote und zwei Asymptotenebenen von endlicher Entfernung. Unter den von ihr erzeugten Kegeln ist ein hyperbolischer und ein parabolischer Cylinder, die eine Asymptotenebene des ersteren mit den die Kegel K und K_1 längs (qr) berührenden Ebenen, die anderen mit der die Geraden p und (qr) verbindenden Ebene und zugleich mit den Durchmesserebenen des anderen Cylinders parallel. In diesem Falle möge die Curve eine (räumliche) parabolische Hyperbel heissen. 4) Wenn es einen Punkt (pqr) gibt, hat die Curve nur einen unendlich entfernten Punkt und in demselben sowohl eine unendlich entfernte Tangente als Berührungsebene; und es befindet sich unter den von ihr erzeugten Kegeln nur ein einziger, nämlich ein parabolischer Cylinder. Dann heisse dieselbe eine räumliche Parabel.

Lehrsatz 8.

Ein räumlicher Kegelschnitt dritter Ordnung hat entweder 1) drei unendlich entfernte Punkte ohne unendlich entfernte Tangenten und Berührungsebenen (räumliche Hyperbel); oder 2) nur einen unendlich entfernten Punkt ohne dergleichen Tangente und Berührungsebene (räumliche Ellipse); oder 3) zwei unendlich entfernte Punkte mit einer einzigen unendlich entfernten Tangente und keiner dergleichen Berührungsebene (parabolische Hyperbel); oder 4) nur einen unendlich entfernten Punkt mit einer unendlich entfernten Tangente und Berührungsebene (räumliche Parabel).

II.

Der vorigen Betrachtung steht eine andere zur Seite, welche von der Frage ausgeht: Wenn zwei collineare Ebenen von beliebiger Lage im Raume gegeben sind, welche einander entsprechenden Geradenpaare werden dann in je einer Ebene liegen, und welche Curve oder Fläche werden diese Ebenen umhüllen? Der Gang der Betrachtung bleibt natürlich derselbe, und es wird daher hinreichen, nur die Resultate anzugeben. Die Nummer der Sätze wird immer zugleich die der früheren reciproken Sätze sein.

Lehrsatz 1.

Sind im Raume zwei collineare Ebenen in beliebiger schiefer Lage gegeben, so gibt es in denselben unzählige Paare entsprechender Geraden, welche in einer Ebene liegen, und zwar bilden alle diese Ebenen nebst den beiden gegebenen Ebenen eine Curve dop

pelter Krümmung dritter Klasse, und diese wird in diesen beiden Ebenen von denjenigen Geraden, welche wechselseitig ihrer Durchschnittslinie entsprechen, und in denjenigen Punkten berührt, deren entsprechende in der Durchschnittslinie der Ebenen und in den betreffenden Tangenten liegen.

Lehrsatz 2.

Sämmtliche Ebenen, welche entsprechende Gerade zweier schiefliegenden collinearen Ebenen verbinden, umhüllen zwei Kegelschnitte, welche eine Tangente gemein haben und in diesen Ebenen liegen. Sämmtliche Tangenten der von jenen Ebenen gebildeten Curve doppelter Krümmung dritter Klasse sind die Verbindungslinien der Punktenpaare, in welchen je eine jener Ebenen die beiden Kegelschnitte berührt; insbesondere sind die in den beiden Ebenen liegenden Tangenten der Curve diejenigen zwei Tangenten der Kegelschnitte, welche nach den Berührungspunkten der Durchschnittslinie beider Ebenen und des jedesmaligen anderen Kegelschnittes gehen; und die Berührungspunkte der Curve in den beiden Ebenen sind die Berührungspunkte der beiden Kegelschnitte und der eben genannten Tangenten.

Bedenkt man, dass ein Kegel entsteht, wenn eine Schaar von Ebenen zwei Kegelschnitte im Raume umhüllen und in einem Punkte (Scheitel, Mittelpunkt, Centrum des Kegels) sich schneiden, oder aber wenn dieselben die entsprechenden Strahlenpaare zweier im Raume beliebig liegenden concentrischen ebenen Strahlbüschel verbinden, so wird man es natürlich finden, die in Rede stehende Curve einen excentrischen Kegel dritter Klasse zu nennen.

Lehrsatz 3.

Eine jede Ebene eines excentrischen Kegels dritter Klasse wird von allen übrigen Ebenen desselben in den Tangenten, und von sämmtlichen Tangenten desselben in den Punkten eines Kegelschnittes geschnitten.

Lehrsatz 4.

Je zwei Ebenen eines excentrischen Kegels dritter Klasse sind in Ansehung der Geraden- und Punktenpaare, in denen sie von sämmtlichen Ebenen und Tangenten des ersteren geschnitten werden, collinear.

Lehrsatz 5.

Ein excentrischer Kegel dritter Klasse wird von jeder seiner Ebenen in demjenigen Punkte des in dieser Ebene von ihm erzeugten Kegelschnittes berührt,

in welchem dieser letztere von der betreffenden Tangente des ersteren berührt wird.

Aufgabe.

An sechs im Raume beliebig gegebene Ebenen einen excentrischen Kegel dritter Klasse zu legen, nämlich: α) für jeden Punkt, welcher auf der Durchschnittslinie zweier der sechs Ebenen liegt, die durch ihn gehende dritte Ebene der Curve; β) die Tangenten und γ) die Berührungspunkte der Curve in diesen Ebenen; δ) die Ebenen der Curve, welche durch einen im Raume beliebig gegebenen Punkt gehen, und insbesondere ε) diejenigen, welche mit einer gegebenen Geraden parallel sind, zu finden.

Lehrsatz 6.

An sechs im Rnume beliebig gegebene Ebenen, von denen keine vier durch einerlei Punkt gehen, lässt sich allemal einer, aber auch nur ein einziger excentrischer Kegel dritter Klasse legen.

Lehrsatz 7.

Sind im Raume sechs beliebige Ebenen gegeben, so gehen von einem beliebigen Punkte des Raumes nach den Durchschnittslinien jener Ebenen 15 neue Ebenen; je fünf dieser letzteren, welche nach den Durchschnittslinien einer der sechs ersteren mit den fünf übrigen gehen, umhüllen einen bestimmten Kegel zweiten Grades, im Ganzen sechs Kegel; und diese letzteren werden nicht nur paarweise von den 15 Ebenen, sondern alle zugleich auch noch entweder von einer oder von drei besonderen Ebenen berührt.

Lehrsatz 8.
(Ohne eigentliche Reciprocität.)

Unter allen excentrischen Kegeln dritter Klasse besitzt nur derjenige eine unendlich entfernte Ebene, und daher auch eine dergleichen Tangente und Berührungspunkt, welcher von zwei Parabeln erzeugt wird.

XIX.

Einige Betrachtungen aus der höheren Geometrie.

Von dem
Herrn Professor Dr. O. Schlömilch
an der Universität zu Jena.

Es sei in Taf. IV. Fig. 8. O der Anfangspunkt rechtwinklicher Coordinaten $OM=x$, $MP=y$ und PQR eine willkührliche Curve, an welche im Punkte P eine Tangente ST gelegt ist. Construirt man zu OM und der Subtangente MS, die mit s bezeichnet werden möge, die mittlere harmonische Proportionale

$$ML=\frac{2xs}{x+s},$$

so kann das Rechteck aus ML und MP, nämlich $LMPN$, in irgend einer Relation zu der über der Abscisse liegenden Fläche $OMPQR$ unserer Curve stehen; so wäre es z. B. möglich, dass für $OMPQR=u$

$$\frac{2xs}{x+s}y=u, \text{oder}=2u, \text{u. s. w.}$$

wäre, wie diess z. B. bei der Parabel der Fall ist*). Allgemeiner ausgedrückt, könnte überhaupt

$$\frac{2xs}{x+s}y=\varphi(u)$$

sein, und es würde nun darauf ankommen, diejenige Curve, d. h. ihre Gleichung $y=f(x)$, zu bestimmen, in welcher die genannte Eigenschaft statt fände. Man brauchte aber nicht gerade zwischen

---

*) Für die Parabel $y=\sqrt{px}$ ist bekanntlich $u=\frac{2}{3}xy$, $s=2x$, also

$$2u=\frac{2xs}{x+s}y.$$

x und s die mittlere harmonische Proportionale zu construiren; man könnte diess auch zwischen $2x$ und s, $3x$ und s, oder $\frac{1}{2}x$ und s u. s. f., überhaupt zwischen irgend einer Linie z und s, vorausgesetzt, dass z auf bekannte Weise von x abhängt, also etwa $z=\psi(x)$ ist. In dieser Allgemeinheit aufgefasst, würde nun die Aufgabe lauten:

> Es wird die Gleichung derjenigen Curve gesucht, in welcher die über der Abscisse x stehende Fläche u, die Ordinate y und die Subtangente s durch die Relation
>
> $$\varphi(u)=\frac{2\psi(x).s}{\psi(x)+s}\cdot y \tag{1}$$
>
> mit einander verbunden sind, wobei $\varphi(u)$ und $\psi(x)$ zwei willkührliche Funktionen erster Dimension bezeichnen.

Die Gleichung (1) lässt sich auch in der folgenden Gestalt

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{\psi(x)}=\frac{2}{\varphi(u)}y$$

oder, nach Multiplikation mit y, in der nachstehenden

$$\frac{y}{s}+\frac{1}{\psi(x)}y=\frac{2}{\varphi(u)}y^2 \tag{2}$$

darstellen, und führt in derselben sogleich zur Differenzialgleichung der gesuchten Curve. Da nämlich

$$u=\int y dx$$

ist, so folgt umgekehrt

$$y=\frac{du}{dx}. \tag{3}$$

Ferner gilt zur Bestimmung der Subtangente einer Curve die Formel

$$s=y:\frac{dy}{dx},$$

woraus man sogleich erhält

$$\frac{y}{s}=\frac{dy}{dx}=\frac{d^2u}{dx^2}. \tag{4}$$

Substituiren wir jetzt die unter (3) und (4) gefundenen Ausdrücke für y und $\frac{y}{s}$ in die Gleichung (2), so wird

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{1}{\psi(x)}\frac{du}{dx}=\frac{2}{\varphi(u)}\left(\frac{du}{dx}\right)^2$$

oder

$$\frac{d^2u}{dx^2} + X\frac{du}{dx} = U\left(\frac{du}{dx}\right)^2, \tag{5}$$

wobei der Bequemlichkeit wegen

$$X = \frac{1}{\psi(x)},\ U = \frac{2}{\varphi(u)} \tag{6}$$

gesetzt worden ist. — Das Integral der Differenzialgleichung (5) würde uns nun u als Funktion von x, also etwa $u = F(x) + C$ geben, wobei die Constante so bestimmt werden muss, dass für $x = 0$ auch $u = 0$ wird, und darauf hätte man, um die Relation zwischen y und x zu finden, blos eine simple Differenziation nöthig, nämlich zufolge der Gleichung (3) wäre $y = F'(x)$.

Die Integration der Differenzialgleichung zweiter Ordnung und zweiten Grades, auf welche wir in Nro: (5) gekommen sind, würde sehr leicht sein, wenn das Glied auf der rechten Seite $= 0$, die Gleichung also von der Form

$$\frac{d^2v}{dx^2} + X\frac{dv}{dx} = 0$$

wäre; denn man hätte dann für $\frac{dv}{dx} = w$:

$$\frac{dw}{dx} + Xw = 0 \tag{7}$$

oder

$$\frac{dw}{w} = -Xdx,$$

$$lw = -\int Xdx + \text{Const.}$$

$$w = e^{-\int Xdx}\, e^{\text{Const}};$$

oder, wenn man den constanten Faktor mit $\varkappa$ bezeichnet,

$$\frac{dv}{dx} = \varkappa\, e^{-\int Xdx} \tag{8}$$

und hieraus wäre v durch eine neue Integration leicht zu entwickeln. Da nun die Gleichung (7) bis auf die rechte Seite formell mit der zu integrirenden identisch ist, so liegt die Vermuthung sehr nahe, dass auch ihr Integral von ähnlicher Form sein werde; wir setzen daher conform mit (8)

$$\frac{du}{dx} = \varkappa\, e^{-\int Xdx} \tag{9}$$

aber mit dem Unterschiede, dass wir hier unter $\varkappa$ nicht eine Constante, sondern eine erst noch zu bestimmende Funktion von x

oder u verstehen. Durch Differenziation von (9) ergiebt sich nun

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \left(\frac{d\varkappa}{dx} - \varkappa X\right) e^{-\int X dx},$$

oder, wenn man für die Exponentialgrösse ihren Werth aus Nro. (9) substituirt,

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \left(\frac{d\varkappa}{dx} - \varkappa X\right) \frac{1}{\varkappa} \frac{du}{dx}.$$

Schreibt man noch $\frac{d\varkappa}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ für $\frac{d\varkappa}{dx}$, so wird

$$\frac{d^2u}{dx^2} + X \frac{du}{dx} = \frac{1}{\varkappa} \frac{d\varkappa}{du} \left(\frac{du}{dx}\right)^2. \tag{10}$$

Soll nun die Gleichung Nro. (9) in der That das erste Integral von der Differenzialgleichung (5) darstellen, so muss die Gleichung (10) mit der in (5) identisch sein; da auf der linken Seite diese Identität bereits statt findet, so brauchen wir blos die rechten Seiten zu vergleichen, und daraus erhalten wir

$$\frac{1}{\varkappa} \frac{d\varkappa}{du} = U,$$

d. h. eine Gleichung, welche zur Bestimmung von $\varkappa$ dient, nämlich:

$$\frac{d\varkappa}{\varkappa} = U du,$$

$$l\varkappa = \int U du + \text{Const},$$

$$\varkappa = C e^{\int U du};$$

wobei zur Abkürzung $e^{\text{Const}} = C$ gesetzt worden ist. Substituiren wir den Werth von $\varkappa$ in die Gleichung (9), so wird

$$\frac{du}{dx} = C e^{\int U du} . e^{-\int X dx},$$

oder

$$du . e^{-\int U du} = C dx . e^{-\int X dx},$$

und da hier die Variabelen getrennt sind, so ergiebt sich durch Integration

$$\int du . e^{-\int U du} = C \int dx e^{-\int X dx} + C' \tag{11}$$

als vollständige Integralgleichung der Differenzialgleichung (5). Nach geschehener Integration löst man sie nach u auf, bestimmt die willkührlichen Constanten so, dass sich u mit x gleichzeitig annullirt, und erhält dann die gesuchte Gleichung zwischen y und x mit Hülfe der Formel

$$y = \frac{du}{dx}. \qquad (12)$$

Als erstes Beispiel betrachten wir die Spezialisirung $\varphi(u) = u$, $\psi(x) = x$, also

$$U = \frac{2}{u}, X = \frac{1}{x}.$$

Es giebt dasselbe

$$-\int U du = l\left(\frac{1}{u^2}\right), -\int X dx = l\left(\frac{1}{x}\right);$$

und folglich ist die Integralgleichung (11)

$$\int du \frac{1}{u^2} = C\int dx \frac{1}{x} + C'$$

oder

$$-\frac{1}{u} = C lx + C',$$

und wenn wir $C' = -a, C = b$ setzen:

$$u = \frac{1}{a - blx},$$

wobei in der That $u = 0$ ist für $x = 0$. Nach (12) ergiebt sich nun

$$y = \frac{b}{x(a - blx)^2}$$

als Gleichung derjenigen Curve, in welcher die Coordinaten mit der Fläche u und der Subtangente s durch die Relation

$$u = \frac{2xs}{x+s} y$$

verbunden sind, wovon man sich auch leicht a posteriori überzeugen kann.

Für $\varphi(u) = \frac{u}{n}$, $\psi(x) = \frac{x}{n}$, wo n eine von der Einheit verschiedene Zahl bedeutet, wird $U = \frac{2n}{u}, X = \frac{n}{x}$, und folglich

$$-\int U du = l\left(\frac{1}{u^{2n}}\right), -\int X dx = l\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

Die Integralgleichung (10) geht dabei in

$$\int du \frac{1}{u^{2n}} = C\int dx \frac{1}{x^n} + C',$$

oder

$$-\frac{1}{2n-1}\frac{1}{u^{2n-1}}=-\frac{C}{n-1}\frac{1}{x^{n-1}}+C'$$

über, woraus man für

$$C=\frac{n-1}{2n-1}a, C'=\frac{b}{2n-1}$$

sehr leicht

$$u^{2n-1}=\frac{x^{n-1}}{a-bx^{n-1}} \qquad (13)$$

findet. Hierdurch bestimmt sich dann u und y sehr leicht. Die zugehörige Relation zwischen x, y, u, s ist

$$\frac{1}{n}u=\frac{2\frac{1}{n}xs}{\frac{1}{n}x+s}y$$

oder

$$u=\frac{2x(ns)}{x+(ns)}y, \qquad (14)$$

und es ist also in diesem Falle u einem Rechtecke gleich, welches die Ordinate zur einen und die mittlere harmonische Proportionale zwischen Abscisse und $n$facher Subtangente zur anderen Seite hat. Für $n=2$ giebt diess z. B.

$$u=\sqrt[3]{\frac{x}{a-bx}},$$

wobei u mit x gleichzeitig verschwindet, und ferner

$$y=\frac{a}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{x^2(a-bx)^4}}.$$

Giebt man den Constanten a und b spezielle Werthe, so ergeben sich besondere Formen unserer Curven; z. B. aus (13) für $b=0$

$$u=\left(\frac{x^{n-1}}{a}\right)^{\frac{1}{2n-1}},$$

woraus man durch Differenziation nach x und für

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{2n-1}}=\frac{2n-1}{n-1}k$$

sehr leicht erhält:

$$u = \frac{2n-1}{n-1} kx^{\frac{1-n}{1-2n}}, \quad y = kx^{\frac{n}{1-2n}},$$

also Curven, welche unter das Geschlecht der Parabeln gehören, wenn $1 > 2n$ ist; für $n = \frac{1}{4}$ ist z. B.

$$y = k\sqrt{x},$$

und in der That wird hierdurch die Gleichung (14) für $n = \frac{1}{4}$ befriedigt; für $n = \frac{3}{8}$ erhält man die sogenannte Neil'sche Parabel, die Evolute der Archimedeischen.

XX.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Von dem
Herrn Professor Dr. O. Schlömilch
an der Universität zu Jena.

Man soll die folgende Regel zur Beurtheilung der Convergenz oder Divergenz der Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots$$

beweisen. Wenn die Reihe

$$\frac{u_1}{u_0} + \frac{u_2}{u_0 + u_1} + \frac{u_3}{u_0 + u_1 + u_2} + \ldots.$$

convergirt, so ist diess auch mit der obigen der Fall, und wenn die Reihe

$$\frac{u_1}{u_0 + u_1} + \frac{u_2}{u_0 + u_1 + u_2} + \frac{u_3}{u_0 + u_1 + u_2 + u_3} + \ldots\ldots$$

divergirt, so divergirt auch die anfangs genannte.

Von dem Mittelpunkte eines dreiachsigen Ellipsoids sind Perpendikel auf die Tangentialebenen desselben gefällt; man soll nun die Gleichung derjenigen Fläche aufstellen, welche die Fusspunkte jener Senkrechten in ihrer Continuität erzeugen.

XXI.

Miscellen.

Ueber den Brinkley'schen Satz vom Mantel des schiefen Cylinders.

Von

dem Herausgeber.

Brinkley hat die folgende Bestimmung des Mantels des schiefen Cylinders mit kreisförmiger Basis gegeben, welche, so einfach und so leicht sich ganz von selbst darbietend dieselbe auch ist, doch verdient, allgemeiner bekannt und bei dem Elementarunterrichte benutzt zu werden, da sie auch sehr wohl eine ganz elementare Darstellung gestattet. Dieselbe scheint übrigens von dem genannten Mathematiker schon vor längerer Zeit gegeben, und nur erst jetzt in einigen französischen und englischen Journalen von Neuem hervorgehoben worden zu sein. Bei dem geometrischen Elementarunterrichte ist es wohl manchem Lehrer schon eben so unangenehm, wie oft dem Verfasser dieses Aufsatzes, gewesen, in der Lehre vom Cylinder sagen zu müssen, dass die Bestimmung des Mantels des schiefen Cylinders in den Elementen sich nicht geben lasse und nur durch Kunstgriffe der höhern Mathematik möglich sei, überhaupt den Anfänger ohne alle Auskunft über diesen Gegenstand lassen zu müssen.

In Taf. IV. Fig. 9. sei $ABA'B'$ der durch die Axe eines schiefen Cylinders geführte, auf seinen beiden parallelen Grundflächen senkrecht stehende Schnitt. Legt man nun durch die beiden Punkte B und B' zwei auf der Axe des schiefen Cylinders senkrecht stehende Ebenen, so erhält man den zweiten geraden Cylinder $BCB'C'$, und aus dem Princip der Symmetrie erhellet auf der Stelle, dass die beiden krummflächigen Mäntel der Körper ABC und $A'B'C'$ einander gleich sind, der schiefe Cylinder $ABA'B'$ und der gerade Cylinder $BCB'C'$ also offenbar gleiche Mäntel haben, so dass folglich, wenn wir die Mäntel dieser beiden Cylinder respective durch M und $\mathfrak{M}$ bezeichnen,

$$M = \mathfrak{M}$$

ist. Die Grundflächen des geraden Cylinders $BCB'C'$ sind aber Ellipsen, deren grosse und kleine Axen, wenn die Halbmesser der Grundflächen des schiefen Cylinders durch r, und der Neigungswinkel seiner Axe gegen seine Grundflächen durch J bezeichnet werden, wie sogleich in die Augen fallen wird, respective

$$2r \text{ und } 2r \sin J$$

sind. Die Höhe des geraden Cylinders $BCB'C'$ ist der Seite s des schiefen Cylinders $ABA'B'$ gleich. Bezeichnen wir nun den Perimeter einer Ellipse, deren Axen überhaupt a, b sind, durch Per. Ell. (a, b), so ist offenbar

$$\mathfrak{M} = s.\{\text{Per. Ell. } (2r, 2r \sin J)\};$$

also nach dem Obigen auch

$$M = s.\{\text{Per. Ell. } (2r, 2r \sin J)\}.$$

Ist nun aber h die Höhe des schiefen Cylinders $ABA'B'$, so ist

$$h = s \sin J,$$

und folglich

$$2r : 2r \sin J = s : h = 1 : \sin J,$$

oder

$$2r : s = 2r \sin J : h.$$

Daher sind zwei Ellipsen, welche die grossen und kleinen Axen $2r$, $2r \sin J$ und s, h haben, einander ähnlich, und es ist folglich offenbar auch

$$\text{Per. Ell. } (2r, 2r \sin J) : \text{Per. Ell. } (s, h) = 2r : s,$$

also

$$\text{Per. Ell. } (2r, 2r \sin J) = \frac{2r}{s}\{\text{Per. Ell. } (s, h)\}.$$

Führt man diesen Werth von

$$\text{Per. Ell. } (2r, 2r \sin J)$$

in den obigen Ausdruck von M ein, so erhält man sogleich

$$M = 2r.\{\text{Per. Ell. } (s, h)\},$$

d. h. der Mantel eines schiefen Cylinders mit kreisförmiger Basis ist einem Rechtecke gleich, dessen Grundlinie und Höhe der Durchmesser einer seiner beiden gleichen Grundflächen und der Perimeter einer mit seiner Seite und Höhe als Axen beschriebenen Ellipse sind; welches der Ausdruck ist, auf den Brinkley die Bestimmung des Mantels eines solchen Cylinders gebracht hat.

Bemerken will ich nur noch, dass man bei der obigen Darstellung auch die Anwendung der Trigonometrie oder vielmehr Goniometrie, d. h. den Gebrauch des durch sin J dargestellten Verhältnissexponenten, leicht ganz vermeiden kann. Die grosse und kleine Axe der Grundflächen des geraden Cylinders sind nämlich offenbar AB und BC, also ganz wie oben

$$\mathfrak{M} = s.\{\text{Per. Ell. } (AB, BC)\},$$

und folglich, weil $M = \mathfrak{M}$ war, auch

$$M = s.\{\text{Per. Ell. } (AB, BC)\}.$$

Aus einer ganz einfachen Betrachtung der ähnlichen Dreiecke ABC und $BB'D$ folgt aber augenblicklich

$$AB : BC = BB' : B'D = s : h$$

oder

$$AB:s=BC:h.$$

Folglich ist offenbar

$$\text{Per. Ell. }(AB, BC):\text{Per. Ell. }(s, h)=AB:s,$$

also

$$\text{Per. Ell. }(AB, BC)=\frac{AB}{s}\{\text{Per. Ell. }(s, h)\},$$

und daher nach dem Obigen

$$M=AB.\{\text{Per. Ell. }(s, h)\},$$

oder

$$M=AB.\{\text{Per. Ell. }(BB', B'D)\},$$

oder auch

$$M=2r.\{\text{Per. Ell. }(s, h)\},$$

ganz wie oben, woraus denn auch wieder der obige Brinkley'sche Satz folgt.

Theoretisch genommen hat übrigens der Brinkley'sche Satz nach meiner Ansicht nur wenig Werth, da er die Rectification der Ellipse voraussetzt, die ja bekanntlich nur durch unendliche Reihen möglich ist. Aber um dem Anfänger wenigstens eine deutliche Ansicht zu geben, worauf es bei der Bestimmung des Mantels eines schiefen Cylinders eigentlich ankommt, ihn überhaupt nicht ohne alle Belehrung über diesen Gegenstand lassen zu dürfen, wie bisher beim Elementarunterrichte immer geschehen ist und geschehen musste, scheint mir der Brinkley'sche Satz in der That sehr geeignet zu sein. Vielleicht werden auch andere Lehrer denselben künftig bei'm Elementarunterrichte zu benutzen und in denselben einzuführen angemessen finden. Der Umfang einer Ellipse lässt sich ja wenigstens mechanisch mittelst eines um dieselbe gelegten Fadens messen, was man in der Praxis vielleicht selbst seiner Berechnung aus den beiden Axen vorziehen dürfte.

Die Formel für den Mantel des geraden Cylinders folgt übrigens leicht aus dem Brinkleyschen Satze, da für diesen Cylinder $s=h$ ist, also Ell. (s, h) in Ell. (h, h), d. h. in den mit der Höhe h als Durchmesser beschriebenen Kreis übergeht, folglich

$$\text{Per. Ell. }(s, h)=h\pi,$$

und daher nach dem Obigen

$$M=2r.h\pi=2rh\pi=2r\pi.h$$

ist, welches ganz mit dem aus den Elementen allgemein bekannten Ausdrucke übereinstimmt.

XXII.

Ueber einige bestimmte Integrale.

Von dem

Herrn Doctor F. Arndt,

Lehrer am Gymnasium zu Stralsund.

§. 1.

Die ganze Untersuchung, welche ich im Folgenden anstellen werde, basirt sich auf die Werthbestimmung des Integrals

$$\omega = \int_{\infty}^{p} \frac{\cos x}{x} \partial x,$$

wo $p > 0$ ist. Offenbar muss dasselbe einen bestimmten endlichen Werth haben, für den man, ähnlich wie beim Integrallogarithmus, eine convergirende Reihe erhalten kann. Setzt man nämlich für $\cos x$ die bekannte Reihe, multiplicirt dieselbe mit $\frac{\partial x}{x}$, integrirt, und macht der Kürze halber

$$(a) \ldots\ldots \frac{1}{2} l.x^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{1.2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{1.2....4} - .... = \Theta(x),$$

so kommt

$$\int_{\infty}^{p} \frac{\cos x}{x} \partial x = \Theta(p) + C_1, \text{ wo } C_1 = -\Theta(\infty) \text{ ist.}$$

Hier tritt nun bei Bestimmung der Constante C_1 dieselbe Schwierigkeit wie bei der des Integrallogarithmus ein, indem der Werth $\Theta(\infty)$ mittelst der Reihe (a) deshalb nicht bestimmt werden kann, weil alle Glieder unendlich werden. Die folgende Untersuchung wird lehren, dass diese Constante C_1 merkwürdigerweise die des Integrallogarithmus ist, was man noch nicht bemerkt zu haben scheint. Um die Identität der beiden in Rede stehenden Constanten darzuthun, stellen wir jede derselben durch ein bestimmtes Integral dar, was für den Integrallogarithmus schon geschehen ist, hier aber nothwendig mit aufgenommen werden muss.

Bezeichnet nämlich C die Constante des Integrallogarithmus, so ist

$$\int_{\infty}^{p} \frac{e^{-y}\partial y}{y} = C + \frac{1}{2} l.p^2 - p + \frac{1}{2} \cdot \frac{p^2}{1.2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{p^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

wo $p > 0$ sein muss. Könnte man nun eine Function von y, $f(y)$, so bestimmen, dass $\int_{\infty}^{p} f(y)\partial y = \frac{1}{2} l.p^2 + \varphi(p)$, wobei $\varphi(p)$ für $p=0$ nicht unendlich würde, so hätte man $\int_{\infty}^{p} \left\{\frac{e^{-y}}{y} - f(y)\right\} \partial y = C - \varphi(p) - p + \frac{1}{2} \cdot \frac{p^2}{1.2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{p^3}{1.2.3} + \text{etc.}$, folglich, wenn man $p=0$ setzte:

$$\int_{\infty}^{0} \left\{\frac{e^{-y}}{y} - f(y)\right\} \partial y = C - \varphi(0),$$

oder

$$(b) \; \ldots\ldots \; C = \varphi(0) - \int_{0}^{\infty} \left\{\frac{e^{-y}}{y} - f(y)\right\} \partial y,$$

und C wäre somit durch ein bestimmtes Integral ausgedrückt.

Eine solche Function, die obigen Bedingungen genügt, ist nun $f(y) = \frac{1}{y(1+y)}$; denn man findet leicht $\int_{\infty}^{p} \frac{\partial y}{y(1+y)} = \frac{1}{2} l.p^2 - l(p+1)$, also $\varphi(p) = -l(p+1)$, $\varphi(0)=0$, folglich

$$1. \quad C = -\int_{0}^{\infty} \left(e^{-y} - \frac{1}{1+y}\right) \frac{\partial y}{y},$$

wie schon bekannt.

Keineswegs ist dies die einzige Form, unter welcher C sich darstellen kann. Setzen wir z. B. $f(y) = \frac{1}{y(1+y^2)} = \frac{1}{y} - \frac{y}{1+y^2}$, so kommt $\int_{\infty}^{p} f(y)\partial y = \frac{1}{2} l.p^2 - \frac{1}{2} l.(1+p^2)$, also $\varphi(p) = -\frac{1}{2} l(1+p^2)$, $\varphi(0)=0$, und

$$2. \quad C = -\int_{0}^{\infty} \left(e^{-y} - \frac{1}{1+y^2}\right) \frac{\partial y}{y}.$$

Auf eine ähnliche Art kann man nun für die Constante C_1 ein bestimmtes Integral finden. Denn es ist

$$\int_{\infty}^{p} \frac{\cos y}{y} \partial y = C_1 + \frac{1}{2} l.p^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{p^2}{1.2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{p^4}{1.2\ldots4} - \text{etc.}$$

Setzen wir also weiter $\int_{\infty}^{p} f(y)\partial y = \frac{1}{2} l.p^2 + \varphi(p)$, so kommt $\int_{\infty}^{p} \left\{\frac{\cos y}{y} - f(y)\right\} \partial y = C_1 - \varphi(p) - \frac{1}{2} \cdot \frac{p^2}{1.2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{p^4}{1.2\ldots4} - \text{etc.}$, also für $p=0$:

$$\int_{\infty}^{0} \left\{ \frac{\cos y}{y} - f(y) \right\} \partial y = C_1 - \varphi(0),$$

oder

$$C_1 = \varphi(0) - \int_0^{\infty} \left\{ \frac{\cos y}{y} - f(y) \right\} \partial y.$$

Durch die beiden Annahmen $f(y) = \frac{1}{y(1+y)}$ und $f(y) = \frac{1}{y(1+y^2)}$ erhält man also, wie vorher,

$$3. \quad C_1 = -\int_0^{\infty} (\cos y - \frac{1}{1+y}) \frac{\partial y}{y},$$

$$4. \quad C_1 = -\int_0^{\infty} (\cos y - \frac{1}{1+y^2}) \frac{\partial y}{y}.$$

Untersuchen wir jetzt die sich aus 1. und 3., oder aus 2. und 4., ergebende Differenz

$$C_1 - C = \int_0^{\infty} (e^{-y} - \cos y) \frac{\partial y}{y}.$$

Man setze für $\frac{1}{y}$ das bestimmte Integral $\int_0^{\infty} e^{-uy} \partial u$, und kehre die Integration um; dann kommt

$$C_1 - C = \int_0^{\infty} (e^{-y} - \cos y) \partial y \int_0^{\infty} e^{-uy} \partial u$$

$$= \int_0^{\infty} \partial u \int_0^{\infty} (e^{-y} - \cos y) e^{-uy} \partial y.$$

Nun ist

$$\int_0^{\infty} e^{-y} . e^{-uy} \partial y = \int_0^{\infty} e^{-(u+1)y} \partial y = \frac{1}{u+1}, \int_0^{\infty} e^{-uy} \cos y \partial y = \frac{u}{1+u^2},$$

folglich

$$\int_0^{\infty} (e^{-y} - \cos y) e^{-uy} \partial y = \frac{1}{1+u} - \frac{u}{1+u^2}$$

und

$$C_1 - C = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{1+u} - \frac{u}{1+u^2} \right) \partial u.$$

Da endlich $\int \left(\frac{1}{1+u} - \frac{u}{1+u^2} \right) \partial u = l(1+u) - \frac{1}{2} l . (1+u^2) = \frac{1}{2} l . \frac{(1+u)^2}{1+u^2}$, so ist offenbar $\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{1+u} - \frac{u}{1+u^2} \right) \partial u = 0$, d. i. $C_1 - C = 0$, oder $C_1 = C$. Demnach ist

5. $\int_{\infty}^{p}\frac{\cos y}{y}\partial y = C + \frac{1}{2}\,l.p^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{p^2}{1.2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{p^4}{1.2....4} - \text{etc.},$
wo $C=0{,}5772156....$ ist.

§. 2.

Wenn im vorigen Paragraphen auch hinreichend dargethan ist, dass $C_r = C$ ist, so will ich doch eine Bestätigung dieser Wahrheit auf anderem Wege geben, der uns zu einem merkwürdigen Ausdruck der Function $\frac{\partial l\Gamma(a)}{\partial a}$ führen wird.

Bekanntlich entwickelt Lejeune-Dirichlet $\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}$ dadurch, dass er den Ausdruck $\Gamma(a)=\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\partial x$ nach a differenzirt, wodurch $\Gamma'(a)=\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,lx\partial x$ kommt, nun für lx das bestimmte Integral $\int_0^\infty (e^{-y}-e^{-xy})\frac{\partial y}{y}$ setzt, und die Integration umkehrt Statt dessen nehmen wir die Gleichung

$$\int_0^\infty \frac{\cos y - \cos xy}{y}\partial y = lx$$

zu Hülfe, setzen also $\Gamma'(a)=\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\partial x \int_0^\infty \frac{\cos y - \cos xy}{y}\partial y$ $=\int_0^\infty \frac{\partial y}{y}\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}(\cos y - \cos xy)\,\partial x$. Beachtet man nun, dass $\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\cos y\partial x = \cos y\,\Gamma(a)$, und

$$\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\cos xy\,\partial x = \Gamma(a).\frac{\cos(a\,\mathrm{arctang}\,y)}{(1+y^2)^{\frac{1}{2}a}}$$

ist, so kommt

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \int_0^\infty \left(\cos y - \frac{\cos(a\,\mathrm{arctang}\,y)}{(1+y^2)^{\frac{1}{2}a}}\right)\frac{\partial y}{y}.$$

Bekanntlich ist nun die Constante des Integrallogarithmus C der Werth, welchen $-\frac{\partial l\Gamma(a)}{\partial a}$ für $a=1$ erhält; also wird die vorhergehende Gleichung für $a=1$ folgende:

$$-C = \int_0^\infty \left\{\cos y - \frac{\cos(\mathrm{arctang}\,y)}{(1+y^2)^{\frac{1}{2}}}\right\}\frac{\partial y}{y}.$$

Nun findet man leicht, dass $\frac{\cos(\mathrm{arctang}\,y)}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{1}{1+y^2}$ ist, also wird

$$C = -\int_0^\infty \left(\cos y - \frac{1}{1+y^2}\right)\frac{\partial y}{y},$$

und wenn man diesen Ausdruck mit 4. vergleicht, so kommt $C_1 = C$.

Herr Prof. Schlömilch ist in einer Abhandlung „Notes sur quelques intégrales défin ies" (Crelle's Journ. Bd. 33. p. 316.) auf die Function $C + \frac{1}{2}l.p^2 - \frac{1}{2}.\frac{p^2}{1.2} + \frac{1}{4}.\frac{p^4}{1.2....4}$ — etc. geführt worden; ich weiss nicht, ob er bemerkt hat, dass dieselbe gleich $\int_\infty^p \frac{\cos y}{y}\partial y$ ist. Ich werde im Folgenden die Schlömilchsche Bezeichnung wählen, nach welcher

$$C + \tfrac{1}{2}l.p^2 - \tfrac{1}{2}.\frac{p^2}{1.2} + \tfrac{1}{4}.\frac{p^4}{1.2.....4} - \text{etc.} = Ci(p),$$

so dass also auch

$$Ci(p) = \int_\infty^p \frac{\cos y}{y}\partial y = \int_\infty^1 \frac{\cos py}{y}\partial y \text{ ist.}$$

§. 3.

Ueber die Integrale $u = \int_0^\infty \frac{\cos bx\partial x}{x+a}$, $v = \int_0^\infty \frac{\sin bx\partial x}{x+a}$.

Wird $x = ay$ gesetzt, so kommt

$$u = \int_0^\infty \frac{\cos aby\partial y}{1+y}, \quad v = \int_0^\infty \frac{\sin aby\partial y}{1+y},$$

oder für $ab = m$:

$$u = \int_0^\infty \frac{\cos mx\partial x}{1+x}, \quad v = \int_0^\infty \frac{\sin mx\partial x}{1+x}.$$

Setzt man ferner $1 + x = y$, so kommt $u = \int_1^\infty \frac{\cos m(y-1)\partial y}{y}$, $v = \int_1^\infty \frac{\sin m(y-1)\partial y}{y}$, folglich durch Auflösung des Cosinus und Sinus:

$$u = \cos m\int_1^\infty \frac{\cos my\partial y}{y} + \sin m\int_1^\infty \frac{\sin my}{y}\partial y,$$

$$v = \cos m\int_1^\infty \frac{\sin my\partial y}{y} - \sin m\int_1^\infty \frac{\cos my\partial y}{y}.$$

Von diesen beiden Integralen ist $\int_1^\infty \frac{\cos my\partial y}{y}$ in §. 1. und §. 2. entwickelt und gleich $-Ci(m)$. Was das andere betrifft, so ist

$$\int_1^\infty \frac{\sin my}{y}\partial y = \int_0^\infty \frac{\sin my}{y}\partial y - \int_0^1 \frac{\sin my}{y}\partial y = \frac{\pi}{2} - \int_0^1 \frac{\sin my}{y}\partial y,$$

wo m positiv ist. Das Integral $\int_0^1 \frac{\sin my}{y}\partial y$ ist eine durch Reihen entwickelbare Transcendente, welche Schlömilch a. a. O. durch $Si(m)$ bezeichnet, so dass

$$Si(m) = \int_0^1 \frac{\sin my}{y}\partial y = \int_0^m \frac{\sin y}{y}\partial y = m - \frac{1}{3}\cdot\frac{m^3}{1.2.3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{m^5}{1.2\ldots5} - \text{etc.}$$

ist. Demnach ist

$$\int_0^\infty \frac{\cos mx\partial x}{1+x} = -\cos m\, Ci(m) + \sin m\{\tfrac{1}{2}\pi - Si(m)\},$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin mx\partial x}{1+x} = \sin m\, Ci(m) + \cos m\{\tfrac{1}{2}\pi - Si(m)\};$$

oder auch

$$6.\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos bx\partial x}{x+a} = -\cos ab\, Ci(ab) + \sin ab\{\tfrac{1}{2}\pi - Si(ab)\} \\ \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin bx\partial x}{x+a} = \sin ab\, Ci(ab) + \cos ab\{\tfrac{1}{2}\pi - Si(ab)\} \end{cases}$$

$$(a > 0,\ b > 0).$$

Diese beiden Integrale sind einer sehr bemerkenswerthen Transformation fähig, welche wir im nächsten Paragraphen versuchen.

§. 4.

Da $\frac{1}{x+a} = \int_0^\infty e^{-(x+a)u}\partial u$, so ist $\int_0^\infty \frac{f(x)}{x+a}\partial x$

$$= \int_0^\infty f(x)\partial x \int_0^\infty e^{-(x+a)u}\partial u = \int_0^\infty e^{-au}\partial u \int_0^\infty f(x)\, e^{-ux}\partial x$$

(die Integration ist umgekehrt worden). Setzen wir also $f(x) = \cos bx$ oder $f(x) = \sin bx$, und beachten, dass

$$\int_0^\infty e^{-ux}\cos bx\,\partial x = \frac{u}{b^2+u^2},\quad \int_0^\infty e^{-ux}\sin bx\partial x = \frac{b}{b^2+u^2}$$

ist, so erhalten wir

$$\int_0^\infty \frac{xe^{-ax}\partial x}{x^2+b^2} = \int_0^\infty \frac{\cos bx\partial x}{x+a},$$

$$\int_0^\infty \frac{be^{-ax}\partial x}{x^2+b^2} = \int_0^\infty \frac{\sin bx\partial x}{x+a}.$$

Für die Integrale linker Hand kann man auch $\int_0^\infty \frac{xe^{-bx}\partial x}{x^2+a^2}$,

$\int_0^\infty \frac{ae^{-bx}\partial x}{x^2+a^2}$ setzen, wie man durch einfache Transformation findet; also ist nach §. 3.

$$7.\quad \begin{cases} \int_0^\infty \frac{xe^{-bx}\partial x}{x^2+a^2} = \sin ab\, Ci(ab) + \cos ab \{\tfrac{1}{2}\pi - Si(ab)\}, \\ \int_0^\infty \frac{xe^{-bx}\partial x}{x^2+a^2} = -\cos ab\, Ci(ab) + \sin ab \{\tfrac{1}{2}\pi - Si(ab)\}. \end{cases}$$

Zu demselben Resultat ist Schlömilch auf ganz anderem Wege gelangt, in einer Abhandlung „Sur l'intégrale définie $\int_0^\infty \frac{\partial\Theta}{\Theta^2+a^2} e^{-x\Theta}$" (Crelle's Journal Bd. 33. p. 325.) *). Seine Methode lässt sich, wenn man einige der im Vorhergehenden entwickelten Resultate zu Hülfe nimmt, auf folgende Art vereinfachen.

Schlömilch differenzirt die Gleichung $\omega = \int_0^\infty \frac{e^{-mx}\partial x}{1+x^2}$ zweimal nach m, und findet sogleich

$$\omega + \frac{\partial^2\omega}{\partial m^2} = \int_0^\infty e^{-mx}\partial x = \frac{1}{m}.$$

Diese Differentialgleichung löst er nach Lagrange's bekannter Methode auf, und erhält

$$\omega = \sin m\left(\varepsilon_1 + \int \frac{1}{m}\cos m\partial m\right) + \cos m\left(\varepsilon_2 - \int \frac{1}{m}\sin m\partial m\right).$$

Die Constante ε_2 ist leicht zu bestimmen; denn setzen wir $\int \frac{1}{m}\sin m\partial m = f(m)$, und machen $m=0$, so kommt $\int_0^\infty \frac{\partial x}{1+x^2} = \varepsilon_2 - f(0) = \frac{\pi}{2}$, $\varepsilon_2 = \frac{\pi}{2} + f(0)$, also

$$\omega = \sin m\left(\varepsilon_1 + \int \frac{1}{m}\cos m\partial m\right) + \cos m\left\{\frac{\pi}{2} - (f(m) - f(0))\right\},$$

oder

$$(g) \ldots \omega = \sin m\left(\varepsilon_1 + \int \frac{1}{m}\cos m\partial m\right) + \cos m\left(\frac{\pi}{2} - \int_0^m \frac{\sin x}{x}\partial x\right).$$

Die Constante ε_1 könnte man dadurch zu bestimmen versuchen, dass man $\frac{\partial\omega}{\partial m} = \int_0^\infty -\frac{xe^{-mx}\partial x}{1+x^2}$ entwickelte, und $m=0$ setzte; allein dann wird $\frac{\partial\omega}{\partial m}$ unendlich, und dieser Weg führt also nicht zum Ziel. Schlömilch hat sich daher a. a. O. einer höchst sinn-

*) In der zweiten dieser Gleichungen sind die Vorzeichen auf p. 327. und p. 328. unrichtig.

reichen, aber freilich auch sehr künstlichen Methode, welche ziemlich weitläufige Rechnungen erfordert, bedient; kürzer gelangt man so zu dem Werthe von ε_1. Man setze in der Gleichung (g) $m=\infty$; dann geht $\int_0^m \frac{\sin x}{x}\partial x$ über in $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\partial x = \frac{\pi}{2}$, und der Factor von $\cos m$ verschwindet. Ferner muss auch ω für $m=\infty$ verschwinden; denn es ist $\omega = M\int_0^\infty e^{-mx}\partial x = M.\frac{1}{m}$, wo M einer der Werthe der Function $\frac{1}{1+x^2}$ von $x=0$ bis $x=\infty$, also offenbar endlich ist. Daher ist nach (g) $0=\sin m\{\varepsilon_1+\varphi(m)\}\,(m=\infty)$, wo $\varphi(m)=\int\frac{1}{m}\cos m\partial m$, also $\varepsilon_1+\varphi(\infty)=0$, $\varepsilon_1=-\varphi(\infty)$,

$$\omega = \sin m\int_\infty^m \frac{\cos x}{x}\partial x + \cos m\left(\frac{\pi}{2} - \int_0^m \frac{\sin x}{x}\partial x\right).$$

Beachtet man nun, dass nach dem Vorhergehenden

$$\int_\infty^m \frac{\cos x}{x}\partial x = C + {}^1l.m^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{m^2}{1.2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{m^4}{1.2....4} - \text{etc.} = Ci(m),$$

so kommt

$$\int_0^\infty \frac{e^{-mx}\partial x}{1+x^2} = \sin m\,Ci(m) + \cos m\{\tfrac{1}{2}\pi - Si(m)\},$$

woraus man leicht das Integral $\int_0^\infty \frac{xe^{-bx}\partial x}{x^2+a^2}$ ableitet.

XXIII.

Ueber einige bestimmte Integrale, welche sich auf die beiden Integrale $\int_\infty^p \frac{e^{-x}\partial x}{x}$, $\int_\infty^p \frac{\cos x}{x}\partial x$ zurückführen lassen.

Von dem

Herrn Doctor F. Arndt,

Lehrer am Gymnasium zu Stralsund.

Das bestimmte Integral $\int_\infty^p \frac{e^{-x}\partial x}{x}$ hat bekanntlich einen endlichen Werth, wenn $p > 0$ ist, und kann durch die folgende Reihe dargestellt werden:

$$\int_\infty^p \frac{e^{-x}\partial x}{x} = C + lp - \frac{p}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{p^2}{1.2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{p^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

wo $C = 0{,}5772156$ ist. Für $e^{-x} = z$ verwandelt es sich in $\int_0^{e^{-p}} \frac{\partial z}{lz}$, weshalb man es den Integrallogarithmus genannt und durch $li(e^{-p})$ bezeichnet hat.

In einer frühern Abhandlung habe ich ferner gezeigt, dass das Integral $\int_\infty^p \frac{\cos x}{x}\partial x$ durch die folgende unendliche Reihe dargestellt werden kann:

$$\int_\infty^p \frac{\cos x}{x}\partial x = C + lp - \frac{1}{2}\cdot\frac{p^2}{1.2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{p^4}{1.2 \ldots 4} - \text{etc.},$$

wo es besonders merkwürdig ist, dass die Constante mit der des Integrallogarithmus übereinkommt. Man könnte diese Function wohl den Integralcosinus nennen, und Herr Prof. Schlömilch scheint diesen Gedanken gehabt zu haben, indem er es durch $Ci(p)$ bezeichnete.

Uebrigens habe ich a. a. O. gesagt: „Offenbar hat das Integral $\int_{\infty}^{p}\frac{\cos x}{x}\partial x$ einen bestimmten endlichen Werth, wenn $p>0$ ist“; dies liegt indessen doch nicht so auf der Hand, weshalb ich den strengen Beweis dafür hier nachhole.

Nach einer bekannten Reductionsformel ist

$$\int\frac{\cos x}{x}\partial x=\frac{1}{x}\int\cos x\partial x+\int\frac{\partial x}{x^2}\int\cos x\partial x=\frac{1}{x}\sin x+\int\frac{\sin x}{x^2}\partial x,$$

folglich

$$\int_{\infty}^{p}\frac{\cos x}{x}\partial x=\frac{1}{p}\sin p+\int_{\infty}^{p}\frac{\sin x}{x^2}\partial x.$$

Es kommt also der Beweis darauf hinaus, zu zeigen, dass $\int_{\infty}^{p}\frac{\sin x}{x^2}\partial x$ einen endlichen Werth hat, was auf folgende Weise erhellt. Nach einem bekannten Theorem ist

$$\int_{\infty}^{p}\frac{\sin x}{x^2}\partial x=M\int_{\infty}^{p}\frac{\partial x}{x^2}=-M\cdot\frac{1}{p},$$

indem M einer der Werthe von $\sin x$ ist, welche diese Function bei der stetigen Veränderung des x von ∞ bis p erlangt; da nun dieser Sinus niemals die Einheit übersteigt, so ist klar, dass $-M.\frac{1}{p}$ unter der Voraussetzung, dass p nicht verschwindet, endlich ist.

Es ist nun leicht einzusehen, dass das Integral $\int_{\infty}^{p}\frac{e^{-x}\partial x}{x^m}$ auf den Integrallogarithmus reducibel ist, wenn m eine positive ganze Zahl bedeutet, dass ferner die beiden Integrale $\int_{\infty}^{p}\frac{\cos x}{x^{2m+1}}\partial x$, $\int_{\infty}^{p}\frac{\sin x}{x^{2m}}\partial x$ auf $\int_{\infty}^{p}\frac{\cos x}{x}\partial x$ zurückgeführt werden können, auch ist diese Reduction mit gar keinen Schwierigkeiten verbunden; ich werde sie aber dennoch vornehmen, um daraus einige merkwürdige bestimmte Integrale herzuleiten, zu deren Werthen man auf anderem Wege vielleicht nur mit Schwierigkeit gelangen würde.

I. Von dem Integral $\int_{\infty}^{p}\frac{e^{-x}\partial x}{x^m}$.

Man hat $\int\frac{e^{-x}\partial x}{x^m}=e^{-x}\int\frac{\partial x}{x^m}+\int e^{-x}\partial x\int\frac{\partial x}{x^m}=$

$$-\frac{1}{m-1}\cdot\frac{1}{x^{m-1}}e^{-x}-\frac{1}{m-1}\int\frac{e^{-x}\partial x}{x^{m-1}},\text{ also}$$

$$(a)\;\ldots\ldots\int_{\infty}^{p}\frac{e^{-x}\partial x}{x^m}=-\frac{1}{m-1}\cdot\frac{e^{-p}}{p^{m-1}}-\frac{1}{m-1}\int_{\infty}^{p}\frac{e^{-x}\partial x}{x^{m-1}}.$$

Aus dieser Reductionsformel sieht man, dass das vorgelegte Integral auf $\int_\infty^p \frac{e^{-x}\partial x}{x}$ reducibel ist. Führt man die Rechnung aus, so erhält man:

$$(b) \int_\infty^p \frac{e^{-x}\partial x}{x^m} = e^{-p}\Big[-\frac{1}{(m-1)p^{m-1}} + \frac{1}{(m-2)(m-1)p^{m-2}} - \frac{1}{(m-3)(m-2)(m-1)p^{m-3}} + \text{etc.} \pm \frac{1}{1.2.3....(m-1)p}\Big] \pm \frac{1}{1.2.3....(m-1)} \cdot \int_\infty^p \frac{e^{-x}\partial x}{x}.$$

Hiernach ist die Theorie des Integrals linker Hand als abgeschlossen zu betrachten, wenn man Tafeln für den Integrallogarithmus hat; indessen führe ich diesen Gegenstand weiter aus, um neue Resultate daran zu knüpfen.

Denkt man sich e^{-p} in eine unendliche Reihe entwickelt und für den Integrallogarithmus ebenfalls die obige unendliche Reihe gesetzt, so sieht man auf der Stelle, dass das Integral durch eine unendliche Reihe von folgender Form dargestellt wird:

$$\int_\infty^p \frac{e^{-x}\partial x}{x^m} = \frac{a_{m-1}}{p^{m-1}} + \frac{a_{m-2}}{p^{m-2}} + ... + \frac{a_1}{p} + a_0 lp + b_1 p + b_2 p^2 + \text{etc.} + C_{m-1},$$

wo C_{m-1} eine numerische Constante ist. Unter Anwendung eines sehr bekannten Theorems über Binomialcoefficienten erhält man insbesondere:

$$(c) \begin{cases} \int_\infty^p \frac{e^{-x}\partial x}{x^m} = C_{m-1} + f(p), \text{ wo} \\ f(x) = -\frac{1}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{1}{(m-2)x^{m-2}} - \frac{1}{1.2} \cdot \frac{1}{(m-3)x^{m-3}} \\ \quad + \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{1}{(m-4)x^{m-4}} - \text{etc.} + (-1)^{m-1} \cdot \frac{1}{1.2.....(m-2)} \cdot \frac{1}{x} \\ \quad + \frac{(-1)^{m-1}}{1.2....(m-1)} \Big[lx - \frac{1}{m}x + \frac{1}{m(m+1)} \cdot \frac{1}{2}x^2 \\ \quad - \frac{1}{m(m+1)(m+2)} \cdot \frac{1}{3}x^3 + \text{etc.}\Big]. \end{cases}$$

Setzen wir andrerseits für e^{-x} die unendliche Reihe, und integriren

$$\int \frac{e^{-x}\partial x}{x^m} = \int \frac{\partial x}{x^m}\left(1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + ...\right)$$

von $x = \infty$ bis $x = p$, so erhält man $\int_\infty^p \frac{e^{-x}\partial x}{x^m} = f(p) - f(\infty)$, woraus folgt $-f(\infty) = C_{m-1}$; da nun die erste Horizontalreihe in $f(x)$ für $x = \infty$ verschwindet, so folgt, dass die Function

$$\psi(x)=\frac{(-1)^{m-1}}{1.2....(m-1)}\left[lx-\frac{1}{m}x+\frac{1}{m(m+1)}\cdot\tfrac{1}{2}x^2-\frac{1}{m(m+1)(m+2)}\cdot\tfrac{1}{3}x^3+...\right]$$

für $x=\infty$ einen bestimmten endlichen Werth $-C_{m-1}$ erhält, der vermöge der Gleichung (*b*) bestimmt werden kann. Mit Hülfe der Entwickelung von e^{-p} und $\int_\infty^p \frac{e^{-x}\partial x}{x}$ findet man nämlich leicht

$$(d) \;....\; C_{m-1}=\frac{(-1)^m}{1.2.3....(m-1)}\left(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+....+\frac{1}{m-1}-C\right).$$

Die Aufgabe ist nun, diese Zahl durch ein bestimmtes Integral auszudrücken.

Nach (*c*) ist:

$$\int_\infty^p \frac{e^{-x}\partial x}{x^m}+\frac{1}{(m-1)p^{m-1}}-\frac{1}{(m-2)p^{m-2}}+\frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{(m-3)p^{m-3}}-\text{etc.}$$
$$+\frac{(-1)^{m-2}}{1.2.....(m-2)}\cdot\frac{1}{p}+\frac{(-1)^{m-2}}{1.2....(m-1)}lp=C_{m-1}+\Sigma,$$

wo Σ die Form $\alpha_1 p+\alpha_2 p^2+\alpha_3 p^3+......$ hat, also für $p=0$ verschwindet. Nun lassen sich alle Glieder linker Hand, vom zweiten an, durch bestimmte, von ∞ bis p sich ausdehnende Integrale ausdrücken. Denn man hat offenbar

$$-\int_\infty^p \frac{\partial x}{x^m}=\frac{1}{(m-1)p^{m-1}},\quad \int_\infty^p \frac{\partial x}{x^{m-1}}=-\frac{1}{(m-2)p^{m-2}},\ \text{u. s. w.}$$
$$\int_\infty^p \frac{\partial x}{x(1+x)}=lp-l(1+p),$$

folglich nach dem Vorhergehenden:

$$\int_\infty^p \partial x\left[\frac{e^{-x}}{x^m}-\frac{1}{x^m}+\frac{1}{x^{m-1}}-\frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{x^{m-2}}+\text{etc.}+\frac{(-1)^{m-1}}{1.2...(m-2)}\cdot\frac{1}{x^2}\right]$$
$$+\frac{(-1)^m}{1.2....(m-1)}\left\{\int_\infty^p \frac{\partial x}{x(1+x)}+l(1+p)\right\}=C_{m-1}+\Sigma.$$

Lässt man sich in dieser Gleichung p der Null nähern, wobei Σ und $l(1+p)$ zum Verschwinden kommen, so erhält man die merkwürdige Gleichung:

$$(e)\ \int_\infty^0 \frac{\partial x}{x}\left[\frac{e^{-x}-1}{x^{m-1}}+\frac{1}{x^{m-2}}-\frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{x^{m-3}}+\frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{1}{x^{m-4}}-\text{etc.}\right.$$
$$\left.+\frac{(-1)^{m-1}}{1.2....(m-2)}\cdot\frac{1}{x}+\frac{(-1)^m}{1.2....(m-1))}\cdot\frac{1}{1+x}\right]=C_{m-1},$$

wo C_{m-1} eine numerische Constante bedeutet, die nach (*d*) berechnet wird.

Zu bemerken ist noch, dass diese Gleichung für $m=1$ eine Modification erleidet; es kommt nämlich, wenn man die obige Betrach-

tung für diesen Fall aufmerksam verfolgt, und beachtet, dass C_0 die Constante des Integrallogarithmus (c) ist:

$$(e') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \int_\infty^0 \frac{\partial x}{x}\left(e^{-x} - \frac{1}{1+x}\right) = C.$$

In dem Falle $m=2$ endlich kommt das Glied $\frac{(-1)^{m-1}}{1.2....(m-2)} \cdot \frac{1}{x}$ gar nicht vor; es ist vielmehr

$$(e'') \quad . \quad . \quad . \quad . \int_\infty^0 \frac{\partial x}{x}\left(\frac{e^{-x}-1}{x} + \frac{1}{1+x}\right) = C_1 = 1 - C.$$

Was die Werthe C_1, C_2, C_3, u. s. w. betrifft, so kann man aus (d) leicht eine Recursionsformel dafür entwickeln. Bezeichnet man nämlich die absoluten Werthe derselben durch kleine Buchstaben, so kommt leicht $c_m - \frac{1}{m} c_{m-1} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{1.2....m}$, oder

$$(f) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad c_m = \frac{1}{m}\left(c_{m-1} + \frac{1}{1.2....m}\right).$$

Da $C=0{,}577215664901$ ist, so findet man

$$\left\{\begin{array}{l} C=0{,}577215664901, \\ c_1=0{,}422784335099, \\ c_2=0{,}461392167549, \\ c_3=0{,}209352944735 \end{array}\right.$$

u. s. w.

Diese Zahlenreihe nimmt ziemlich schnell ab; übrigens ist mit Ausnahme von C die Zahl c_2 am grössten, von c_2 an aber findet fortwährende Abnahme statt, wovon man den Grund leicht einsehen wird.

II. Von dem Integral $\int_\infty^p \frac{\cos x}{x^{2m+1}} \partial x$.

Da $\int \frac{\cos x}{x^{2m+1}} \partial x = \cos x \int \frac{\partial x}{x^{2m+1}} + \int \sin x \partial x \int \frac{\partial x}{x^{2m+1}}$, so erhält man leicht

$$\int_\infty^p \frac{\cos x \partial x}{x^{2m+1}} = -\frac{1}{2m} \cdot \frac{\cos p}{p^{2m}} - \frac{1}{2m} \int_\infty^p \frac{\sin x}{x^{2m}} \partial x.$$

Man erhält ferner

$$\int_\infty^p \frac{\sin x}{x^{2m}} \partial x = -\frac{1}{2m-1} \cdot \frac{\sin p}{p^{2m-1}} + \frac{1}{2m-1} \int_\infty^p \frac{\cos x}{x^{2m-1}} \partial x.$$

Die Substitution dieses letzten Ausdrucks in den vorhergehenden giebt die Reductionsformel

$$\int_\infty^p \frac{\cos x}{x^{2m+1}}\partial x = -\frac{1}{2m}\cdot\frac{\cos p}{p^{2m}} + \frac{1}{(2m-1)2m}\cdot\frac{\sin p}{p^{2m-1}} - \frac{1}{(2m-1)2m}\int_\infty^p \frac{\cos x}{x^{2m-1}}\partial x$$

und durch successive Anwendung derselben kommt

$$(\alpha)\ \ldots\ldots \int_\infty^p \frac{\cos x}{x^{2m+1}}\partial x = -\frac{1}{2m}\cdot\frac{\cos p}{p^{2m}} + \frac{1}{(2m-1)2m}\cdot\frac{\sin p}{p^{2m-1}}$$

$$+\frac{1}{(2m-2)(2m-1)2m}\cdot\frac{\cos p}{p^{2m-2}} - \frac{1}{(2m-3)(2m-2)(2m-1)2m}\cdot\frac{\sin p}{p^{2m-3}}$$

u. s. w.

$$+\frac{(-1)^m}{2.3.4\ldots.2m}\cdot\frac{\cos p}{p^2} + \frac{(-1)^{m+1}}{1.2.3\ldots.2m}\cdot\frac{\sin p}{p}$$

$$+\frac{(-1)^{m+2}}{1.2.3\ldots.2m}\int_\infty^p \frac{\cos x}{x}\partial x.$$

Durch die Entwickelung von $\cos p$, $\sin p$ und $\int_\infty^p \frac{\cos x}{x}\partial x$ findet man das Integral linker Hand von folgender Form:

$$\int_\infty^p \frac{\cos x}{x^{2m+1}}\partial x = C'_{2m} + \frac{a_{2m}}{p^{2m}} + \frac{a_{2m-2}}{p^{2m-2}} + \frac{a_{2m-4}}{p^{2m-4}} + \ldots. + \frac{a_2}{p^2}$$

$$+ a_0 lp + b_2 p^2 + b_4 p^4 + \text{etc.},$$

und zwar

$$(\beta)\ \ldots\ C'_{2m} = \frac{(-1)^{m+1}}{1.2.3\ldots.2m}\left(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots.+\frac{1}{2m}-C\right);$$

die übrigen Coefficienten findet man einfacher durch die unbestimmte Integration des Differentials

$$\frac{\partial x}{x^{2m+1}}\cos x = \frac{\partial x}{x^{2m+1}}\left(1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\text{etc.}\right);$$

auf diese Weise erhält man nämlich sogleich:

$$(\gamma)\ \ldots. \int_\infty^p \frac{\cos x}{x^{2m+1}}\partial x = C'_{2m} - \frac{1}{2mp^{2m}} + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{(2m-2)p^{2m-2}}$$

$$-\frac{1}{1.2\ldots4}\cdot\frac{1}{(2m-4)p^{2m-4}} + \text{etc.} + \frac{(-1)^m}{1.2\ldots.(2m-2)}\cdot\frac{1}{2p^2}$$

$$+\frac{(-1)^m}{1.2\ldots.2m}lp + \frac{(-1)^{m+1}}{1.2\ldots.(2m+2)}\cdot\tfrac{1}{2}p^2 + \frac{(-1)^{m+2}}{1.2\ldots.(2m+4)}\cdot\tfrac{1}{4}p^4 + \text{in inf.}$$

Drückt man nun, wie vorher, die Glieder $-\frac{1}{2mp^{2m}}$, $\frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{(2m-2)p^{2m-2}}$, u. s. w., $\frac{(-1)^m}{1.2\ldots.2m}lp$ durch bestimmte Integrale aus, die sich von

x bis p ausdehnen, bringt dieselben auf die linke Seite, und lässt dann p sich der Null nähern, so erhält man:

$$(\delta)\int_\infty^0 \frac{\partial x}{x}\Big[\frac{\cos x-1}{x^{2m}}+\frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{x^{2m-2}}-\frac{1}{1.2.3.4}\cdot\frac{1}{x^{2m-4}}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{(-1)^{m-1}}{1.2\ldots(2m-2)}\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{(-1)^m}{1.2\ldots2m}\cdot\frac{1}{1+x}\Big]=C'_{2m}.$$

Für $m=0$ hat man besonders zu beachten:

$$(\delta')\ \ldots\ldots\ldots \int_\infty^0 \frac{\partial x}{x}(\cos x-\frac{1}{1+x})=C,$$

und für $m=1$

$$(\delta'')\ \ldots\ldots \int_\infty^0 \frac{\partial x}{x}\Big(\frac{\cos x-1}{x^2}+\frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{1+x}\Big)=C'_2.$$

Die absoluten Werthe der Grössen C'_{2m} sind, wie aus (β) erhellt, mit den Grössen c_{2m} identisch.

III. Von dem Integral $\int_\infty^p \frac{\sin x}{x^{2m}}\partial x$.

Da die Betrachtungen in Bezug auf dieses Integral den vorhergehenden ganz analog sind, so darf ich mich jetzt kurz fassen.

Durch die Reductionsformel $\int_\infty^p \frac{\sin x}{x^{2m}}\partial x=-\frac{1}{2m-1}\cdot\frac{\sin p}{p^{2m-1}}$ $-\frac{1}{(2m-2)(2m-1)}\cdot\frac{\cos p}{p^{2m-2}}-\frac{1}{(2m-2)(2m-1)}\int_\infty^p\frac{\sin x}{x^{2m-2}}\partial x$ gelangt man zu

$$(\mathrm{a})\int_\infty^p \frac{\sin x}{x^{2m}}\partial x=-\frac{\sin p}{(2m-1)p^{2m-1}}-\frac{\cos p}{(2m-2)(2m-1)p^{2m-2}}$$
$$+\frac{\sin p}{(2m-3)(2m-2)(2m-1)p^{2m-3}}+\frac{\cos p}{(2m-4)(2m-3)\ldots(2m-1)p^{2m-4}}$$

u. s. w.

$$+\frac{(-1)^m}{1.2.3\ldots(2m-1)}\cdot\frac{\sin p}{p}+\frac{(-1)^{m+1}}{1.2.3\ldots(2m-1)}\int_\infty^p\frac{\cos x}{x}\partial x;$$

daraus ferner

$$(\mathrm{b})\ \ldots\ldots \int_\infty^p \frac{\sin x}{x^{2m}}\partial x=C''_{2m-1}-\frac{1}{(2m-2)p^{2m-2}}$$
$$+\frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{1}{(2m-4)p^{2m-4}}-\ldots+\frac{(-1)^{m-1}}{1.2\ldots(2m-3)}\cdot\frac{1}{2p^2}+\frac{(-1)^{m-1}}{1.2\ldots(2m-1)}lp$$
$$+\frac{(-1)^m}{1.2\ldots(2m+1)}\cdot\tfrac{1}{2}p^2+\frac{(-1)^{m+1}}{1.2\ldots(2m+3)}\cdot\tfrac{1}{3}p^3+\text{in infinit.},$$

wo

$$(\mathfrak{c})\quad C''_{2m-1}=\frac{(-1)^m}{1.2.3....(2m-1)}\left(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+....+\frac{1}{2m-1}-C\right).$$

Endlich kommt

$$(\mathfrak{b})\ ....\int_\infty^0\frac{\partial x}{x}\left[\frac{\sin x}{x^{2m-1}}-\frac{1}{x^{2m-2}}+\frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{1}{x^{2m-4}}-....\right.$$
$$\left.+\frac{(-1)^{m-1}}{1.2....(2m-3)}\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{(-1)^m}{1.2....(2m-1)}\cdot\frac{1}{1+x}\right]=C''_{2m-1},$$

und insbesondere:

$$(\mathfrak{b}')\ ....\quad\int_\infty^0\frac{\partial x}{x}\left(\frac{\sin x}{x}-\frac{1}{1+x}\right)=C_1''=-(1-C)$$
$$=-0{,}422784335099.$$

XXIV.

Ueber eine gewisse Klasse bestimmter Integrale, bei welchen die Function unter dem Integralzeichen für einen Werth der Veränderlichen zwischen den Integrationsgrenzen unendlich wird.

Von dem

Herrn Doctor F. Arndt,

Lehrer am Gymnasium zu Stralsund.

Im VII. Bande des Archivs p. 270 ff. hat sich Herr Professor Schlömilch mit den bestimmten Integralen: $\int_0^\infty\frac{\cos bx\,\partial x}{x^2-a^2}$, $\int_0^\infty\frac{x\sin bx\,\partial x}{x^2-a^2}$ beschäftigt, und folgende Werthe gefunden:

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx\,\partial x}{x^2-a^2}=-\frac{\pi}{2a}\sin ab\,,\quad \int_0^\infty \frac{x\sin bx\,\partial x}{x^2-a^2}=\frac{\pi}{2}\cos ab$$

$$(a>0,\; b>0).$$

Im Crelle'schen Journal. Band 33. hat dieser ausgezeichnete Mathematiker denselben Gegenstand von Neuem aufgenommen und durch eine zwar weitläufige, aber sehr sinnreiche Methode auch noch die Werthe von $\int_0^\infty \frac{x\cos bx\,\partial x}{x^2-a^2}$ und $\int_0^\infty \frac{\sin bx\,\partial x}{x^2-a^2}$ ermittelt. Es finden sich dort die Formeln

$$\int_0^\infty \frac{x\cos bx\,\partial x}{x^2-a^2}=-\cos ab\,Ci(ab)-\sin ab\,Si(ab),$$

$$\int_0^\infty \frac{a\sin bx\,\partial x}{x^2-a^2}=-\sin ab\,Ci(ab)+\cos ab\,Si(ab) \quad ^{*}).$$

Ich werde diese vier Integrale nach einer von der Schlömilchschen ganz verschiedenen Methode von Neuem besonders untersuchen, und darthun, dass die so eben angegebenen Werthe nur unter einer ganz besondern Voraussetzung richtig sind. Zum besseren Verständniss des Folgenden muss ich einige Bemerkungen vorausschicken.

Alle vier Integrale sind von der Art, dass die Function unter dem Integralzeichen für $x=a$ unstetig wird, und eben deshalb ist bei der Werthbestimmung derselben ganz besondere Vorsicht nöthig.

Betrachten wir überhaupt das Integral $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\partial x$. Wenn die Function $f(x)$ für alle Werthe von x, zwischen welchen man integrirt, endlich und stetig bleibt, so ist bekanntlich

$$(a)\quad \ldots\ldots \int_{x_0}^{x_1} f(x)\partial x=\psi(x_1)-\psi(x_0),$$

wenn $\psi(x)$ der allgemeine Ausdruck des unbestimmten Integrals $\int f(x)\partial x$ ist. Wird dagegen die Function $f(x)$ für einen Mittelwerth zwischen x_0 und x_1, z. B. für $x=a$, unstetig, so darf man die Formel (a), wie bekannt, im Allgemeinen nicht anwenden; vielmehr giebt sie dann häufig fehlerhafte Resultate. In diesem letztern Falle ist eine Theilung des Integrals nöthig; um nämlich seinen Werth zu finden, suche man die Grenze, welcher sich die Summe

$$\int_{x_0}^{a-u} f(x)\partial x+\int_{a+v}^{x_1} f(x)\partial x$$

nähert, indem die positiven Grössen u und v beide gegen Null convergiren und sonst ganz unabhängig von einander sind Es sei z. B.

*) Die Bezeichnung ist bei Schlömilch etwas anders.

$$\int_{-m}^{n} \frac{\partial x}{x}$$

zu entwickeln, wo m, n positiv sind und für $x=0$ Unterbrechung der Stetigkeit stattfindet. Da allgemein $\int \frac{\partial x}{x} = \frac{1}{2} l.(x^2)$, so würde die Anwendung der Formel (a) geben:

$$\int_{-m}^{n} \frac{\partial x}{x} = \tfrac{1}{2} l.(n^2) - \tfrac{1}{2} l.(m^2) = \tfrac{1}{2} l.\left(\frac{n}{m}\right)^2 = l\frac{n}{m},$$

da n; m positiv sind. Allein dies Resultat ist unrichtig; denn zerlegt man das Integral, so kommt

$$\int_{-m}^{n} \frac{\partial x}{x} = \int_{-m}^{-u} \frac{\partial x}{x} + \int_{v}^{n} \frac{\partial x}{x},$$

für $u=0$, $v=0$, also offenbar

$$\int_{-m}^{n} \frac{\partial x}{x} = l\frac{n}{m} - l\frac{v}{u}.$$

Hier bleibt nun das Verhältniss $\frac{v}{u}$, während u, v sich beide der Null nähern, völlig unbestimmt, da die Bedingung der Aufgabe gar keine gegenseitige Abhängigkeit zwischen u und v feststellt; somit ist auch der Werth von $\int_{-m}^{n} \frac{\partial x}{x}$ unbestimmt *). Es verdient besonders hervorgehoben zu werden, dass man nicht etwa $u=v$ setzen darf, also auch nicht

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\partial x = \int_{x_0}^{a-u} f(x)\,\partial x + \int_{a+u}^{x_1} f(x)\,\partial x, \text{ für } u=0.$$

Unter dieser Voraussetzung würde $\log\frac{v}{u}$ offenbar verschwinden und

---

*) Minding nimmt in seiner vortrefflichen Differential- und Integralrechnung. Berlin. 1836. auf den hier betrachteten Ausnahmefall ganz besonders Rücksicht, und die obige Definition des bestimmten Integrals $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\partial x$ für den Fall, dass für $x=a$ Unterbrechung der Stetigkeit statt findet, verdanke ich ihm.

Merkwürdig ist, dass er unter Anwendung der Formel (a) findet: $\int_{-m}^{n} \frac{\partial x}{x} = l\left(\frac{n}{-m}\right)$, also einen imaginären Werth, der die Unzulässigkeit der Formel (a) für den vorliegenden Fall um so mehr ins Licht setzen soll. Minding kommt zu diesem Resultat, indem er das unbestimmte Integral $\int \frac{\partial x}{x} = lx$ setzt, was nur für positive x richtig ist, während für negative $\int \frac{\partial x}{x} = \frac{1}{2} l(x^2)$, wie schon hinlänglich bekannt ist.

der Werth $l\frac{n}{m}$ richtig sein. Dass im Allgemeinen nicht $u=v$ genommen werden darf, erhellet leicht, wenn man die bestimmten Integrale sich durch Flächenräume dargestellt denkt.

Nehmen wir nun bei den obigen vier Integralen die erwähnte Theilung vor, so werden die folgenden Betrachtungen uns zu dem Resultate führen, dass diese Integrale unbestimmt sind, und nur unter der Voraussetzung $u=v$ die von Schlömilch a. a. O. gegebenen Werthe erhalten. Schlömilch hat in seinen Entwickelungen auf die Unterbrechung der Stetigkeit nicht Rücksicht genommen, weshalb er zu obigen bestimmten Werthen geführt wurde; er setzt unter Anderm $\int_0^\infty \frac{\partial x}{x^2-a^2}=0$, was nicht richtig ist. Denn man hat durch unbestimmte Integration

$$2a\int\frac{\partial x}{x^2-a^2}=\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)\partial x=\tfrac{1}{2}l.\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^2, \text{ also}$$

$$2a\int_0^{a-u}\frac{\partial x}{x^2-a^2}+2a\int_{a+v}^\infty\frac{\partial x}{x^2-a^2}=\tfrac{1}{2}l.\left[\frac{u(2a+v)}{v(2a-u)}\right]^2.$$

Nähern sich nun u und v der Null, so convergirt $\frac{2a+v}{2a-u}$ gegen 1, allein das Verhältniss $\frac{u}{v}$ bleibt unbestimmt, und es ist also auch $\int_0^\infty\frac{\partial x}{x^2-a^2}$ unbestimmt, und nur $=0$, wenn man

$$\int_0^\infty\frac{\partial x}{x^2-a^2}=\int_0^{a-u}\frac{\partial x}{x^2-a^2}+\int_{a+u}^\infty\frac{\partial x}{x^2-a^2}$$

setzt, und die Grenze für $u=0$ bestimmt.

I.

Beschäftigen wir uns nun zuerst mit dem Integral $\int_0^\infty\frac{\cos bx\partial x}{x^2-a^2}=\omega$, wo wir offenbar a und b als positiv betrachten dürfen; auch darf a nicht verschwinden, da ω sonst unendlich wird.

Da $\frac{2a}{x^2-a^2}=\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}$, so kommt die Aufgabe auf die Entwickelung von

$$\omega_1=\int_0^\infty\frac{\cos bx\,\partial x}{x+a} \text{ und } \omega_2=\int\frac{\cos bx\,\partial x}{x-a}$$

zurück.

Was das erste Integral betrifft, so habe ich seinen Werth in einer frühern Abhandlung schon entwickelt; ich habe nämlich gefunden:

$$(1)\ldots\int_0^\infty \frac{\cos bx\,\partial x}{x+a} = -\cos ab\, Ci(ab) + \sin ab\,\{\tfrac{1}{2}\pi - Si(ab)\},$$

wo $Ci(ab) = \int_\infty^{ab} \frac{\cos y}{y}\partial y = C + \tfrac{1}{2}l.(ab)^2 - \tfrac{1}{2}.\frac{(ab)^2}{1.2} + \tfrac{1}{4}.\frac{(ab)^4}{1.2.3.4} - \text{etc}.$

$$Si(ab) = \int_0^{ab} \frac{\sin y}{y}\partial y = ab - \tfrac{1}{3}.\frac{(ab)^3}{1.2.3} + \tfrac{1}{5}.\frac{(ab)^5}{1.2\ldots5} - \text{etc}.,$$

C (die Constante des Integrallogarithmus) $= 0{,}5772156$.

Um nun ferner ω_2 zu entwickeln, bei welchem für $x=a$ Unterbrechung der Stetigkeit statt findet, müssen wir

$$\omega_2 = \int_0^{a-u} \frac{\cos bx\,\partial x}{x-a} + \int_{a+v}^\infty \frac{\cos bx\,\partial x}{x-a}$$

setzen, und u, v sich der Null nähern lassen. Es sei also

$$\Theta = \int_0^{a-u} \frac{\cos bx\,\partial x}{x-a},\quad \Theta_1 = \int_{a+v}^\infty \frac{\cos bx\,\partial x}{x-a}.$$

Für $x-a=-y$ wird

$$\Theta = \int_a^u \frac{\cos b(a-y)\,\partial y}{y} = \cos ab\int_a^u \frac{\cos by}{y}\partial y + \sin ab\int_a^u \frac{\sin by}{y}\partial y.$$

Man hat nun

$$\int_a^u \frac{\cos by}{y}\partial y = \int_\infty^u \frac{\cos by}{y}\partial y - \int_\infty^a \frac{\cos by}{y}\partial y = Ci(ub) - Ci(ab),$$

$$\int_a^u \frac{\sin by}{y}\partial y = \int_0^u \frac{\sin by}{y}\partial y - \int_0^a \frac{\sin by}{y}\partial y = Si(ub) - Si(ab);$$

also durch Substitution:

$$(2)\ \ldots\ \Theta = \int_0^{a-u} \frac{\cos bx\,\partial x}{x-a} = \cos ab\,\{Ci(ub) - Ci(ab)\}$$
$$+ \sin ab\,\{Si(ub) - Si(ab)\}.$$

Auf der andern Seite hat man, wenn $x-a=y$ gesetzt wird,

$$\Theta_1 = \int_v^\infty \frac{\cos b(y+a)\,\partial y}{y} = \cos ab\int_v^\infty \frac{\cos by}{y}\partial y - \sin ab\int_v^\infty \frac{\sin by}{y}\partial y;$$

aber

$$\int_v^\infty \frac{\cos by}{y}\partial y = -\int_\infty^v \frac{\cos by}{y}\partial y = -Ci(vb),$$

$$\int_v^\infty \frac{\sin by}{y}\partial y = \int_0^\infty \frac{\sin by}{y}\partial y - \int_0^v \frac{\sin by}{y}\partial y = \tfrac{1}{2}\pi - Si(vb);$$

also durch Substitution:

$$(3)\ldots.\Theta_1=\int_{a+v}^{\infty}\frac{\cos bx\,\partial x}{x-a}=-\cos ab\,Ci(vb)-\sin ab\,\{\tfrac{1}{2}\pi-Si(vb)\}.$$

Durch Addition von (2) und (3) kommt

$$\int_0^{a-u}\frac{\cos bx\,\partial x}{x-a}+\int_{a+v}^{\infty}\frac{\cos bx\,\partial x}{x-a}=\cos ab\,[Ci(ub)-Ci(vb)-Ci(ab)]$$
$$+\sin ab\,[Si(ub)+Si(vb)-Si(ab)-\tfrac{1}{2}\pi].$$

Nähern sich nun u und v der Null, so verschwinden offenbar $Si(ub)$, $Si(vb)$; dagegen wird $Ci(ub)-Ci(vb)=\frac{1}{2}l.\left(\frac{u}{v}\right)^2$, oder, wegen $u>0$, $v>0$, schlechthin $=l\left(\frac{u}{v}\right)$, wobei das Verhältniss $\frac{u}{v}$ völlig unbestimmt bleibt. Es ist folglich

$$(4)\ \ldots.\ \ \varpi_2=\int_0^{\infty}\frac{\cos bx\,\partial x}{x-a}=\cos ab\,\{l\left(\frac{u}{v}\right)-Ci(ab)\}$$
$$-\sin ab\,\{\tfrac{1}{2}\pi+Si(ab)\}.$$

Da nun nach dem Obigen $2a\int_0^{\infty}\frac{\cos bx\,\partial x}{x^2-a^2}=\int_0^{\infty}\frac{\cos bx\,\partial x}{x-a}-\int_0^{\infty}\frac{\cos bx\,\partial x}{x+a}$, so hat man nach den Gleichungen (1) und (4)

$$(5)\ \ldots\ldots\ \ 2a\int_0^{\infty}\frac{\cos bx\,\partial x}{x^2-a^2}=\cos ab\,l\left(\frac{u}{v}\right)-\pi\sin ab.$$

Addirt man die Ausdrücke (1) und (4) und beachtet, dass $\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x-a}=\frac{2x}{x^2-a^2}$, so findet man auf der Stelle

$$(6)\ldots.\int_0^{\infty}\frac{x\cos bx\,\partial x}{x^2-a^2}=\cos ab\,\{\tfrac{1}{2}l\left(\frac{u}{v}\right)-Ci(ab)\}-\sin ab\,Si(ab).$$

2.

Auf eine ganz ähnliche Art wie vorher findet man die Formeln:

$$(1')\ldots\ldots\int_0^{a-u}\frac{\sin bx\,\partial x}{x-a}=\sin ab\,\{Ci(ub)-Ci(ab)\}$$
$$-\cos ab\,\{Si(ub)-Si(ab)\},$$

$$(2')\ldots\int_{a+v}^{\infty}\frac{\sin bx\,\partial x}{x-a}=-\sin ab\,Ci(vb)+\cos ab\,\{\tfrac{1}{2}\pi-Si(vb)\};$$

durch Addition:

$$\int_0^{a-u}\frac{\sin bx\,\partial x}{x-a}+\int_{a+v}^{\infty}\frac{\sin bx\,\partial x}{x-a}=\sin ab\,[Ci(ub)-Ci(vb)-Ci(ab)]$$
$$-\cos ab\,[Si(ub)+Si(vb)-Si(ab)-\tfrac{1}{2}\pi],$$

und für $u=0$, $v=0$:

$$(3')\ldots\int_0^{\infty}\frac{\sin bx\,\partial x}{x-a}=\sin ab\left\{l\left(\frac{u}{v}\right)-Ci(ab)\right\}+\cos ab\left\{\tfrac{1}{2}\pi+Si(ab)\right\}.$$

In einer frühern Abhandlung habe ich ferner entwickelt:

$$(4')\ \ldots\int_0^{\infty}\frac{\sin bx\,\partial x}{x+a}=\sin ab\,Ci(ab)+\cos ab\left\{\tfrac{1}{2}\pi-Si(ab)\right\}.$$

Durch Subtraction und Addition der Formeln (3′) und (4′) erhält man leicht:

$$(5')\int_0^{\infty}\frac{a\sin bx\,\partial x}{x^2-a^2}=\sin ab\left\{\tfrac{1}{2}\,l\left(\frac{u}{v}\right)-Ci(ab)\right\}+\cos ab\,Si(ab),$$

$$(6')\ \ldots\ \int_0^{\infty}\frac{x\sin bx\,\partial x}{x^2-a^2}=\tfrac{1}{2}\,l\left(\frac{u}{v}\right)\sin ab+\tfrac{1}{2}\pi\cos ab.$$

Für $\frac{u}{v}=1$ gehen die Formeln (5), (6), (5′), (6′) in die von Schlömilch im Archiv und im Crelle'schen Journal angegebenen über, was ich bereits oben angedeutet habe.

Schliesslich will ich bemerken, dass die beiden Integrale

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-bx}\partial x}{x^2-a^2},\quad\int_0^{\infty}\frac{xe^{-bx}\partial x}{x^2-a^2},$$

mit denen Schlömilch sich im Crelle'schen Journal ebenfalls beschäftigt hat, unbestimmt wie die vorhergehenden sind. Ich werde sie in einem nächsten Aufsatze einer besondern Untersuchung unterwerfen.

XXV.

Ueber die Integrale $\int_0^\infty \frac{e^{-bx}\partial x}{x^2-a^2}$ und $\int_0^\infty \frac{xe^{-bx}\partial x}{x^2-a^2}$.

Von dem

Herrn Doctor F. Arndt,

Lehrer am Gymnasium zu Stralsund.

Da bei beiden Integralen Unterbrechung der Stetigkeit für $x=a$ eintritt, so müssen wir jedes derselben in zwei andere zerlegen, deren eines sich von $x=0$ bis $x=a-u$, das andere von $x=a+v$ bis $x=\infty$ erstreckt, und die Grenze der Summe für $u=0$, $v=0$ ermitteln. Da ferner $\frac{2a}{x^2-a^2}=\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}$, $\frac{2x}{x^2-a^2}=\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+a}$, so sieht man, dass es hier nur auf die Entwickelung folgender drei Integrale ankommt:

$$\Theta=\int_0^{a-u}\frac{e^{-bx}\partial x}{x-a},\quad \Theta_1=\int_{a+v}^\infty\frac{e^{-bx}\partial x}{x-a},\quad \omega=\int_0^\infty\frac{e^{-bx}\partial x}{x+a}.$$

Was das erste betrifft, so erhält man, $x-a=-y$ gesetzt, $\Theta=\int_a^u\frac{e^{-b(a-y)}\partial y}{y}=e^{-ab}\int_a^u\frac{e^{by}\partial y}{y}=e^{-ab}\int_{ab}^{ub}\frac{e^y\partial y}{y}$. Dies Integral ist nur durch Reihen entwickelbar; am einfachsten setzt man, um eine solche Reihe zu erhalten, für e^y die unendliche Reihe $1+y+\frac{y^2}{1.2}+\frac{y^3}{1.2.3}+$ etc., und integrirt zuerst unbestimmt; wird zur Abkürzung

$$\psi(y)=\tfrac{1}{2}l.(y^2)+\frac{y}{1}+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{y^2}{1.2}+\tfrac{1}{3}\cdot\frac{y^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

gesetzt, so kommt $\int_{ab}^{ub}\frac{e^y\partial y}{y}=\psi(ub)-\psi(ab)$, also

$$(1) \quad \ldots\ldots \Theta = \int_0^{a-u} \frac{e^{-bx}\partial x}{x-a} = e^{-ab}\{\psi(ub) - \psi(ab)\}.$$

Uebrigens sieht man aus dieser Gleichung, dass das Integral $\int_0^a \frac{e^{-bx}\partial x}{x-a} = -\infty$ wird.

Man hat ferner, $x-a=y$ gesetzt,

$$\Theta_1 = \int_v^\infty \frac{e^{-b(a+y)}\partial y}{y} = e^{-ab}\int_v^\infty \frac{e^{-by}\partial y}{y} = -e^{-ab}\int_\infty^{bv} \frac{e^{-y}\partial y}{y}.$$

Dies Integral ist bekanntlich der Integrallogarithmus von e^{-bv}, und man hat

$$\int_\infty^{bv} \frac{e^{-y}\partial y}{y} = li(e^{-bv}) = C + \tfrac{1}{2}l.(bv)^2 - \frac{bv}{1} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{(bv)^2}{1.2} - \tfrac{1}{3}\cdot\frac{(bv)^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

wo $C=0{,}5772156$;

demnach ist

$$(2) \quad \ldots\ldots \Theta_1 = \int_{a+v}^\infty \frac{e^{-bx}\partial x}{x-a} = -e^{-ab}\, li(e^{-bv});$$

woraus man sieht, dass das Integral $\int_a^\infty \frac{e^{-bx}\partial x}{x-a} = +\infty$ wird.

Die Addition der beiden Ausdrücke (1) und (2) giebt

$$\int_0^{a-u} \frac{e^{-bx}\partial x}{x-a} + \int_{a+v}^\infty \frac{e^{-bx}\partial x}{x-a} = e^{-ab}[\psi(ub) - \psi(ab) - li(e^{-bv})];$$

für $u=0$, $v=0$ wird offenbar $\psi(ub) - li(e^{-bv}) = \tfrac{1}{2}l.\left(\frac{u}{v}\right)^2 - C$, wo das Verhältniss $\frac{u}{v}$ unbestimmt bleibt; folglich ist

$$(3) \quad \ldots \int_0^\infty \frac{e^{-bx}\partial x}{x-a} = e^{-ab}[\tfrac{1}{2}l.\left(\frac{u}{v}\right)^2 - C - \psi(ab)].$$

Endlich findet man für $x+a=y$:

$$\omega = \int_a^\infty \frac{e^{-b(y-a)}\partial y}{y} = e^{ab}\int_a^\infty \frac{e^{-by}\partial y}{y} = -e^{ab}\int_\infty^{ab} \frac{e^{-y}\partial y}{y},$$

also

$$(4) \quad \ldots\ldots\ldots \int_0^\infty \frac{e^{-bx}\partial x}{x+a} = -e^{ab}\, li.(e^{-ab}).$$

Subtrahirt man nun (4) von (3), so entsteht:

$$(5) \ldots 2a\int_0^\infty \frac{e^{-bx}\partial x}{x^2-a^2} = e^{-ab}[\tfrac{1}{2}l.\left(\frac{u}{v}\right)^2 - C - \psi(ab)] + e^{ab}\, li(e^{-ab});$$

die Addition von (3) und (4) giebt dagegen

$$(6) \ldots 2\int_0^\infty \frac{xe^{-bx}\partial x}{x^2-a^2} = e^{-ab}\left[\tfrac{1}{2}l.\left(\frac{u}{v}\right)^2 - C - \psi(ab)\right] - e^{ab}\,li(e^{-ab}).$$

Setzt man jetzt mit Schlömilch

$$C + \tfrac{1}{2}l.(\omega^2) + \frac{\omega}{1} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\omega^2}{1.2} + \tfrac{1}{3}\cdot\frac{\omega^3}{1.2.3} + \text{etc.} = Ei(\omega),$$

so ist offenbar $C + \psi(ab) = Ei(ab)$, $li(e^{-ab}) = Ei(-ab)$, und die Gleichungen (5), (6) nehmen folgende Gestalt an:

$$(7) \ldots\ldots 2a\int_0^\infty \frac{e^{-bx}\partial x}{x^2-a^2} = e^{-ab}\left[\tfrac{1}{2}l.\left(\frac{u}{v}\right)^2 - Ei(ab)\right] + e^{ab}Ei(-ab),$$

$$(8) \ldots\ldots 2\int_0^\infty \frac{xe^{-bx}\partial x}{x^2-a^2} = e^{-ab}\left[\tfrac{1}{2}l.\left(\frac{u}{v}\right)^2 - Ei(ab)\right] - e^{ab}Ei(-ab).$$

Die Integrale sind folglich beide unbestimmt; setzt man das Verhältniss $\frac{u}{v} = 1$, so gehen die Ausdrücke in diejenigen über, welche Schlömilch im 33sten Bande des Crelle'schen Journals p. 328. gegeben hat.

Schliesslich verdient noch Folgendes bemerkt zu werden.

Da

$$Ei(-ab) = C + \tfrac{1}{2}l.(ab)^2 - \frac{ab}{1} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{(ab)^2}{1.2} - \text{etc.} = li.(e^{-ab}),$$

und diese Function in $Ei(ab)$ übergeht, wenn man ab negativ setzt, so könnte man sich veranlasst sehen, $Ei(ab) = li(e^{ab})$ zu setzen; allein dies ist fehlerhaft, indem der Integrallogarithmus einer die Einheit übersteigenden Grösse wiederum unbestimmt ist.

Um dies darzuthun, sei das Integral $\int_\infty^{-p} \frac{e^{-x}\partial x}{x}$ zu entwickeln, wo p positiv ist. Da für $x=0$ Unterbrechung der Stetigkeit statt findet, so setze man

$$\int_\infty^{-p} \frac{e^{-x}\partial x}{x} = \int_\infty^{u} \frac{e^{-x}\partial x}{x} + \int_{-v}^{-p} \frac{e^{-x}\partial x}{x},$$

wo u, v beliebig kleine positive Grössen sind. Man hat dann

$$\int_\infty^{u} \frac{e^{-x}\partial x}{x} = C + \tfrac{1}{2}l.(u^2) - \frac{u}{1} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{u^2}{1.2} - \text{etc.},$$

$$\int_{-v}^{-p} \frac{e^{-x}\partial x}{x} = \tfrac{1}{2}l.(p^2) + \frac{p}{1} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{p^2}{1.2} + \text{etc.}$$

$$- \tfrac{1}{2}l.(v^2) - \frac{v}{1} - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{v^2}{1.2} - \text{etc.},$$

folglich

$$\int_{\infty}^{u}\frac{e^{-x}\partial x}{x}+\int_{-v}^{-p}\frac{e^{-x}\partial x}{x}=C+\tfrac{1}{2}l.(p^2)+\frac{p}{1}+\tfrac{1}{2}.\frac{p^2}{1.2}+\text{etc.}$$
$$+\tfrac{1}{2}l.\left(\frac{u}{v}\right)^2+\Sigma,$$

wo Σ für $u=0$, $v=0$ verschwindet. Daher hat man

$$\int_{\infty}^{-p}\frac{e^{-x}\partial x}{x}=\tfrac{1}{2}l.\left(\frac{u}{v}\right)^2+C+\tfrac{1}{2}l.(p^2)+\frac{p}{1}+\tfrac{1}{2}.\frac{p^2}{1.2}+\text{etc.},$$

oder auch, wenn man $e^{-x}=y$ setzt:

$$\int_{0}^{e^p}\frac{\partial y}{ly}=\tfrac{1}{2}l.\left(\frac{u}{v}\right)^2+C+\tfrac{1}{2}l.(p^2)+\frac{p}{1}+\tfrac{1}{2}.\frac{p^2}{1.2}+\text{etc.}$$

Hier ist nun e^p grösser als die Einheit, und der Integrallogarithmus einer die Einheit übersteigenden Grösse ist folglich unbestimmt, da zwischen u und v keine Abhängigkeit irgend einer Art besteht. Ich habe diese Bemerkung hier gemacht, weil Schlömilch an verschiedenen Stellen des Archivs solche Bezeichnungen wie $li(e^p)$, $(p>0)$ angenommen hat. Der obigen Ansicht ist auch Minding. Auf p. 193. (Handbuch der Differential- und Integralrechnung. Berlin. 1836.) sagt er ausdrücklich: „Folglich ist auch das vorliegende Integral *) zwischen den Grenzen 0 und x', sobald $x'>1$, unbestimmt."

XXVI.

Ueber einen von Gauss gefundenen Ausdruck der Gammafunction.

Von dem

Herrn Doctor F. Arndt,

Lehrer am Gymnasium zu Stralsund.

In der berühmten Abhandlung: „Disquisitiones generales circa seriem infinitam

---

*) $\int_0^{x'}\frac{\partial x}{lx}$.

$$1+\frac{\alpha\beta}{\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2\gamma(\gamma+1)}x^2+\text{etc.}“$$

at Gauss bekanntlich gefunden, dass das Product

$$\Pi(k,a)=\frac{1.2.3\ldots.k.k^a}{(a+1)(a+2)\ldots.(a+k)}$$

ich, wenn k ins Unendliche wächst, der Grenze $\Gamma(a+1)$: $\int_0^\infty x^a e^{-x}\partial x$ nähert, dass also $\Pi(\infty,a)$ oder kürzer $\Pi(a)=\Gamma(a+1)$ t. Die Herleitung dieser Gleichung bei Gauss beruht auf Eigen- :haften der obigen Reihe, die er mit einem grossen Aufwande m Scharfsinn entwickelt. Ein besonderer einfacher Beweis der Rede stehenden Gleichung dürfte wohl wünschenswerth und elleicht nicht ohne Interesse sein.

Ich erinnere zunächt an die bekannte Gleichung

$$\frac{\partial l\Gamma(a+1)}{\partial a}=\int_0^1\left(\frac{1}{l\frac{1}{x}}-\frac{x^a}{1-x}\right)\partial x.$$

chreibt man dafür

$$\frac{\partial l\Gamma(a+1)}{\partial a}=\int_0^1\frac{1-x^{k-1}}{l\frac{1}{x}}\partial x+\int_0^1\left(\frac{x^{k-1}}{l\frac{1}{x}}-\frac{x^a}{1-x}\right)\partial x,$$

ıd beachtet, dass das erste Integral dieser Summe den Werth : hat, so kommt

$$\frac{\partial l\Gamma(a+1)}{\partial a}=lk+\int_0^1\left(\frac{x^{k-1}}{l\frac{1}{x}}-\frac{x^a}{1-x}\right)\partial x,$$

ler, wie leicht erhellet:

$$\frac{\partial l\Gamma(a+1)}{\partial a}=lk+\int_0^1\left(\frac{x^{k-1}}{l\frac{1}{x}}-\frac{x^{a+k}}{1-x}-\frac{x^a-x^{a+k}}{1-x}\right)\partial x.$$

ies Integral kann man in zwei Theile zerlegen, nämlich in

$$\int_0^1\left(\frac{x^{k-1}}{l\frac{1}{x}}-\frac{x^{a+k}}{1-x}\right)\partial x,\quad -\int_0^1\frac{x^a-x^{a+k}}{1-x}\partial x,$$

eren jeder einen endlichen Werth hat, wie leicht erhellet. Was en letztern betrifft, so ist

$$\frac{x^a-x^{a+k}}{1-x}=x^a+x^{a+1}+\ldots.+x^{a+k-1},$$

also

$$\int_0^1 \frac{x^a - x^{a+k}}{1-x}\partial x = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2} + \dots + \frac{1}{a+k},$$

folglich

$$\frac{\partial l\Gamma(a+1)}{\partial a} = lk - \frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+2} - \dots - \frac{1}{a+k} + \int_0^1 \left(\frac{x^{k-1}}{l\frac{1}{x}} - \frac{x^{a+k}}{1-x}\right)\partial x.$$

Nun lässt sich beweisen, dass das Integral

$$r = \int_0^1 \left(\frac{x^{k-1}}{l\frac{1}{x}} - \frac{x^{a+k}}{1-x}\right)\partial x = \int_0^1 x^{k-1}\partial x \left(\frac{1}{l\frac{1}{x}} - \frac{x^{a+1}}{1-x}\right)\partial x$$

für $k = \infty$ verschwindet. Denn da von den beiden Factoren unter dem Integralzeichen x^{k-1}, $\varphi = \frac{1}{l\frac{1}{x}} - \frac{x^{a+1}}{1-x}$, der erste sein Vorzeichen (+) zwischen den Integrationsgrenzen nicht ändert, so ist bekanntlich $r = M\int_0^1 x^{k-1}\partial x = M.\frac{1}{k}$, wo M einer der Werthe ist, welche die Function φ erlangt, indem x von 0 bis 1 sich stetig ändert. Alle diese Werthe sind aber endlich, was für jedes x, das < 1, von selbst erhellet, und für $x = 1$ auf bekannte Weise dargethan wird; folglich bleibt M endlich, also verschwindet $M.\frac{1}{k}$ für $k = \infty$, d. i. $r = 0$ für $k = \infty$. Nach dem Obigen ist also:

$$(a) \dots \frac{\partial l\Gamma(a+1)}{\partial a} = lk - \frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+2} - \dots - \frac{1}{a+k} (k = \infty).$$

Bezeichnet man den Ausdruck rechter Hand durch A, multiplicirt die für jedes endliche k geltende Gleichung $\frac{\partial l\Gamma(a+1)}{\partial a} = A + r$ mit ∂a, und integrirt von $a = 0$ bis $a = a$, so kommt

$$l\Gamma(a+1) = \int_0^a A\partial a + \int_0^a r\partial a.$$

Nun wird auch das Integral $R = \int_0^a r\partial a$ für $k = \infty$ verschwinden. Setzt man nämlich $\int r\partial a = \psi(a)$, so wird $\int_0^a r\partial a = \psi(a) - \psi(0)$; aber nach dem Taylor'schen Satze

$$\psi(a) - \psi(0) = a\psi'(\vartheta a),$$

wo ϑ zwischen 0 und 1 liegt, also $R = a\psi'(\vartheta a)$. Da nun $\psi'(\vartheta a)$

$= \frac{\partial \psi(a)}{\partial a}$ (nach der Differenziation ϑa statt a gesetzt), und $\frac{\partial \psi(a)}{\partial a}$ $= r$ ist; da ferner nach dem Obigen r für jedes a, wenn $k = \infty$, verschwindet, so muss auch R für $k = \infty$ verschwinden. Demnach ist $l\Gamma(a+1) = \int_0^a A \partial a (k = \infty)$, oder, wenn man die Integration ausführt,

$$(b) \quad . \; . \; . \quad l\Gamma(a+1) = l.\frac{1.2.3....k.k^a}{(a+1)(a+2)....(a+k)}(k=\infty).$$

Daraus ergiebt sich sogleich

$$(c) \quad . \; . \; . \; . \quad \Gamma(a+1) = \frac{1.2.3....k.k^a}{(a+1)(a+2)....(a+k)}(k=\infty).$$

Bekanntlich geht die Constante des Integrallogarithmus C hervor aus $-\frac{\partial l\Gamma(a+1)}{\partial a}$, wenn man in diesem Ausdrucke $a=0$ setzt; nach (a) ist also

$$C = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + ... + \frac{1}{k} - lk\,(k=\infty),$$

was sonst auf minder strenge Weise dargethan wird.

XXVII.

Zwei Entwickelungen des bestimmten Integrals $\int_0^1 \left(\frac{x^{a-1}}{1-x} - \frac{n x^{na-1}}{1-x^n}\right) \partial x$.

Von dem

Herrn Doctor F. Arndt,

Lehrer am Gymnasium zu Stralsund.

Lejeune-Dirichlet's interessanter Beweis des Legendreschen Theorems über Eulersche Integrale der zweiten Art (Crelle's Journal Bd. 15. p. 258. ff.) kommt der Hauptsache nach darauf hinaus, darzuthun, dass die Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial a} l. \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(a+\frac{1}{n})\,\Gamma(a+\frac{2}{n}) \ldots \Gamma(a+\frac{n-1}{n})}{\Gamma(na)}$$

eine von a unabhängige Grösse ist, deren Werth man übrigen nicht zu kennen braucht. Zu dem Ende entwickelt Dirichle die Gleichung

$$\frac{\partial l\Gamma(a)}{\partial a} = \int_0^1 (e^{1-\frac{1}{x}} - x^a)\frac{\partial x}{x(1-x)},$$

setzt darin a, $a+\frac{1}{n}, \ldots a+\frac{n-1}{n}$ statt a, und bildet die Summ

$$s = \frac{\partial l\Gamma(a)}{\partial a} + \frac{\partial l\Gamma(a+\frac{1}{n})}{\partial a} + \ldots + \frac{\partial l\Gamma(a+\frac{n-1}{n})}{\partial a},$$

wofür er das bestimmte Integral erhält:

$$s = \int_0^1 \left(\frac{ne^{1-\frac{1}{x}}}{1-x} - \frac{x^a}{1-x^{\frac{1}{n}}}\right)\frac{\partial x}{x}.$$

Dieser Ausdruck wird durch die Substitution von x^n statt x i den folgenden transformirt:

$$s = n\int_0^1 \left(\frac{ne^{1-\frac{1}{x^n}}}{1-x} - \frac{x^{na}}{1-x}\right)\frac{\partial x}{x};$$

zieht man nun von dieser Gleichung

$$\frac{\partial l\Gamma(na)}{\partial a} = n\frac{\Gamma'(na)}{\Gamma(na)} = k\int_0^1 (e^{1-\frac{1}{x}} - x^{na})\frac{\partial x}{x(1-x)}$$

ab, so kommt

$$s - \frac{\partial l\Gamma(na)}{\partial a} = n\int_0^1 \left(\frac{ne^{1-\frac{1}{x^n}}}{1-x^n} - \frac{e^{1-\frac{1}{x}}}{1-x}\right)\frac{\partial x}{x},$$

welches in der That eine von a unabhängige Grösse ist.

Hierauf hat Schlömilch in diesem Archiv Thl. VII. p. 348. i darauf aufmerksam gemacht, dass man sich auch der bekannte Gleichung

$$\frac{\partial l\Gamma(a)}{\partial a} = -C + \int_0^1 \frac{1-x^{a-1}}{1-x}\partial x \;*)$$

zum Beweise des Legendre'schen Theoremes bedienen könnt Man findet hier nämlich

*) C bedeutet die Constante des Integrallogarithmus.

$$s = -nC + \int_0^1 \left(\frac{n}{1-x} - \frac{x^{a-1}}{1-x^{\frac{1}{n}}}\right)\partial x,$$

oder, x^n statt x gesetzt,

$$s = -nC + n\int_0^1 \left(\frac{nx^{n-1}}{1-x^n} - \frac{x^{na-1}}{1-x}\right)\partial x.$$

Zieht man von der letztern Gleichung

$$\frac{\partial l\Gamma(na)}{\partial a} = -nC + n\int_0^1 \frac{1-x^{na-1}}{1-x}\partial x$$

ab, so kommt

$$s - \frac{\partial l\Gamma(na)}{\partial a} = -n\int_0^1 \left(\frac{1}{1-x} - \frac{nx^{n-1}}{1-x^n}\right)\partial x,$$

wo das Integral sich leicht unbestimmt entwickeln, und dann zwischen den Grenzen 0 und 1 nehmen lässt.

Ein dritter Weg ist folgender. Unter Anwendung der bekannten Formel

$$\frac{\partial l\Gamma(a)}{\partial a} = \int_0^1 \left(\frac{1}{l\frac{1}{x}} - \frac{x^{a-1}}{1-x}\right)\partial x$$

findet man leicht

$$s = \int_0^1 \left(\frac{n}{l\frac{1}{x}} - \frac{x^{a-1}}{1-x^{\frac{1}{n}}}\right)\partial x,$$

oder, x^n statt x gesetzt,

$$s = \int_0^1 \left(\frac{nx^{n-1}}{l\frac{1}{x}} - \frac{nx^{na-1}}{1-x}\right)\partial x.$$

Zieht man von dieser Gleichung $\frac{\partial l\Gamma(na)}{\partial a} = \int_0^1 \left(\frac{n}{l\frac{1}{x}} - \frac{nx^{na-1}}{1-x}\right)\partial x$ ab, so erhält man

$$s - \frac{\partial l\Gamma(na)}{\partial a} = -n\int_0^1 \frac{1-x^{n-1}}{l\frac{1}{x}}\partial x,$$

also eine von a unabhängige Grösse. Uebrigens ist das in dieser Gleichung vorkommende bestimmte Integral bekannt. Eine sehr einfache Entwickelung desselben ist folgende. Für $l\frac{1}{x} = z$ wird

$$\int_0^1 \frac{1-x^{n-1}}{l\frac{1}{x}}\partial x = \int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-nz}}{z}\partial z.$$

Dies Integral darf nicht in seine beiden Theile zerlegt werden, da jeder unendlich wird; integriren wir deshalb von $z=p$ bis $z=\infty$, wo $p>0$, und setzen

$$\int_p^\infty \frac{e^{-z}-e^{-nz}}{z}\partial z=\int_p^\infty \frac{e^{-z}\partial z}{z}-\int_p^\infty \frac{e^{-nz}\partial z}{z}.$$

Nun geht das Integral $\int_p^\infty \frac{e^{-nz}\partial z}{z}$, wenn man z statt nz setzt, über in $\int_{np}^\infty \frac{e^{-z}\partial z}{z}$, folglich wird

$$\int_p^\infty \frac{e^{-z}-e^{-nz}}{z}\partial z=\int_p^\infty \frac{e^{-z}\partial z}{z}-\int_{np}^\infty \frac{e^{-z}\partial z}{z}=\int_p^{np} \frac{e^{-z}\partial z}{z}.$$

Was endlich das letzte Integral betrifft, so ist es nach einem bekannten Theorem gleich $M\int_p^{np}\frac{\partial z}{z}=Mln$, wo M einer der Werthe ist, welche die Function e^{-z} von $z=p$ bis $z=np$ erlangt. Da also M zwischen den Grenzen $\frac{1}{e^p}$, $\frac{1}{e^{np}}$ liegt, und diese sich derselben Grenze 1 nähern, wenn p gegen Null convergirt, so ist $M=1$ für $p=0$, folglich $\int_p^{np}\frac{e^{-z}\partial z}{z}=ln$ für $p=0$, d. i. nach dem Obigen

$$\int_0^\infty \frac{e^{-z}-e^{-nz}}{z}\partial z=ln,$$

wie bekannt.

Ich habe mich über diesen Gegenstand hier nur deshalb so weit ausgelassen, um daran eine Bemerkung zu schliessen, die mich in diesem Aufsatze weiter beschäftigen soll.

Bei allen dreien im Vorhergehenden vorgezeichneten Verfahrungsweisen wurde der erste Ausdruck von s dadurch transformirt, dass man x^n statt x setzte, und in der That erreicht man seinen Zweck so auf die einfachste Art. Wird nämlich diese Transformation unterlassen, oder der erste Ausdruck von s unmittelbar angewandt, so ergiebt sich, man mag nun Dirichlet's oder Schlömilch's Weg, oder den meinigen betreten,

$$s-\frac{\partial l\Gamma(na)}{\partial a}=-\int_0^1\left(\frac{x^{a-1}}{1-x^{\frac{1}{n}}}-\frac{nx^{na-1}}{1-x}\right)\partial x,$$

und nun stellt sich die Aufgabe dar, zu zeigen, dass dies Integral eine von a unabhängige Grösse ist. Die Combination dieser Gleichung mit der obigen $s-\frac{\partial l\Gamma(na)}{\partial a}=-nln$ lehrt zwar, dass

$$(a) \;\ldots\ldots\ldots \int_0^1\left(\frac{x^{a-1}}{1-x^{\frac{1}{n}}}-\frac{nx^{na-1}}{1-x}\right)\partial x=nln$$

sein muss, aber die ganze vorhergehende Betrachtung hat zur nothwendigen Voraussetzung, dass n eine positive ganze Zahl ist, und die Gleichung (a) bedarf deshalb mit Rücksicht auf gebrochene n einer besondern Untersuchung. Zu dem Ende werde ich im Folgenden zwei Entwickelungen der Gleichung

$$(b) \quad \ldots\ldots \int_0^1 \left(\frac{x^{a-1}}{1-x} - \frac{nx^{na-1}}{1-x^n}\right)\partial x = ln,$$

welche aus (a) durch die Substitution von x^n statt x hervorgeht, mittheilen, welche die Richtigkeit derselben für den Fall, dass a eine positive Grösse und n eine positive, aber sonst beliebige Zahl ist, verbürgen. Die in Rede stehende Gleichung ist übrigens bekannt, die Art ihrer Entwickelung mir aber nicht gegenwärtig. Leitet man sie nicht gewöhnlich nach einem, dem Obigen vielleicht ähnlichen Verfahren unter Zuziehung der Gammafunctionen ab?

Noch eine Bemerkung, bevor ich zum Beweise schreite. Die beiden Theile, in welche das Integral (b) zerlegt werden kann, nämlich

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1-x}\partial x, \quad \int_0^1 \frac{nx^{na-1}}{1-x^n}\partial x,$$

sind so beschaffen, dass das erste Integral in das zweite übergeht, wenn x^n statt x gesetzt wird; allein man darf nicht schliessen, dass das Integral selbst verschwindet; ein solcher Schluss wäre nur zulässig, wenn das Integral $\int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1-x}\partial x$ einen endlichen Werth hätte, was nicht der Fall ist. Ueberhaupt darf man, nach einer Bemerkung von Dirichlet, die beiden Theile des Integrals

$$\int_a^b \{f(x) - \varphi(x)\}\partial x, \text{ nämlich } \int_a^b f(x)\,\partial x, \int_a^b \varphi(x)\,\partial x,$$

nicht verschiedenen Transformationen unterwerfen, wenn einer derselben einen unendlichen oder unbestimmten Werth hat.

Erste Methode, das bestimmte Integral

$$\omega = \int_0^1 \left(\frac{x^{a-1}}{1-x} - \frac{nx^{na-1}}{1-x^n}\right)\partial x$$

zu entwickeln.

Der Werth von ω für $a=1$ ist leicht zu entdecken; es ist nämlich $\int\left(\frac{1}{1-x} - \frac{nx^{n-1}}{1-x^n}\right)\partial x = \frac{1}{2}l.\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)^2$, also

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{1-x} - \frac{nx^{n-1}}{1-x^n}\right)\partial x = ln,$$

wo n positiv sein muss, damit x^n für $x=0$ verschwinde. Setzen wir nun

$$\omega_1 = \int_0^1 \left(\frac{1}{1-x} - \frac{nx^{n-1}}{1-x^n}\right)\partial x = ln,$$

und untersuchen die Differenz

$$\omega_1 - \omega = \int_0^1 \left(\frac{1-x^{a-1}}{1-x} - n\cdot\frac{x^{n-1}-x^{na-1}}{1-x^n}\right)\partial x.$$

Zuvörderst lässt sich zeigen, dass $\int_0^1 \frac{1-x^{a-1}}{1-x}\partial x$ unter Voraussetzung, dass a positiv ist, einen endlichen Werth hat. Dies ist unmittelbar klar, wenn $a-1>0$, indem dann die Function $\frac{1-x^{a-1}}{1-x}$ für alle Werthe der Veränderlichen von 0 bis 1 endliche Werthe erlangt; allein für ein positives ächt gebrochenes a wird $\frac{1-x^{a-1}}{1-x} = -\infty$ für $x=0$, und dieses Falls wegen ist noch eine besondere Betrachtung nöthig. Es sei $a=\frac{p}{q}$, wo p, q positive ganze Zahlen bedeuten; wird dann $x=z^q$ gemacht, so kommt

$$\int_0^1 \frac{1-x^{a-1}}{1-x}\partial x = q\int_0^1 \frac{z^{q-1}-z^{p-1}}{1-z^q}\partial z.$$

Nun ist $q-1 \overline{\overline{>}} 0$, $p-1 \overline{\overline{>}} 0$, die Function $\frac{z^{q-1}-z^{p-1}}{1-z^q}$ erlangt also nicht nur für alle von Null verschiedenen Werthe des z, sondern auch für $z=0$ selbst, endliche Werthe, und $\int_0^1 \frac{1-x^{a-1}}{1-x}\partial x$ hat mithin einen bestimmten e n d l i c h e n Werth Θ. Macht man jetzt $x=z^n$, so wird $\int_0^1 n\cdot\frac{z^{n-1}-z^{na-1}}{1-z^n}\partial z$, da n positiv ist; also

$$\int_0^1 \frac{1-x^{a-1}}{1-x}\partial x = \Theta, \int_0^1 n\cdot\frac{x^{n-1}-x^{na-1}}{1-x^n}\partial x = \Theta;$$

$$\int_0^1 \left(\frac{1-x^{a-1}}{1-x} - n\cdot\frac{x^{n-1}-x^{na-1}}{1-x^n}\right)\partial x = \Theta - \Theta = 0;$$

d. i. $\omega_1 - \omega = 0$. Nach dem obigen Werthe von ω_1 ist folglich

$$\omega = \int_0^1 \left(\frac{x^{a-1}}{1-x} - \frac{nx^{na-1}}{1-x^n}\right)\partial x = ln$$
$$(a>0,\ n>0).$$

Zweite Methode.

Differenzirt man die Gleichung

$$\omega = \int_0^1 \left(\frac{x^{a-1}}{1-x} - \frac{nx^{na-1}}{1-x^n}\right)\partial x$$

auf bekannte Weise nach n, so erhält man

$$\frac{\partial\omega}{\partial n}=-\int_0^1\frac{x^{na-1}\partial x}{(1-x^n)^2}[1-x^n+nlx\{a(1-x^n)+x^n\}],$$

oder, $x^n=z$ gesetzt,

$$\frac{\partial\omega}{\partial n}=-\frac{1}{n}\int_0^1\frac{z^{a-1}\partial z}{(1-z)^2}[(1-z)(1+alz)+zlz],$$

wo wegen der gemachten Substitution n **positiv** sein muss. Bei aufmerksamer Betrachtung des Bildungsgesetzes der Function unter dem Integralzeichen erkennt man bald, dass das complicirt aussehende Integral sich auf folgende Weise unbestimmt entwickeln lässt. Bezeichnet man es einstweilen durch J, und setzt $z^alz=u$, so kommt $z^{a-1}(1+alz)\partial z=\partial u$, folglich

$$J=\int\frac{(1-z)\partial u+u\partial z}{(1-z)^2}=\frac{u}{1-z},$$

oder, für u seinen Werth gesetzt,

$$\int\frac{z^{a-1}\partial z}{(1-z)^2}[(1-z)(1+alz)+zlz]=\frac{z^alz}{1-z}.$$

Für $z=0$ verschwindet die Function $\frac{z^alz}{1-z}$ unter Voraussetzung, dass a **positiv** ist, wie man leicht findet; für $z=1$ wird dieselbe gleich -1, wie man durch Differentiation von Zähler und Nenner findet; also ist

$$\int_0^1\frac{z^{a-1}\partial z}{(1-z)^2}[(1-z)(1+alz)+zlz]=-1\ (a>0),$$

folglich $\frac{\partial\omega}{\partial n}=\frac{1}{n}$, $\omega=ln+\text{Const.}$ Da aber die Constante verschwinden muss, indem ω für $n=1$ verschwindet, so kommt $\omega=ln$, wie vorher.

XXVIII.

Ueber einen allgemeinen Lehrsatz der Stereometrie.

Von

dem Herausgeber.

Einleitung.

Herr Fabriken-Kommissionsrath Brix in Berlin hat das Verdienst, in der neuen Ausgabe des, verschiedene arithmetische und geometrische Lehren enthaltenden, Anhangs zu seinem ausgezeichneten Elementar-Lehrbuche der dynamischen Wissenschaften (S. 130.—S. 148.) zuerst einen allgemeinen stereometrischen Lehrsatz zur Sprache gebracht zu haben, mittelst dessen sich die Inhaltsbestimmung einer grossen Anzahl von Körpern, namentlich aller derjenigen, welche in der elementaren Stereometrie betrachtet zu werden pflegen, und solcher, die durch Umdrehung der Kegelschnitte entstehen, mit aller zu wünschenden Leichtigkeit ausführen lässt. Dieser Satz hat bisher, wie es wenigstens scheint, nicht die Beachtung gefunden, welche er jedenfalls in hohem Grade verdient. Nur erst in diesem Augenblicke fällt mir eine so eben erschienene kleine Schrift: „Ueber die Inhaltsberechnung der Körper nach einer *einzigen* Formel. Mit besonderer Rücksicht für die Praxis bearbeitet von W. Ligowsky, Feuerwerker in der 7ten Artillerie-Brigade. Berlin. 1847." in die Hände, in welcher dieser sehr bemerkenswerthe Satz von Neuem zur Sprache gebracht wird, und da Herr Ligowsky in der Vorrede sagt, „dass die Aufmunterung, welche ihm zur Bearbeitung dieses Gegenstandes Seitens seiner Hohen Gönner zu Theil geworden sei, die erste Veranlassung zur Herausgabe der vorher genannten kleinen Schrift gegeben habe"; so scheint das allgemeine Gesetz, um welches es sich hier handelt, und namentlich seine nach meiner Ueberzeugung grosse Bedeutung für das praktische Bedürfniss, wenigstens in Berlin, höheren Orts Aufmerksamkeit erregt zu haben, und Herr Ligowsky, um den Satz, wie er allerdings gar sehr verdient, allgemeiner in die Praxis einzuführen, zur Bearbeitung und Herausgabe seiner Schrift veranlasst worden zu sein. Nun

ist aber zu bemerken, dass die Schrift des Herrn Ligowsky, welche jedenfalls das Product eines Anfängers ist und namentlich in Rücksicht auf mathematische Strenge sehr Vieles zu wünschen übrig lässt, dem, was Herr Brix a. a. O. schon gegeben hat, nichts wesentlich Neues, was wenigstens der Beachtung einigermassen werth wäre, hinzufügt, und dass Letzterem jedenfalls das von Herrn Ligowsky in der Vorrede zu seiner Schrift nicht so deutlich und bestimmt, wie es erforderlich gewesen wäre *), hervorgehobene Verdienst bleibt, den Satz zuerst aufgestellt und seine Bedeutung für die Praxis durch eine ziemlich grosse Anzahl von Beispielen, denen Herr Ligowsky auch nicht eben etwas Neues von einiger Bedeutung hinzugefügt hat, zuerst nachgewiesen zu haben.

So sehr und so gern ich nun aber, namentlich bei den freundschaftlichen Beziehungen, in denen ich schon seit einer langen Reihe von Jahren zu Herrn Brix zu stehen die Ehre habe, dessen grosses Verdienst rücksichtlich des fraglichen Gegenstandes anzuerkennen bereit bin, so muss ich doch bemerken, dass Herr Brix den Satz nicht eigentlich allgemein bewiesen hat, und dass derselbe a. a. O., wenn auch nicht ganz, doch gewissermassen nur als das Resultat einer Induction erscheint, was auch wohl zum Theil der Grund gewesen sein mag, dass der Satz bis jetzt, wie es wenigstens scheint, wenig Eingang gefunden, und sich noch nicht Bahn in die Lehrbücher gebrochen hat. Auch scheint mir Herr Brix den Satz noch nicht auf seinen wahren Ausdruck zurückgeführt und die eigentlichen Bedingungen, unter denen er allein gültig ist, nachgewiesen zu haben, was mir nothwendig zu sein scheint, wenn der wahre Werth und die wahre Bedeutung desselben sowohl in theoretischer, als auch in praktischer Beziehung gehörig hervorgehoben und in's Licht gestellt werden soll. Ich werde mir daher erlauben, diesen der Aufmerksamkeit gewiss sehr werthen Gegenstand in der vorliegenden Abhandlung einer ganz neuen Untersuchung zu unterwerfen, und in jeder Beziehung in sein gehöriges Licht zu stellen, namentlich auch den Satz auf seinen wahren Ausdruck zu bringen und die eigentliche Bedingung seiner Gültigkeit nachzuweisen suchen. Dabei wird sich dann auch zugleich, wie ich wenigstens hoffe, zeigen, was der eigentliche Grund der allerdings grossen Genauigkeit ist, welche die Formel von Chapman in den meisten Fällen bei der annähernden Bestimmung der körperlichen Räume gewährt, indem die gewöhnlichen Entwickelungen dieser bemerkenswerthen Formel mir überhaupt Vieles zu wünschen übrig zu lassen, und einen recht deutlichen Blick in das eigentliche Wesen derselben nicht zu gewähren scheinen, worin doch am Ende der wahre Werth einer jeden mathematischen Demonstration liegt. Zuerst werde ich mich bei der Darstellung der Integralrechnung bedienen, dann aber auch, was mir hier von besonderer Bedeutung zu sein scheint, zeigen, dass ein ganz elementarer Weg fast eben so leicht und eben so

---

*) Herr Ligowsky erinnert eigentlich nur an die längst bekannte Näherungsformel zur Inhaltsbestimmung der Körper von Chapman, und sagt, dass er dieselbe in den der Mechanik gewidmeten Werken von Eytelwein, Poncelet und Brix wiedergefunden habe.

schnell zum Ziele führt, und hoffe mich nicht zu täuschen, wenn ich mir hier zum Schluss noch die Ueberzeugung auszusprechen erlaube, dass dieser ganze Gegenstand in der ihm hier gegebenen Gestalt, oder wenigstens in einer ähnlichen, sich fernerhin gewiss in den Elementar-Unterricht der Stereometrie, namentlich auf allen mehr eine praktische oder technische Richtung verfolgenden Lehranstalten — für welche die Sache vorzugsweise von Bedeutung sein dürfte, und denen ich dieselbe daher auch besonders empfehle, — und in die Elementar-Lehrbücher dieser Wissenschaft, allgemein Bahn brechen wird, was ich wenigstens wünschen möchte.

I.

Wir wollen uns einen von einer ganz beliebigen Fläche umschlossenen Körper denken, und annehmen, dass die Flächenräume aller in einer gewissen Lage geführten, einander parallelen Queerschnitte desselben ganze rationale algebraische Functionen des zweiten Grades ihrer normalen Entfernungen von einem gewissen bestimmten Punkte, den wir überhaupt den **Pol** nennen wollen, sind, wobei alle von diesem Pole aus nach der einen Seite hin liegenden Entfernungen als positiv, alle nach der entgegengesetzten Seite hin liegenden Entfernungen als negativ betrachtet, mit Rücksicht hierauf aber im Allgemeinen durch x bezeichnet werden sollen. Bezeichnen wir dann den Flächenraum des der Entfernung x von dem Pole entsprechenden Queerschnitts überhaupt durch F_x, und denken uns zwei bestimmte positive oder negative Werthe a und b von x, wobei jedoch angenommen werden soll, dass $a < b$ sei, so ist das Volumen des zwischen diesen beiden Queerschnitten enthaltenen Theils unsers Körpers, welches wir durch V bezeichnen wollen, offenbar die Gränze, der sich, indem wir n eine positive ganze Zahl bedeuten lassen, und der Kürze wegen

$$\frac{b-a}{n} = i$$

setzen, wo i unter der vorher gemachten Voraussetzung eine positive Grösse ist, die Grösse

$$i\{F_a + F_{a+i} + F_{a+2i} + F_{a+3i} + \ldots + F_{a+(n-1)i}\},$$

oder auch die Grösse

$$i\{F_{a+i} + F_{a+2i} + F_{a+3i} + F_{a+4i} + \ldots + F_{a+ni}\},$$

bis zu jedem beliebigen Grade nähert, wenn man n in's Unendliche wachsen lässt, was sich so leicht und ganz von selbst aus den elementarsten Sätzen der Stereometrie von dem Inhalte des Prismas oder des Cylinders ergiebt, dass wir weitere Erläuterungen darüber an diesem Orte für völlig überflüssig halten. Bezeichnen wir also die in Rede stehenden Gränzen in der Kürze durch das den obigen Ausdrücken vorgesetzte Lim., so erhalten wir unmittelbar die beiden folgenden Gleichungen:

$$1)\quad V = \text{Lim}.\, i\{F_a + F_{a+i} + F_{a+2i} + F_{a+3i} + \ldots + F_{a+(n-1)i}\}$$

und

$$2)\quad V = \text{Lim}.\, i\{F_{a+i} + F_{a+2i} + F_{a+3i} + F_{a+4i} + \ldots + F_{a+ni}\},$$

welche die Grundlage alles Folgenden bilden.

II.

Nach einem bekannten Satze von den bestimmten Integralen *) ist nun aber

$$\int_a^b F_x \partial x$$

$$= \text{Lim}.\, i\{F_a + F_{a+i} + F_{a+2i} + F_{a+3i} + \ldots + F_{a+ni}\}$$

$$= \text{Lim}.\, iF_a + \text{Lim}.\, i\{F_{a+i} + F_{a+2i} + F_{a+3i} + \ldots + F_{a+ni}\},$$

d. i., weil, da F_a eine bestimmte endliche Grösse ist, i sich aber bis zu einem jeden beliebigen Grade der Null nähert, wenn man n in's Unendliche wachsen lässt, offenbar

$$\text{Lim}.\, iF_a = 0$$

ist,

$$\int_a^b F_x \partial x$$

$$= \text{Lim}.\, i\{F_{a+i} + F_{a+2i} + F_{a+3i} + \ldots + F_{a+ni}\},$$

also nach der Gleichung 2):

$$3)\quad V = \int_a^b F_x \partial x.$$

Weil nun aber F_x eine ganze rationale algebraische Function des zweiten Grades von x sein soll, so kann, indem A, B, C Constanten bezeichnen, im Allgemeinen

$$4)\quad F_x = A + Bx + Cx^2$$

gesetzt werden, und es ist folglich

$$\int F_x \partial x = Ax + \tfrac{1}{2}Bx^2 + \tfrac{1}{3}Cx^3 + \text{Const},$$

also

$$\int_a^b F_x \partial x = A(b-a) + \tfrac{1}{2}B(b^2 - a^2) + \tfrac{1}{3}C(b^3 - a^3),$$

folglich nach dem Obigen

---

*) Archiv. Thl. II. S. 275.

$$5)\quad V=A(b-a)+\tfrac{1}{2}B(b^2-a^2)+\tfrac{1}{3}C(b^3-a^3),$$

oder

$$6)\quad V=(b-a)\{A+\tfrac{1}{2}B(a+b)+\tfrac{1}{3}C(a^2+ab+b^2)\}.$$

III.

Zu dem Beweise der vorhergehenden Gleichung 6) bedarf man aber in der That der Integralrechnung gar nicht, sondern kann zu derselben leicht und mit völliger Strenge durch das folgende ganz elementare Verfahren gelangen.

Einen beliebigen Werth der Entfernung x bezeichne man durch α, setze, indem n eine positive ganze Zahl bezeichnet,

$$\frac{\alpha}{n}=\pm i,$$

und bezeichne das Volumen des zwischen den Queerschnitten F_0 und F_α enthaltenen Körpers durch $\mathfrak{V}$, so ist offenbar, indem man in den folgenden Gleichungen das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem die Grösse α positiv oder negativ ist,

$$\mathfrak{V}=\text{Lim.}\pm i\{F_i+F_{2i}+F_{3i}+F_{4i}+\ldots.+F_{ni}\},$$

oder, was Dasselbe ist,

$$\pm\mathfrak{V}=\text{Lim.}\,i\{F_i+F_{2i}+F_{3i}+F_{4i}+\ldots.+F_{ni}\}.$$

Weil nun aber nach der Voraussetzung im Allgemeinen

$$F_x=A+Bx+Cx^2$$

ist, so ist

$$\begin{aligned}
&i\{F_i+F_{2i}+F_{3i}+F_{4i}+\ldots.+F_{ni}\}\\
&=\quad Ai+\ Bi^2+\ Ci^3\\
&\quad+Ai+2Bi^2+2^2Ci^3\\
&\quad+Ai+3Bi^2+3^2Ci^3\\
&\quad+Ai+4Bi^2+4^2Ci^3\\
&\qquad\text{u. s. w.}\\
&\quad+Ai+nBi^2+n^2Ci^3\\
&=nAi+(1+2+3+4+\ldots.+n)Bi^2\\
&\quad+(1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots.+n^2)Ci^3,
\end{aligned}$$

also, nach bekannten Elementarsätzen von der Summirung der Reihen *):

---

*) Die Summenformel für die Quadrate der natürlichen Zahlen findet man bekanntlich sehr einfach auf folgende Art.

$$i\{F_i+F_{2i}+F_{3i}+F_{4i}+\ldots\ldots+F_{ni}\}$$
$$=nAi+\tfrac{1}{2}n(n+1)Bi^2+\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)Ci^3.$$

Weil aber nach dem Obigen

$$i=\frac{\alpha}{n},\ ni=\alpha$$

ist, so ist

$$i\{F_i+F_{2i}+F_{3i}+F_{4i}+\ldots\ldots+F_{ni}\}$$
$$=nA.\frac{\alpha}{n}+\tfrac{1}{2}n(n+1)B.\frac{\alpha^2}{n^2}+\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)C.\frac{\alpha^3}{n^3},$$

d. i.

$$i\{F_i+F_{2i}+F_{3i}+F_{4i}+\ldots\ldots+F_{ni}\}$$
$$=A\alpha+\tfrac{1}{2}(1+\frac{1}{n})B\alpha^2+\tfrac{1}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})C\alpha^3.$$

Lässt man nun in dieser Gleichung n in's Unendliche wachsen und geht auf beiden Seiten derselben zu den Gränzen über,

---

Es ist

$$(n+1)^3=n^3+3n^2+3n+1,$$
$$n^3=(n-1)^3+3(n-1)^2+3(n-1)+1,$$
$$(n-1)^3=(n-2)^3+3(n-2)^2+3(n-2)+1,$$
u. s. w.
$$2^3=1^3+3.1^2+3.1+1;$$

also, wenn man addirt und aufhebt, was sich aufheben lässt:

$$(n+1)^3=n+1+3Sn+3Sn^2,$$

und folglich, weil bekanntlich

$$Sn=\tfrac{1}{2}n(n+1)$$

ist,

$$(n+1)^3=\tfrac{1}{2}(n+1)(3n+2)+3Sn^2,$$

also

$$6Sn^2=2(n+1)^3-(n+1)(3n+2)$$
$$=(n+1)\{2(n+1)^2-(3n+2)\}$$
$$=(n+1)(2n^2+4n+2-3n-2)$$
$$=n(n+1)(2n+1),$$

woraus sogleich

$$Sn^2=\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

folgt.

so erhält man auf der Stelle und durch die einfachsten, hier keiner weiteren Erläuterung bedürfenden Schlüsse die Gleichung

$$\begin{aligned}\text{Lim}\,.\,i\{F_i+F_{2i}+F_{3i}+F_{4i}+\ldots+F_{ni}\}\\=A\alpha+\tfrac{1}{2}B\alpha^2+\tfrac{1}{3}C\alpha^3,\end{aligned}$$

also nach dem Obigen

$$\pm\mathfrak{V}=A\alpha+\tfrac{1}{2}B\alpha^2+\tfrac{1}{3}C\alpha^3$$

oder

$$7)\quad \mathfrak{V}=\pm(A\alpha+\tfrac{1}{2}B\alpha^2+\tfrac{1}{3}C\alpha^3),$$

wo man immer das obere oder untere Zeichen zu nehmen hat, jenachdem α positiv oder negativ ist.

Wenn jetzt a und b zwei beliebige Werthe von x sind und $a<b$ ist, so wollen wir die Volumina der zwischen den Queerschnitten F_0 und F_a, F_0 und F_b, F_a und F_b enthaltenen Körper respective durch V', V'' und V bezeichnen.

Sind dann zuerst a und b beide positiv, so ist offenbar

$$V=V''-V',$$

und nach der Gleichung 7) ist

$$\begin{aligned}V'&=Aa+\tfrac{1}{2}Ba^2+\tfrac{1}{3}Ca^3,\\V''&=Ab+\tfrac{1}{2}Bb^2+\tfrac{1}{3}Cb^3;\end{aligned}$$

Will man die Formel

$$Sn=\tfrac{1}{2}n(n+1)$$

nicht als bekannt voraussetzen, so kann man auf folgende Art verfahren.

Es ist, wie man mittelst leichter Rechnung findet, allgemein

$$\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\tfrac{1}{6}(n-1)n(2n-1)=n^2,$$

also

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\tfrac{1}{6}(n-1)n(2n-1)&=n^2,\\\tfrac{1}{6}(n-1)n(2n-1)-\tfrac{1}{6}(n-2)(n-1)(2n-3)&=(n-1)^2,\\\tfrac{1}{6}(n-2)(n-1)(2n-3)-\tfrac{1}{6}(n-3)(n-2)(2n-5)&=(n-2)^2,\\\tfrac{1}{6}(n-3)(n-2)(2n-5)-\tfrac{1}{6}(n-4)(n-3)(2n-7)&=(n-3)^2,\\&\text{u. s. w.}\\\tfrac{1}{6}.2.3.(2.2+1)-\tfrac{1}{6}.1.2.(2.1+1)&=2^2,\\\tfrac{1}{6}.1.2.(2.1+1)&=1^2;\end{aligned}$$

also, wenn man addirt und aufhebt, was sich aufheben lässt:

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2=Sn^2=\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

wie vorher.

also

$$V = A(b-a) + \tfrac{1}{2}B(b^2-a^2) + \tfrac{1}{3}C(b^3-a^3).$$

Sind ferner a und b beide negativ, so ist offenbar, weil der absolute Werth von a grösser als der absolute Werth von b ist,

$$V = V' - V'',$$

und nach der Gleichung 7) ist

$$V' = -Aa - \tfrac{1}{2}Ba^2 - \tfrac{1}{3}Ca^3,$$
$$V'' = -Ab - \tfrac{1}{2}Bb^2 - \tfrac{1}{3}Cb^3;$$

also

$$V = A(b-a) + \tfrac{1}{2}B(b^2-a^2) + \tfrac{1}{3}C(b^3-a^3).$$

Ist ferner a negativ und b positiv, so ist offenbar

$$V = V' + V'',$$

und nach der Gleichung 7) ist

$$V' = -Aa - \tfrac{1}{2}Ba^2 - \tfrac{1}{3}Ca^3,$$
$$V'' = \quad Ab + \tfrac{1}{2}Bb^2 + \tfrac{1}{3}Cb^3;$$

also

$$V = A(b-a) + \tfrac{1}{2}B(b^2-a^2) + \tfrac{1}{3}C(b^3-a^3).$$

Da nun unter den gemachten Voraussetzungen ausser den so eben betrachteten drei Fällen ein anderer Fall nicht weiter vorkommen kann, so ist völlig allgemein

$$8)\quad V = A(b-a) + \tfrac{1}{2}B(b^2-a^2) + \tfrac{1}{3}C(b^3-a^3)$$

oder

$$9)\quad V = (b-a)\{A + \tfrac{1}{2}B(a+b) + \tfrac{1}{3}C(a^2+ab+b^2)\},$$

welche Gleichungen mit den in II. gefundenen Gleichungen 5) und 6) völlig übereinstimmen, hier aber ganz elementar bewiesen sind; und ich zweifle durchaus nicht, dass dieser Beweis wegen seiner Leichtigkeit und Einfachheit zur Aufnahme in die Elemente ganz geeignet ist.

IV.

Die drei in der Gleichung

$$F_x = A + Bx + Cx^2$$

vorkommenden Constanten A, B, C kann man nun jederzeit bestimmen, wenn man für drei beliebige, aber bestimmte Werthe α, β, γ der Entfernung x die entsprechenden Werthe F_α, F_β, F_γ des Flächeninhalts des Queerschnitts F_x kennt, indem man näm-

lich zur Bestimmung der drei in Rede stehenden Constanten die drei folgenden Gleichungen des ersten Grades:

$$F_\alpha = A + B\alpha + C\alpha^2,$$
$$F_\beta = A + B\beta + C\beta^2,$$
$$F_\gamma = A + B\gamma + C\gamma^2$$

hat. Löst man aber diese drei Gleichungen nach den gewöhnlichen Regeln der Algebra in Bezug auf A, B, C als unbekannte Grössen auf, so erhält man nach leichter Rechnung für A, B, C die folgenden Werthe:

$$10)\quad \begin{cases} A = -\dfrac{\beta\gamma(\beta-\gamma)F_\alpha + \gamma\alpha(\gamma-\alpha)F_\beta + \alpha\beta(\alpha-\beta)F_\gamma}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}, \\[2ex] B = \dfrac{(\beta^2-\gamma^2)F_\alpha + (\gamma^2-\alpha^2)F_\beta + (\alpha^2-\beta^2)F_\gamma}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}, \\[2ex] C = -\dfrac{(\beta-\gamma)F_\alpha + (\gamma-\alpha)F_\beta + (\alpha-\beta)F_\gamma}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}; \end{cases}$$

oder, wie sich hieraus leicht ergiebt:

$$10^*)\quad \begin{cases} A = \dfrac{\beta\gamma F_\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \dfrac{\alpha\gamma F_\beta}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \dfrac{\alpha\beta F_\gamma}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}, \\[2ex] B = -\dfrac{(\beta+\gamma)F_\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} - \dfrac{(\alpha+\gamma)F_\beta}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} - \dfrac{(\alpha+\beta)F_\gamma}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}, \\[2ex] C = \dfrac{F_\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \dfrac{F_\beta}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \dfrac{F_\gamma}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}. \end{cases}$$

Führen wir diese Ausdrücke von A, B, C in den Ausdruck 9) von V ein, so erhalten wir:

$$11)\quad \frac{V}{b-a} =$$
$$\frac{F_\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\{\beta\gamma - \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)(a+b) + \tfrac{1}{3}(a^2+ab+b^2)\}$$
$$+\frac{F_\beta}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}\{\alpha\gamma - \tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma)(a+b) + \tfrac{1}{3}(a^2+ab+b^2)\}$$
$$+\frac{F_\gamma}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\{\alpha\beta - \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)(a+b) + \tfrac{1}{3}(a^2+ab+b^2)\}$$

oder

$$11^*)\quad \frac{V}{b-a} =$$
$$-\frac{F_\alpha}{(\alpha-\beta)(\gamma-\alpha)}\{\beta\gamma - \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)(a+b) + \tfrac{1}{3}(a^2+ab+b^2)\}$$
$$-\frac{F_\beta}{(\beta-\gamma)(\alpha-\beta)}\{\gamma\alpha - \tfrac{1}{2}(\gamma+\alpha)(a+b) + \tfrac{1}{3}(a^2+ab+b^2)\}$$
$$-\frac{F_\gamma}{(\gamma-\alpha)(\beta-\gamma)}\{\alpha\beta - \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)(a+b) + \tfrac{1}{3}(a^2+ab+b^2)\}.$$

Mittelst dieser Formel lässt sich also der Inhalt V des zwischen den beiden Queerschnitten F_a und F_b enthaltenen Körpers aus den Entfernungen a und b, und drei den ganz beliebigen Entfernungen α, β, γ entsprechenden Queerschnitten F_α, F_β, F_γ berechnen, natürlich immer unter der Voraussetzung, dass die Queerschnitte der durch die Gleichung

$$F_x = A + Bx + Cx^2$$

ausgedrückten Bedingung entsprechen.

Den Entfernungen α, β, γ kann man alle ganz beliebigen Werthe beilegen. Wir können also z. B., um einen ganz speciellen Fall der vorhergehenden allgemeinen Formel zu betrachten,

$$\alpha = a,\ \beta = \tfrac{1}{2}(a+b),\ \gamma = b$$

setzen. Dann ist

$$\alpha - \beta = a - \tfrac{1}{2}(a+b) = -\tfrac{1}{2}(b-a),$$
$$\beta - \gamma = \tfrac{1}{2}(a+b) - b = -\tfrac{1}{2}(b-a),$$
$$\gamma - \alpha = b - a;$$

so wie

$$\alpha + \beta = a + \tfrac{1}{2}(a+b) = \tfrac{1}{2}(3a+b),$$
$$\beta + \gamma = \tfrac{1}{2}(a+b) + b = \tfrac{1}{2}(a+3b),$$
$$\gamma + \alpha = b + a;$$

und wir erhalten ohne Schwierigkeit:

$$\beta\gamma - \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)(a+b) + \tfrac{1}{3}(a^2+ab+b^2) = \tfrac{1}{12}(b-a)^2,$$
$$\gamma\alpha - \tfrac{1}{2}(\gamma+\alpha)(a+b) + \tfrac{1}{3}(a^2+ab+b^2) = -\tfrac{1}{6}(b-a)^2,$$
$$\alpha\beta - \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)(a+b) + \tfrac{1}{3}(a^2+ab+b^2) = \tfrac{1}{12}(b-a)^2.$$

Führt man diese Werthe in die Gleichung 11) ein, so erhält man

$$12)\quad V = \tfrac{1}{6}(b-a)\{F_a + 4F_{\frac{1}{2}(a+b)} + F_b\}$$

oder

$$13)\quad V = \tfrac{1}{3}(b-a)\{2F_{\frac{1}{2}(a+b)} + \tfrac{1}{2}(F_a+F_b)\},$$

und kann die in diesen Gleichungen enthaltenen Sätze auf folgende Art aussprechen:

Wenn die Flächenräume der parallelen Queerschnitte eines Körpers ganze rationale algebraische Functionen des zweiten Grades ihrer gehörig als positiv oder als negativ betrachteten Entfernungen von einem bestimmten Punkte als Pol sind, so wird der körperliche Inhalt eines jeden zwischen zwei parallelen Queerschnitten als seinen Endflächen liegenden Theils eines solchen Körpers erhalten, wenn man zu der Summe der Flächenräume der beiden Endflächen das Vierfache des Flächen-

raums des zwischen den beiden Endflächen in der Mitte liegenden Queerschnitts addirt, und die Summe mit dem sechsten Theile der Entfernung der beiden Endflächen von einander multiplicirt;

oder:

Wenn die Flächenräume der parallelen Queerschnitte eines Körpers ganze rationale algebraische Functionen des zweiten Grades ihrer gehörig als positiv oder als negativ betrachteten Entfernungen von einem bestimmten Punkte als Pol sind, so wird der körperliche Inhalt eines jeden zwischen zwei parallelen Queerschnitten als seinen Endflächen liegenden Theils eines solchen Körpers erhalten, wenn man zu dem arithmetischen Mittel zwischen den Flächenräumen der beiden Endflächen das Doppelte des Flächenraums des zwischen den beiden Endflächen in der Mitte liegenden Queerschnitts addirt und die Summe mit dem dritten Theile der Entfernung der beiden Endflächen von einander multiplicirt.

Man hat aber nicht zu übersehen, dass diese Sätze, denen es auch noch besonders zur Empfehlung gereichen dürfte, dass sie sich sehr leicht dem Gedächtnisse einprägen lassen, nur ganz specielle Fälle des in der Formel 11) oder 11*), mittelst welcher sich der Inhalt eines jeden solchen Körpers wie der im Vorhergehenden betrachteten aus drei beliebigen seiner parallelen Queerschnitte berechnen lässt, enthaltenen allgemeinen Satzes sind.

V.

Die Anwendung der vorhergehenden Sätze durch Beispiele zu erläutern, dürfte an diesem Orte fast als überflüssig erscheinen, indem ein Jeder gewiss sogleich übersieht, dass die in der elementaren Stereometrie vorkommenden und die durch Umdrehung der Kegelschnitte erzeugten Körper fast alle in die im Vorhergehenden betrachtete Kategorie gehören. Jedoch mag darüber Folgendes bemerkt werden.

1. Haben wir z. B. eine Pyramide, so ist nach einem bekannten stereometrischen Elementarsatze in Bezug auf die Spitze der Pyramide als Pol

$$F_x = Cx^2,$$

wo C eine Constante bezeichnet, indem nämlich bekanntlich die einander parallelen Queerschnitte den Quadraten ihrer Entfernungen von der Spitze der Pyramide gerade proportional sind. Also haben wir in diesem Falle die folgenden Gleichungen:

$$F_a = Ca^2,$$
$$F_b = Cb^2,$$
$$F_{\frac{1}{2}(a+b)} = \tfrac{1}{4}C(a+b)^2.$$

Aus den beiden ersten dieser Gleichungen folgt

$$F_a . F_b = C^2 a^2 b^2, \sqrt{F_a . F_b} = Cab;$$

und aus der dritten Gleichung ergiebt sich also

$$4F_{\frac{1}{2}(a+b)} = Ca^2 + Cb^2 + 2Cab$$
$$= F_a + F_b + 2\sqrt{F_a . F_b}.$$

Folglich ist

$$F_a + 4F_{\frac{1}{2}(a+b)} + F_b = 2(F_a + \sqrt{F_a . F_b} + F_b);$$

also nach der Formel 12):

$$14) \quad V = \tfrac{1}{3}(b-a)(F_a + \sqrt{F_a . F_b} + F_b),$$

oder wenn die beiden Grundflächen und die Höhe einer sogenannten abgekürzten oder abgestumpften Pyramide respective durch f, f' und h bezeichnet werden, der körperliche Inhalt V einer solchen Pyramide:

$$15) \quad V = \tfrac{1}{3}h(f + \sqrt{ff'} + f'),$$

welches die aus der elementaren Stereometrie bekannte Formel ist.

Wie man von der Pyramide zum Prisma, zum Kegel und Cylinder übergehen kann, ist aus den Elementen der Stereometrie bekannt.

2. Für die Ellipse und Hyperbel ist bekanntlich, wenn m und n die beiden Halbaxen bezeichnen, die Gleichung

$$y^2 = \pm \frac{n^2}{m^2}(m^2 - x^2),$$

wo das obere Zeichen der Ellipse, das untere der Hyperbel entspricht. Weil nun für das durch Umdrehung der Ellipse oder Hyperbel um die Axe m entstandene Ellipsoid oder Hyperboloid offenbar

$$F_x = \pi y^2$$

ist, so gilt in diesem Falle, wenn A und C Constanten bezeichnen, die Gleichung

$$F_x = A + Cx^2.$$

Es ist also

$$F_a = A + Ca^2,$$
$$F_b = A + Cb^2,$$
$$F_{\frac{1}{2}(a+b)} = A + \tfrac{1}{4}C(a+b)^2;$$

folglich

$$A = \frac{a^2 F_b - b^2 F_a}{a^2 - b^2},\quad C = \frac{F_a - F_b}{a^2 - b^2};$$

und daher

$$4F_{\frac{1}{2}(a+b)} = \frac{(a+b)^2(F_a - F_b) + 4(a^2 F_b - b^2 F_a)}{a^2 - b^2},$$

also

$$F_a + 4F_{\frac{1}{2}(a+b)} + F_b$$

$$= \frac{(a^2 - b^2)(F_a + F_b) + (a+b)^2(F_a - F_b) + 4(a^2 F_b - b^2 F_a)}{a^2 - b^2},$$

woraus sich ferner leicht

$$F_a + 4F_{\frac{1}{2}(a+b)} + F_b$$

$$= \frac{(2a^2 - 4b^2 + 2ab)F_a - (2b^2 - 4a^2 + 2ab)F_b}{a^2 - b^2}$$

oder

$$F_a + 4F_{\frac{1}{2}(a+b)} + F_b$$

$$= 2\frac{(a^2 - 2b^2 + ab)F_a - (b^2 - 2a^2 + ab)F_b}{a^2 - b^2}$$

ergiebt. Folglich ist nach 12)

$$16)\quad V = -\frac{(a^2 - 2b^2 + ab)F_a - (b^2 - 2a^2 + ab)F_b}{3(a+b)}.$$

Nun ist aber, indem immer das obere Zeichen dem Ellipsoid, das untere Zeichen dem Hyperboloid entspricht:

$$F_a = \pm \pi \frac{n^2}{m^2}(m^2 - a^2),$$

$$F_b = \pm \pi \frac{n^2}{m^2}(m^2 - b^2);$$

also nach dem Vorhergehenden

$$V = \mp \frac{\pi n^2}{3m^2} \cdot \frac{(m^2 - a^2)(a^2 - 2b^2 + ab) - (m^2 - b^2)(b^2 - 2a^2 + ab)}{a+b},$$

und folglich, wie sich hieraus leicht ergiebt:

$$V = \mp \frac{\pi n^2}{3m^2} \cdot \frac{3m^2(a^2 - b^2) - (a^4 - b^4) - ab(a^2 - b^2)}{a+b},$$

d. i.

$$17)\quad V = \mp \frac{\pi n^2}{3m^2}(a-b)\{3m^2 - (a^2 + ab + b^2)\}$$

oder

$$18)\quad V=\pm\frac{\pi n^2}{3m^2}(b-a)\{3m^2-(a^2+ab+b^2)\}.$$

Auch ist

$$2ab=a^2+b^2-(b-a)^2,$$

und folglich

$$a^2+ab+b^2=\tfrac{1}{2}\{3(a^2+b^2)-(b-a)^2\},$$

also

$$19)\quad V=\pm\frac{\pi n^2}{3m^2}(b-a)\{3m^2-\tfrac{3}{2}(a^2+b^2)+\tfrac{1}{2}(b-a)^2\}.$$

Setzen wir aber

$$\alpha^2=\pm\frac{n^2}{m^2}(m^2-a^2),$$

$$\beta^2=\pm\frac{n^2}{m^2}(m^2-b^2);$$

so ist

$$a^2+b^2=2m^2\mp\frac{m^2}{n^2}(\alpha^2+\beta^2),$$

also

$$V=\pm\frac{\pi n^2}{3m^2}(b-a)\{\tfrac{1}{2}(b-a)^2\pm\frac{3m^2}{2n^2}(\alpha^2+\beta^2)\},$$

d. i.

$$20)\quad V=\pm\frac{\pi n^2}{6m^2}(b-a)\{(b-a)^2\pm 3\frac{m^2}{n^2}(\alpha^2+\beta^2)\}.$$

Für die Kugel ist $m=n$ zu setzen und in der vorhergehenden Gleichung das obere Zeichen zu nehmen; also

$$21)\quad V=\tfrac{1}{6}\pi(b-a)\{(b-a)^2+3(\alpha^2+\beta^2)\},$$

eine aus den Elementen der Stereometrie hinreichend bekannte Formel.

3. Die Gleichung der Parabel ist bekanntlich

$$y^2=px,$$

wo p den Parameter bezeichnet; also ist für das durch Umdrehung der Parabel um ihre Axe entstandene Paraboloid in Bezug auf den Scheitel als Pol offenbar

$$F_x=Bx,$$

wo B eine Constante bezeichnet. Daher ist

$$A = \frac{a^2 F_b - b^2 F_a}{a^2 - b^2},\quad C = \frac{F_a - F_b}{a^2 - b^2};$$

und daher

$$4F_{\frac{1}{2}(a+b)} = \frac{(a+b)^2(F_a - F_b) + 4(a^2 F_b - b^2 F_a)}{a^2 - b^2},$$

also

$$F_a + 4F_{\frac{1}{2}(a+b)} + F_b$$
$$= \frac{(a^2 - b^2)(F_a + F_b) + (a+b)^2(F_a - F_b) + 4(a^2 F_b - b^2 F_a)}{a^2 - b^2},$$

woraus sich ferner leicht

$$F_a + 4F_{\frac{1}{2}(a+b)} + F_b$$
$$= \frac{(2a^2 - 4b^2 + 2ab)F_a - (2b^2 - 4a^2 + 2ab)F_b}{a^2 - b^2}$$

oder

$$F_a + 4F_{\frac{1}{2}(a+b)} + F_b$$
$$= 2\frac{(a^2 - 2b^2 + ab)F_a - (b^2 - 2a^2 + ab)F_b}{a^2 - b^2}$$

ergiebt. Folglich ist nach 12)

$$16)\quad V = -\frac{(a^2 - 2b^2 + ab)F_a - (b^2 - 2a^2 + ab)F_b}{3(a+b)}.$$

Nun ist aber, indem immer das obere Zeichen dem Ellipsoid, das untere Zeichen dem Hyperboloid entspricht:

$$F_a = \pm \pi \frac{n^2}{m^2}(m^2 - a^2),$$

$$F_b = \pm \pi \frac{n^2}{m^2}(m^2 - b^2);$$

also nach dem Vorhergehenden

$$V = \mp \frac{\pi n^2}{3m^2} \cdot \frac{(m^2 - a^2)(a^2 - 2b^2 + ab) - (m^2 - b^2)(b^2 - 2a^2 + ab)}{a+b},$$

und folglich, wie sich hieraus leicht ergiebt:

$$V = \mp \frac{\pi n^2}{3m^2} \cdot \frac{3m^2(a^2 - b^2) - (a^4 - b^4) - ab(a^2 - b^2)}{a+b},$$

d. i.

$$17)\quad V = \mp \frac{\pi n^2}{3m^2}(a-b)\{3m^2 - (a^2 + ab + b^2)\}$$

oder

$$18)\quad V=\pm\frac{\pi n^2}{3m^2}(b-a)\{3m^2-(a^2+ab+b^2)\}.$$

Auch ist

$$2ab=a^2+b^2-(b-a)^2,$$

und folglich

$$a^2+ab+b^2=\tfrac{1}{2}\{3(a^2+b^2)-(b-a)^2\},$$

also

$$19)\quad V=\pm\frac{\pi n^2}{3m^2}(b-a)\{3m^2-\tfrac{3}{2}(a^2+b^2)+\tfrac{1}{2}(b-a)^2\}.$$

Setzen wir aber

$$\alpha^2=\pm\frac{n^2}{m^2}(m^2-a^2),$$

$$\beta^2=\pm\frac{n^2}{m^2}(m^2-b^2);$$

so ist

$$a^2+b^2=2m^2\mp\frac{m^2}{n^2}(\alpha^2+\beta^2),$$

also

$$V=\pm\frac{\pi n^2}{3m^2}(b-a)\{\tfrac{1}{2}(b-a)^2\pm\frac{3m^2}{2n^2}(\alpha^2+\beta^2)\},$$

d. i.

$$20)\quad V=\pm\frac{\pi n^2}{6m^2}(b-a)\{(b-a)^2\pm3\frac{m^2}{n^2}(\alpha^2+\beta^2)\}.$$

Für die Kugel ist $m=n$ zu setzen und in der vorhergehenden Gleichung das obere Zeichen zu nehmen; also

$$21)\quad V=\tfrac{1}{6}\pi(b-a)\{(b-a)^2+3(\alpha^2+\beta^2)\},$$

eine aus den Elementen der Stereometrie hinreichend bekannte Formel.

3. Die Gleichung der Parabel ist bekanntlich

$$y^2=px,$$

wo p den Parameter bezeichnet; also ist für das durch Umdrehung der Parabel um ihre Axe entstandene Paraboloid in Bezug auf den Scheitel als Pol offenbar

$$F_x=Bx,$$

wo B eine Constante bezeichnet. Daher ist

$$F_a = Ba,$$
$$F_b = Bb,$$
$$F_{\frac{1}{2}(a+b)} = \tfrac{1}{2}B(a+b);$$

und folglich

$$F_a + 4F_{\frac{1}{2}(a+b)} + F_b = 3B(a+b).$$

Also ist nach 12)

$$V = \tfrac{1}{2}B(b-a)(b+a) = \tfrac{1}{2}B(b^2-a^2).$$

Nun ist aber nach dem Obigen

$$F_x = \pi y^2 = \pi px = Bx,$$

also $B = \pi p$, und folglich

$$22) \quad V = \tfrac{1}{2}\pi p(b^2-a^2).$$

Setzt man

$$\alpha^2 = pa, \ \beta^2 = pb;$$

so ist

$$a+b = \frac{1}{p}(\alpha^2+\beta^2),$$

und folglich nach dem Vorhergehenden offenbar auch

$$23) \quad V = \tfrac{1}{2}\pi(b-a)(\alpha^2+\beta^2),$$

wo $b-a$ die Höhe des parabolischen Körpers von dem Inhalte V ist.

4. Uebrigens scheint mir hier der schicklichste Ort zu sein, zu bemerken, dass, wenn die Queerschnitte eines Körpers wie im vorhergehenden Beispiele bei dem Paraboloid bloss ganze rationale algebraische Functionen des ersten Grades ihrer Entfernungen von einem gewissen Pole sind, so dass im Allgemeinen

$$F_x = A + Bx$$

ist, dann schon zwei Queerschnitte im Allgemeinen zur Inhaltsbestimmung hinreichen. Auf ganz ähnliche Art wie oben, unter Anwendung ganz analoger Bezeichnungen, erhält man nämlich in diesem Falle

$$24) \quad V = (b-a)\{A + \tfrac{1}{2}B(a+b)\}.$$

Für zwei den Entfernungen α, β entsprechende Queerschnitte F_α, F_β hat man aber die Gleichungen

$$F_\alpha = A + B\alpha,$$
$$F_\beta = A + B\beta;$$

aus denen sich sogleich

$$A = -\frac{\beta F_\alpha}{\alpha-\beta} - \frac{\alpha F_\beta}{\beta-\alpha},$$
$$B = \frac{F_\alpha}{\alpha-\beta} + \frac{F_\beta}{\beta-\alpha}$$

ergiebt. Folglich ist nach 24):

$$25)\quad \frac{V}{b-a} = -\frac{F_\alpha}{\alpha-\beta}\{\beta-\tfrac{1}{2}(a+b)\}$$
$$-\frac{F_\beta}{\beta-\alpha}\{\alpha-\tfrac{1}{2}(a+b)\}.$$

Setzt man $\alpha=a$, $\beta=b$; so ist

$$\beta-\tfrac{1}{2}(a+b)=\tfrac{1}{2}(b-a),$$
$$\alpha-\tfrac{1}{2}(a+b)=-\tfrac{1}{2}(b-a);$$

folglich nach 25):

$$26)\quad V=\tfrac{1}{2}(b-a)(F_a+F_b).$$

Dass bei dem Paraboloid diese Formel auf der Stelle zu dem Ausdrucke 23) führt, fällt sogleich in die Augen.

Wären die Queerschnitte constante Grössen, und folglich im Allgemeinen

$$F_x=A,$$

so weiss man aus der Lehre vom Prisma, dass schon ein Queerschnitt zur Inhaltsbestimmung hinreicht, indem das Product desselben in die Höhe des Körpers bekanntlich dessen Inhalt giebt.

5. Die einander entsprechenden Winkel aller parallelen Queerschnitte eines Obelisken *) sind offenbar sämmtlich einander gleich, und die Winkel der einzelnen Queerschnitte können daher für jeden Obelisken als constante Grössen betrachtet werden.

Sei nun x die Entfernung eines Queerschnitts F_x des Obelisken von derjenigen seiner beiden Endflächen, welche die kleineren Seiten hat, und h sei die Höhe des Obelisken. Ferner seien m' und m'' zwei einander parallele Seiten der beiden Endflächen des Obelisken, so dass $m'<m''$ ist, und m sei die denselben parallele Seite des Queerschnitts F_x; so erhellet mittelst einer sehr einfachen geometrischen Betrachtung auf der Stelle die Richtigkeit der Proportion

$$m''-m':m-m'=h:x,$$

aus welcher ferner sogleich

$$m=m'+\frac{m''-m'}{h}x$$

*) Archiv. Thl. IX. S. 83.

folgt. Weil nun h, m', m'' für jeden Obelisken als constante Grössen zu betrachten sind, so ist m, und eben so natürlich auch jede andere Seite des Queerschnitts F_x, eine ganze rationale algebraische Function des ersten Grades von x. Aus der bekannten allgemeinen polygonometrischen Formel für den Inhalt jeder geradlinigen Figur geht aber hervor, dass der Flächeninhalt F_x alle Seiten der entsprechenden Figur nur in der zweiten Dimension enthält, d. h. bloss von den Producten dieser Seiten, zu je zweien mit einander verbunden, abhängt, wobei man die schon vorher gemachte Bemerkung, dass hier die Winkel der Figur als constante Grössen zu betrachten sind, nicht zu übersehen hat. Hält man dies mit dem Obigen zusammen, so ergiebt sich auf ganz unzweideutige Weise, dass im vorliegenden Falle F_x eine ganze rationale algebraische Function des zweiten Grades von x ist *), und dass folglich der in IV. bewiesene allgemeine Satz auch auf Obelisken Anwendung findet.

Sind also F, F', F'' respective die $\begin{matrix}\text{obere}\\\text{untere}\end{matrix}$ Endfläche, der mittlere Queerschnitt, die $\begin{matrix}\text{untere}\\\text{obere}\end{matrix}$ Endfläche eines Obelisken, h seine Höhe, und wie gewöhnlich V sein körperlicher Inhalt; so ist nach 12):

$$27) \quad V = \tfrac{1}{6}h(F + 4F' + F''),$$

welche Formel ich für die bequemste zur Inhaltsbestimmung eines Obelisken in der Praxis halte, und mich daher bei der Ableitung des im Archiv. Thl. IX. S. 85. von mir bewiesenen Koppe'schen Ausdrucks für den körperlichen Inhalt des Obelisken aus derselben jetzt nicht aufhalten will.

Ueberhaupt werden die vorhergehenden Beispiele schon hinreichend sein, um die grosse Fruchtbarkeit des in IV. bewiesenen allgemeinen Satzes bei der Inhaltsbestimmuug der Körper zu zeigen. Man kann diesen Satz auch bei der Bestimmung des Inhalts der Fässer und anderer Körper mit Vortheil in Anwendung bringen, was weiter zu entwickeln mich jedoch für jetzt zu sehr von meinem eigentlichen Zwecke abführen würde, und auch füglich dem eignen Nachdenken des Lesers überlassen werden kann.

VI.

Es erhellet leicht, dass sich die vorhergehenden Betrachtungen verallgemeinern lassen. Nimmt man nämlich, um noch einen Schritt weiter zu gehen, an, dass die Queerschnitte eines Körpers ganze rationale algebraische Functionen des dritten Grades ihrer Entfernungen von einem gewissen bestimmten Punkte als Pol seien, und setzt demzufolge im Allgemeinen

---

*) Einer ganz ähnlichen Betrachtung hat sich auch **Brix** a. a. O. S. 137. und S. 138. bedient, und das unmittelbar Vorhergehende ist im Wesentlichen ganz von ihm entlehnt, nur etwas allgemeiner gehalten.

$$28)\quad F_x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3,$$

so gelangt man durch ganz ähnliche Betrachtungen wie oben und mit Anwendung analoger Bezeichnungen leicht zu der Gleichung

$$29)\quad V = A(b-a) + \tfrac{1}{2}B(b^2-a^2) + \tfrac{1}{3}C(b^3-a^3) + \tfrac{1}{4}D(b^4-a^4)$$

oder

$$30)\quad V = (b-a)\{A + \tfrac{1}{2}B(a+b) + \tfrac{1}{3}C(a^2+ab+b^2) + \tfrac{1}{4}D(a^3+a^2b+ab^2+b^3)\}.$$

Die vier in der Gleichung

$$F_x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$$

enthaltenen Constanten A, B, C, D kann man aber aus vier den gegebenen Entfernungen α, β, γ, δ vom Pole entsprechenden Queerschnitten F_α, F_β, F_γ, F_δ bestimmen, indem man zwischen den vier in Rede stehenden Constanten, wenn vier solcher Queerschnitte als gegeben betrachtet werden, die vier folgenden Gleichungen hat:

$$\begin{aligned}
F_\alpha &= A + B\alpha + C\alpha^2 + D\alpha^3,\\
F_\beta &= A + B\beta + C\beta^2 + D\beta^3,\\
F_\gamma &= A + B\gamma + C\gamma^2 + D\gamma^3,\\
F_\delta &= A + B\delta + C\delta^2 + D\delta^3.
\end{aligned}$$

Um diese vier Gleichungen in Bezug auf A, B, C, D als unbekannte Grössen aufzulösen, eliminire man zuerst A. Dadurch erhält man

$$\begin{aligned}
B(\alpha-\beta) + C(\alpha^2-\beta^2) + D(\alpha^3-\beta^3) &= F_\alpha - F_\beta,\\
B(\beta-\gamma) + C(\beta^2-\gamma^2) + D(\beta^3-\gamma^3) &= F_\beta - F_\gamma,\\
B(\gamma-\delta) + C(\gamma^2-\delta^2) + D(\gamma^3-\delta^3) &= F_\gamma - F_\delta;
\end{aligned}$$

also, wenn man diese Gleichungen nach der Reihe mit $\alpha-\beta$, $\beta-\gamma$, $\gamma-\delta$ dividirt:

$$B + C(\alpha+\beta) + D(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2) = \frac{F_\alpha - F_\beta}{\alpha-\beta},$$

$$B + C(\beta+\gamma) + D(\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2) = \frac{F_\beta - F_\gamma}{\beta-\gamma},$$

$$B + C(\gamma+\delta) + D(\gamma^2+\gamma\delta+\delta^2) = \frac{F_\gamma - F_\delta}{\gamma-\delta}.$$

Eliminirt man jetzt ferner B, so erhält man

$$C(\alpha-\gamma) + D\{\alpha^2-\gamma^2+\beta(\alpha-\gamma)\}$$
$$= \frac{(\beta-\gamma)F_\alpha + (\gamma-\alpha)F_\beta + (\alpha-\beta)F_\gamma}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)},$$

$$C(\beta-\delta)+D\{\beta^2-\delta^2+\gamma(\beta-\delta)\}$$

$$=\frac{(\gamma-\delta)F\beta+(\delta-\beta)F\gamma+(\beta-\gamma)F\delta}{(\beta-\gamma)(\gamma-\delta)};$$

also, wenn man diese Gleichungen mit $\alpha-\gamma$, $\beta-\delta$ dividirt:

$$C+D(\alpha+\beta+\gamma)$$

$$=\frac{F\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{F\beta}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}+\frac{F\gamma}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)},$$

$$C+D(\beta+\gamma+\delta)$$

$$=\frac{F\beta}{(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}+\frac{F\gamma}{(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)}+\frac{F\delta}{(\delta-\beta)(\delta-\gamma)}.$$

Eliminirt man nun endlich C, so ergiebt sich

$$D=\frac{F\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}$$

$$+\frac{F\beta}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}$$

$$+\frac{F\gamma}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)}$$

$$+\frac{F\delta}{(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)}.$$

Führt man diesen Ausdruck von D in die eine der beiden Gleichungen ein, welche bloss die Unbekannten C, D enthalten, so ergiebt sich mittelst leichter Rechnung für C der folgende Ausdruck:

$$C=-\frac{(\beta+\gamma+\delta)F\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}$$

$$-\frac{(\alpha+\gamma+\delta)F\beta}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}$$

$$-\frac{(\alpha+\beta+\delta)F\gamma}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)}$$

$$-\frac{(\alpha+\beta+\gamma)F\delta}{(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)}.$$

Führt man nun die beiden vorhergehenden Ausdrücke von C, D in eine der drei nur die Unbekannten B, C, D enthaltenden Gleichungen ein, so ergiebt sich für B leicht die folgende Formel:

$$B = \frac{(\beta\gamma+\gamma\delta+\delta\beta)F_\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)} + \frac{(\alpha\gamma+\gamma\delta+\delta\alpha)F_\beta}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)} + \frac{(\alpha\beta+\beta\delta+\delta\alpha)F_\gamma}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)} + \frac{(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)F_\delta}{(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)}.$$

Führt man endlich die gefundenen Ausdrücke von B, C, D n eine der vier die Unbekannten A, B, C, D enthaltenden Gleichungen ein, so erhält man ohne Schwierigkeit für A den folgenden Ausdruck:

$$A = -\frac{\beta\gamma\delta F_\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)} - \frac{\alpha\gamma\delta F_\beta}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)} - \frac{\alpha\beta\delta F_\gamma}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)} - \frac{\alpha\beta\gamma F_\delta}{(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)}.$$

Führt man nun die gefundenen Ausdrücke der vier Constanten A, B, C, D in die Gleichung 27) ein, so erhält man für

$$\frac{V}{b-a},$$

en folgenden Ausdruck:

$$31)\quad \frac{V}{b-a} = -\frac{F_\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}\left\{\begin{array}{l}\beta\gamma\delta - \frac{1}{2}(\beta\gamma+\gamma\delta+\delta\beta)(a+b)\\ +\frac{1}{3}(\beta+\gamma+\delta)(a^2+ab+b^2)\\ -\frac{1}{4}(a^3+a^2b+ab^2+b^3)\end{array}\right\}$$
$$-\frac{F_\beta}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}\left\{\begin{array}{l}\alpha\gamma\delta - \frac{1}{2}(\alpha\gamma+\gamma\delta+\delta\alpha)(a+b)\\ +\frac{1}{3}(\alpha+\gamma+\delta)(a^2+ab+b^2)\\ -\frac{1}{4}(a^3+a^2b+ab^2+b^3)\end{array}\right\}$$
$$-\frac{F_\gamma}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)}\left\{\begin{array}{l}\alpha\beta\delta - \frac{1}{2}(\alpha\beta+\beta\delta+\delta\alpha)(a+b)\\ +\frac{1}{3}(\alpha+\beta+\delta)(a^2+ab+b^2)\\ -\frac{1}{4}(a^3+a^2b+ab^2+b^3)\end{array}\right\}$$
$$-\frac{F_\delta}{(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)}\left\{\begin{array}{l}\alpha\beta\gamma - \frac{1}{2}(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)(a+b)\\ +\frac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma)(a^2+ab+b^2)\\ -\frac{1}{4}(a^3+a^2b+ab^2+b^3)\end{array}\right\}.$$

Für α, β, γ, δ lassen sich in dieser allgemeinen Formel alle möglichen Werthe setzen. Setzt man nun aber

$$\begin{aligned}
\alpha &= a,\\
\beta &= a + \tfrac{1}{3}(b-a) = \tfrac{1}{3}(2a+b),\\
\gamma &= a + \tfrac{2}{3}(b-a) = \tfrac{1}{3}(a+2b),\\
\delta &= b;
\end{aligned}$$

so erhält man nach leichter Rechnung:

$$\left.\begin{aligned}
&\beta\gamma\delta - \tfrac{1}{2}(\beta\gamma+\gamma\delta+\delta\beta)(a+b)\\
&\quad+\tfrac{1}{3}(\beta+\gamma+\delta)(a^2+ab+b^2)\\
&\quad-\tfrac{1}{4}(a^3+a^2b+ab^2+b^3)
\end{aligned}\right\} = \tfrac{1}{36}(b-a)^3,$$

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha\gamma\delta - \tfrac{1}{2}(\alpha\gamma+\gamma\delta+\delta\alpha)(a+b)\\
&\quad+\tfrac{1}{3}(\alpha+\gamma+\delta)(a^2+ab+b^2)\\
&\quad-\tfrac{1}{4}(a^3+a^2b+ab^2+b^3)
\end{aligned}\right\} = -\tfrac{1}{36}(b-a)^3,$$

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha\beta\delta - \tfrac{1}{2}(\alpha\beta+\beta\delta+\delta\alpha)(a+b)\\
&\quad+\tfrac{1}{3}(\alpha+\beta+\delta)(a^2+ab+b^2)\\
&\quad-\tfrac{1}{4}(a^3+a^2b+ab^2+b^3)
\end{aligned}\right\} = \tfrac{1}{36}(b-a)^3,$$

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha\beta\gamma - \tfrac{1}{2}(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)(a+b)\\
&\quad+\tfrac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma)(a^2+ab+b^2)\\
&\quad-\tfrac{1}{4}(a^3+a^2b+ab^2+b^3)
\end{aligned}\right\} = -\tfrac{1}{36}(b-a)^3.$$

Weil nun ferner, wie man ebenfalls leicht findet,

$$\begin{aligned}
(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta) &= -\tfrac{2}{9}(b-a)^3;\\
(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta) &= \tfrac{2}{27}(b-a)^3,\\
(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta) &= -\tfrac{2}{27}(b-a)^3,\\
(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma) &= \tfrac{2}{9}(b-a)^3
\end{aligned}$$

ist; so ist nach 28):

$$32)\quad V = \tfrac{1}{8}(b-a)\{F_a + 3F_{\frac{1}{3}(2a+b)} + 3F_{\frac{1}{3}(a+2b)} + F_b\}.$$

Diese Betrachtungen noch weiter fortzuführen und noch mehr zu verallgemeinern, liegt jetzt nicht in meiner Absicht, indem ich mich in dieser Abhandlung vorzugsweise in dem Bereiche elementarer Betrachtungen halten, und das Obige zur Einführung in den Elementar-Unterricht und in die Elementar-Lehrbücher empfehlen wollte. Ich werde jedoch vielleicht späterhin in grösserer Allgemeinheit auf diesen Gegenstand zurückkommen.

VII.

Wenn man einen Körper hat, bei welchem man sich zu der

Annahme berechtigt halten darf, dass wenigstens in kleinen Intervallen seine parallelen Queerschnitte in Beziehung auf einen gewissen Pol annähernd der Bedingung

$$F_x = A + Bx + Cx^2$$

genügen, und der körperliche Inhalt V eines zwischen zwei gewissen parallelen Queerschnitten liegenden Theils desselben ermittelt werden soll; so theile man die Höhe h dieses Theils, wenn n eine beliebige positive ganze Zahl bezeichnet, in $2n$ gleiche Theile, und bestimme die Flächenräume

$$F_0,\ F_1,\ F_2,\ F_3,\ F_4, \ldots . F_{2n}$$

der allen einzelnen Theilpunkten der Höhe entsprechenden Queerschnitte; so ist nach 12) wenigstens näherungsweise und mit desto grösserer Genauigkeit, je grösser n ist:

$$\begin{aligned} V = & \tfrac{1}{6}.2\frac{h}{2n}(F_0 + 4F_1 + F_2) \\ & + \tfrac{1}{6}.2\frac{h}{2n}(F_2 + 4F_3 + F_4) \\ & + \tfrac{1}{6}.2\frac{h}{2n}(F_4 + 4F_5 + F_6) \\ & + \tfrac{1}{6}.2\frac{h}{2n}(F_6 + 4F_7 + F_8) \\ & \quad \text{u. s. w.} \\ & + \tfrac{1}{6}.2\frac{h}{2n}(F_{2n-4} + 4F_{2n-3} + F_{2n-2}) \\ & + \tfrac{1}{6}.2\frac{h}{2n}(F_{2n-2} + 4F_{2n-1} + F_{2n}), \end{aligned}$$

also

$$33)\quad V = \tfrac{1}{6}.\frac{h}{n}(F_0 + 4F_1 + 2F_2 + 4F_3 + 2F_4 + 4F_5 + \ldots . + 2F_{2n-2} + 4F_{2n-1} + F_{2n}).$$

Diese Näherungsformel zur Bestimmung der körperlichen Räume ist zuerst von dem schwedischen Vice-Admiral Chapman in seinem Werke über die Schiffsbaukunst: Traité de la construction des vaisseaux, traduit du Suédois de M. Chapman par Vial de Clairbois. Brest. 1781. gegeben worden, und späterhin in mehrere andere Werke, namentlich über praktische Mechanik und Maschinenlehre, wo sie hauptsächlich in der Lehre vom Schwerpunkte zur Anwendung kommt, übergegangen. Die theoretische Bedingung, welche nothwendig erfüllt sein muss, wenn diese Formel mit Genauigkeit anwendbar sein soll, habe ich im Vorhergehenden mit möglichster Deutlichkeit und Bestimmtheit hervorzuheben gesucht. Wenn nun aber diese Formel, wie die Erfahrung gelehrt hat, in der That in den meisten Fällen zu sehr

genauen Resultaten führt, so kann nach meiner Ansicht der Grund nur darin liegen, dass die Bedingung

$$F_x = A + Bx + Cx^2,$$

wie aus dem Obigen erhellet, für die gerade Linie, den Kreis, überhaupt alle drei Kegelschnitte völlig genau erfüllt ist, und dass also die Formel von Chapman eigentlich alle die so eben genannten, in der Natur bekanntlich überhaupt sehr häufig hervortretenden Curven, und vielleicht noch mehrere andere, unter sich begreift; dieselbe muss also, wenn die Oberfläche eines Körpers wenigstens in kleinen Intervallen annähernd überhaupt nach einer dieser Curven gekrümmt ist, nothwendig immer zu sehr genauen Resultaten führen, und scheint also die Aufmerksamkeit, welche ihr namentlich von praktischen Schriftstellern vielfach geschenkt worden ist, in der That vollkommen zu verdienen.

In dem Falle, wenn für kleine Intervalle näherungsweise

$$F_x = A + Bx$$

gesetzt werden könnte, müsste man, auf ähnliche Art wie vorher in $2n$, jetzt die Höhe h des Körpers in n gleiche Theile theilen, und hätte dann nach 26) näherungsweise, und zwar desto genauer, je grösser n angenommen würde,

$$V = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{h}{n}(F_0 + F_1)$$

$$+ \tfrac{1}{2} \cdot \frac{h}{n}(F_1 + F_2)$$

$$+ \tfrac{1}{2} \cdot \frac{h}{n}(F_2 + F_3)$$

$$+ \tfrac{1}{2} \cdot \frac{h}{n}(F_3 + F_4)$$

u. s. w.

$$+ \tfrac{1}{2} \cdot \frac{h}{n}(F_{n-2} + F_{n-1})$$

$$+ \tfrac{1}{2} \cdot \frac{h}{n}(F_{n-1} + F_n),$$

also

34) $$V = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{h}{n}(F_0 + 2F_1 + 2F_2 + 2F_3 + \ldots + 2F_{n-1} + F_n),$$

welche Formel aus, nach den vorher gemachten Bemerkungen leicht begreiflichen Gründen im Allgemeinen jedoch nicht so genaue Resultate wie die Formel 33) gewähren kann.

VIII.

Dürfte man sich zu der Annahme berechtigt halten, dass die einander parallelen Queerschnitte eines Körpers wenigstens näherungsweise in kleinen Intervallen der Bedingung

$$F_x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$$

genügten, so würde man, unter Anwendung ganz ähnlicher Bezeichnungen wie vorher, die Höhe h in $3n$ gleiche Theile theilen, und erhielte dann nach 29), näherungsweise und mit desto grösserer Genauigkeit, je grösser n ist, für V den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}
V = {} & \tfrac{1}{8}.3\frac{h}{3n}(F_0 + 3F_1 + 3F_2 + F_3) \\
& + \tfrac{1}{8}.3\frac{h}{3n}(F_3 + 3F_4 + 3F_5 + F_6) \\
& + \tfrac{1}{8}.3\frac{h}{3n}(F_6 + 3F_7 + 3F_8 + F_9) \\
& + \tfrac{1}{8}.3\frac{h}{3n}(F_9 + 3F_{10} + 3F_{11} + F_{12}) \\
& \quad \text{u. s. w.} \\
& + \tfrac{1}{8}.3\frac{h}{3n}(F_{3n-6} + 3F_{3n-5} + 3F_{3n-4} + F_{3n-3}) \\
& + \tfrac{1}{8}.3\frac{h}{3n}(F_{3n-3} + 3F_{3n-2} + 3F_{3n-1} + F_{3n}),
\end{aligned}$$

also, wie hieraus leicht folgt:

$$35)\quad V = \tfrac{1}{8}.\frac{h}{n}\left\{\begin{aligned}
& F_0 + 3F_1 + 3F_2 + 2F_3 \\
& + 3F_4 + 3F_5 + 2F_6 \\
& + 3F_7 + 3F_8 + 2F_9 \\
& + 3F_{10} + 3F_{11} + 2F_{12} \\
& \quad \text{u. s. w.} \\
& + 3F_{3n-5} + 3F_{3n-4} + 2F_{3n-3} \\
& + 3F_{3n-2} + 3F_{3n-1} + F_{3n}
\end{aligned}\right\}.$$

Dass auch diese Näherungsformeln einer Verallgemeinerung fähig sein würden, bedarf nach dem Vorhergehenden kaum noch einer besondern Erinnerung.

XXIX.

Vollständige independente Auflösung der n Gleichungen des ersten Grades

$$A_1 + A_2\alpha_1 + A_3\alpha_1^2 + A_4\alpha_1^3 + \ldots + A_n\alpha_1^{n-1} = a_1,$$
$$A_1 + A_2\alpha_2 + A_3\alpha_2^2 + A_4\alpha_2^3 + \ldots + A_n\alpha_2^{n-1} = a_2,$$
$$A_1 + A_2\alpha_3 + A_3\alpha_3^2 + A_4\alpha_3^3 + \ldots + A_n\alpha_3^{n-1} = a_3,$$
$$A_1 + A_2\alpha_4 + A_3\alpha_4^2 + A_4\alpha_4^3 + \ldots + A_n\alpha_4^{n-1} = a_4,$$
u. s. w.
$$A_1 + A_2\alpha_n + A_3\alpha_n^2 + A_4\alpha_n^3 + \ldots + A_n\alpha_n^{n-1} = a_n$$

zwischen den n unbekannten Grössen

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4, \ldots A_n;$$

nebst einigen merkwürdigen arithmetischen Sätzen.

Von
dem Herausgeber.

I.

Wir wollen in der Kürze

$$\overset{\mu}{(n)} = \frac{\alpha_1^\mu}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_5)\ldots(\alpha_1-\alpha_n)}$$
$$+\frac{\alpha_2^\mu}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_5)\ldots(\alpha_2-\alpha_n)}$$
$$+\frac{\alpha_3^\mu}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_5)\ldots(\alpha_3-\alpha_n)}$$
$$+\frac{\alpha_4^\mu}{(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_5)\ldots(\alpha_4-\alpha_n)}$$
u. s. w.
$$+\frac{\alpha_n^\mu}{(\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_2)(\alpha_n-\alpha_3)(\alpha_n-\alpha_4)\ldots(\alpha_n-\alpha_{n-1})},$$

und also in analoger Bezeichnung, wenn in der vorhergehenden Gleichung $n-1$ für n gesetzt wird,

$$\overset{\mu}{(n-1)} = \frac{\alpha_1{}^\mu}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_5)\ldots.(\alpha_1-\alpha_{n-1})}$$

$$+\frac{\alpha_2{}^\mu}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_5)\ldots.(\alpha_2-\alpha_{n-1})}$$

$$+\frac{\alpha_3{}^\mu}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_5)\ldots.(\alpha_3-\alpha_{n-1})}$$

$$+\frac{\alpha_4{}^\mu}{(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_5)\ldots.(\alpha_4-\alpha_{n-1})}$$

u. s. w.

$$+\frac{\overset{\mu}{\alpha_{n-1}}}{(\alpha_{n-1}-\alpha_1)(\alpha_{n-1}-\alpha_2)(\alpha_{n-1}-\alpha_3)(\alpha_{n-1}-\alpha_4)\ldots.(\alpha_{n-1}-\alpha_{n-2})}$$

setzen.

Addirt man, um eine Relation zwischen den im Allgemeinen durch $\overset{\mu}{(n)}$ bezeichneten Grössen zu finden, die beiden vorhergehenden Gleichungen zu einander, so erhält man mittelst leichter Rechnung:

$$\overset{\mu}{(n-1)} + \overset{\mu}{(n)}$$

$$=\frac{\alpha_1{}^{\mu+1}+\alpha_1{}^\mu(1-\alpha_n)}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_5)\ldots.(\alpha_1-\alpha_n)}$$

$$+\frac{\alpha_2{}^{\mu+1}+\alpha_2{}^\mu(1-\alpha_n)}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_5)\ldots.(\alpha_2-\alpha_n)}$$

$$+\frac{\alpha_3{}^{\mu+1}+\alpha_3{}^\mu(1-\alpha_n)}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_5)\ldots..(\alpha_3-\alpha_n)}$$

$$+\frac{\alpha_4{}^{\mu+1}+\alpha_4{}^\mu(1-\alpha_n)}{(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_5)\ldots..(\alpha_4-\alpha_n)}$$

u. s. w.

$$+\frac{\alpha_{n-1}{}^{\mu+1}+\alpha^\mu{}_{n-1}(1-\alpha_n)}{(\alpha_{n-1}-\alpha_1)(\alpha_{n-1}-\alpha_2)(\alpha_{n-1}-\alpha_3)\ldots.(\alpha_{n-1}-\alpha_{n-2})(\alpha_{n-1}-\alpha_n)}$$

$$+\frac{\alpha_n{}^\mu}{(\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_2)(\alpha_n-\alpha_3)(\alpha_n-\alpha_4)\ldots..(\alpha_n-\alpha_{n-1})}.$$

Weil man nun aber

$$\alpha_n{}^\mu = \alpha_n{}^{\mu+1} + \alpha_n{}^\mu(1-\alpha_n)$$

setzen kann, so lässt sich die vorhergehende Gleichung auf den folgenden Ausdruck bringen:

$$\overset{\mu}{(n-1)}+\overset{\mu}{(n)}$$

$$=\frac{\alpha_1^{\mu+1}}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_5)\ldots.(\alpha_1-\alpha_n)}$$

$$+\frac{\alpha_2^{\mu+1}}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_5)\ldots.(\alpha_2-\alpha_n)}$$

$$+\frac{\alpha_3^{\mu+1}}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_5)\ldots.(\alpha_3-\alpha_n)}$$

u. s. w.

$$+\frac{\alpha_n^{\mu+1}}{(\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_2)(\alpha_n-\alpha_3)(\alpha_n-\alpha_4)\ldots.(\alpha_n-\alpha_{n-1})}$$

$$+\frac{\alpha_1^{\mu}(1-\alpha_n)}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_5)\ldots.(\alpha_1-\alpha_n)}$$

$$+\frac{\alpha_2^{\mu}(1-\alpha_n)}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_5)\ldots.(\alpha_2-\alpha_n)}$$

$$+\frac{\alpha_3^{\mu}(1-\alpha_n)}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_5)\ldots.(\alpha_3-\alpha_n)}$$

u. s. w.

$$+\frac{\alpha_n^{\mu}(1-\alpha_n)}{(\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_2)(\alpha_n-\alpha_3)(\alpha_n-\alpha_4)\ldots.(\alpha_n-\alpha_{n-1})},$$

also in der eingeführten Bezeichnung

$$\overset{\mu}{(n-1)}+\overset{\mu}{(n)}=\overset{\mu+1}{(n)}+(1-\alpha_n).\overset{\mu}{(n)},$$

woraus sich auf der Stelle die Relation

$$\overset{\mu+1}{(n)}=\overset{\mu}{(n-1)}+\alpha_n.\overset{\mu}{(n)}$$

ergiebt.

Zerlegt man jetzt den Bruch

$$\frac{1}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_5)\ldots.(\alpha_1-\alpha_n)}$$

nach einer aus der Theorie der Zerlegung der gebrochenen rationalen algebraischen Functionen in sogenannte einfache Brüche oder Partialbrüche sehr bekannten Regel *) in Partialbrüche, so erhält man ohne Schwierigkeit:

*) M. s. z. B. meinen Leitfaden für den ersten Unterricht in der höhern Analysis. Leipzig. 1838. S. 151.

$$\frac{1}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_5)\ldots(\alpha_1-\alpha_n)}$$

$$=\frac{1}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_5)\ldots(\alpha_2-\alpha_n)}$$

$$+\frac{1}{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_5)\ldots(\alpha_3-\alpha_n)}$$

$$+\frac{1}{(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_5)\ldots(\alpha_4-\alpha_n)}$$

u. s. w.

$$+\frac{1}{(\alpha_1-\alpha_n)(\alpha_n-\alpha_2)(\alpha_n-\alpha_3)(\alpha_n-\alpha_4)\ldots(\alpha_n-\alpha_{n-1})},$$

also

$$0=\frac{1}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_5)\ldots(\alpha_1-\alpha_n)}$$

$$+\frac{1}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_5)\ldots(\alpha_2-\alpha_n)}$$

$$+\frac{1}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_5)\ldots(\alpha_3-\alpha_n)}$$

$$+\frac{1}{(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_5)\ldots(\alpha_4-\alpha_n)}$$

u. s. w.

$$+\frac{1}{(\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_2)(\alpha_n-\alpha_3)(\alpha_n-\alpha_4)\ldots(\alpha_n-\alpha_{n-1})};$$

folglich ist

$$\overset{0}{(n)}=0.$$

Weil nun

$$\overset{1}{(2)}=\frac{\alpha_1}{\alpha_1-\alpha_2}+\frac{\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_1}=\frac{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_1)}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_1)}=1$$

ist, so erhält man mittelst der Gleichungen

$$\overset{0}{(n)}=0,\quad \overset{\mu+1}{(n)}=(\overset{\mu}{n-1})+\alpha_n.\overset{\mu}{(n)}$$

leicht nach und nach:

$$\overset{0}{(2)}=0,$$

$$\overset{1}{(2)}=1;$$

$$\overset{0}{(3)}=0,$$

$$\overset{1}{(3)}=\overset{0}{(2)}+\alpha_3.\overset{0}{(3)}=0,$$

$$\overset{2}{(3)}=\overset{1}{(2)}+\alpha_3.\overset{1}{(3)}=1;$$

$$\overset{0}{(4)}=0,$$

$$\overset{1}{(4)}=\overset{0}{(3)}+\alpha_4.\overset{0}{(4)}=0,$$

$$\overset{2}{(4)}=\overset{1}{(3)}+\alpha_4.\overset{1}{(4)}=0,$$

$$\overset{3}{(4)}=\overset{2}{(3)}+\alpha_4.\overset{2}{(4)}=1;$$

$$\overset{0}{(5)}=0,$$

$$\overset{1}{(5)}=\overset{0}{(4)}+\alpha_5.\overset{0}{(5)}=0,$$

$$\overset{2}{(5)}=\overset{1}{(4)}+\alpha_5.\overset{1}{(5)}=0,$$

$$\overset{3}{(5)}=\overset{2}{(4)}+\alpha_5.\overset{2}{(5)}=0,$$

$$\overset{4}{(5)}=\overset{3}{(4)}+\alpha_5.\overset{3}{(5)}=1;$$

u. s. w.

Das Gesetz des Fortschritts liegt hier deutlich vor Augen und wir gelangen daher durch diese Betrachtung zu dem allgemeinen Resultate, dass

$$\overset{\mu}{(n)}=0$$

für $\mu<n-1$, dagegen

$$\overset{\mu}{(n)}=1$$

für $\mu=n-1$, so dass also immer

$$\overset{n-1}{(n)}=1$$

ist.

Setzt man

$$\alpha_1=1,\ \alpha_2=2,\ \alpha_3=3,\ \alpha_4=4,\ldots.\alpha_n=n;$$

so ist überhaupt

$$\frac{\alpha^{\mu}_k}{(\alpha_k-\alpha_1)(\alpha_k-\alpha_2)....(\alpha_k-\alpha_{k-1})(\alpha_k-\alpha_{k+1})....(\alpha_k-\alpha_n)}$$
$$=\frac{k^{\mu}}{(k-1)(k-2)....1.-1.-2.-3....-(n-k)}$$
$$=\frac{(-1)^{n-k}.k^{\mu}}{1.2.3.4....(k-1).1.2.3.4....(n-k)}$$
$$=\frac{(-1)^{n-k}.(n-1)(n-2)....(n-k+1)k^{\mu}}{1.2.3.4....(k-1).1.2.3.4....(n-1)}$$
$$=\frac{(-1)^{n-k}.(n-1)_{k-1}.k^{\mu}}{1.2.3.4....(n-1)}.$$

Also ist in diesem Falle, wie man leicht findet:

$$\begin{aligned}1.2.3....(n-1).\overset{\mu}{(n)}=(-1)^{n-1}.\overset{\mu}{1}&+(-1)^{n-2}.(n-1)_1.2^{\mu}\\&+(-1)^{n-3}.(n-1)_2.3^{\mu}\\&+(-1)^{n-4}.(n-1)_3.4^{\mu}\\&+(-1)^{n-5}.(n-1)_4.5^{\mu}\\&+\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

oder

$$(-1)^{n-1}.1.2.3....(n-1).\overset{\mu}{(n)}$$
$$=1^{\mu}-(n-1)_1.2^{\mu}+(n-1)_2.3^{\mu}-(n-1)_3.4^{\mu}+(n-1)_4.5^{\mu}-....,$$

woraus sich, in Verbindung mit dem Vorhergehenden, unmittelbar ein bekannter merkwürdiger, auch für die Zahlenlehre wichtiger, arithmetischer Satz ergiebt, der gewöhnlich, und allerdings auch am leichtesten, mit Hülfe der Differenzenrechnung bewiesen wird, hier aber, als hinreichend bekannt, jetzt nicht weiter erörtert werden soll.

Man hätte vorher auch

$$\alpha_1=n,\quad \alpha_2=n-1,\quad \alpha_3=n-2,....,\alpha_n=1$$

setzen können.

Wenn man in der vorher gefundenen Gleichung

$$\overset{\mu+1}{(n)}=\overset{\mu}{(n-1)}+\alpha_n.\overset{\mu}{(n)}$$

$n-1$ für μ, also n für $\mu+1$ setzt, so wird dieselbe

$$\overset{n}{(n)}=\overset{n-1}{(n-1)}+\alpha_n.\overset{n-1}{(n)},$$

und folglich, weil nach dem Obigen

$$\overset{n-1}{(n)}=1$$

ist:

$$\overset{n}{(n)} = (\overset{n-1}{n-1}) + \alpha_n.$$

Durch successive Anwendung dieser Gleichung erhält man leicht

$$\overset{n}{(n)} = \overset{2}{(2)} + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \ldots + \alpha_n.$$

Nun ist aber

$$\overset{2}{(2)} = \frac{\alpha_1^2}{\alpha_1 - \alpha_2} + \frac{\alpha_2^2}{\alpha_2 - \alpha_1} = \frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}{\alpha_1 - \alpha_2} = \alpha_1 + \alpha_2.$$

Also ist

$$\overset{n}{(n)} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \ldots + \alpha_n,$$

was mir auch eine bemerkenswerthe Relation zu sein scheint.

II.

Die $m$te Klasse der Kombinationen ohne Wiederholungen für die Elemente

$$\alpha_\varkappa,\ \alpha_\lambda,\ \alpha_\mu,\ \alpha_\nu, \ldots$$

wollen wir im Folgenden der Kürze wegen durch

$$\overset{m}{K}(\varkappa, \lambda, \mu, \nu, \ldots)$$

bezeichnen, und wollen, dies vorausgesetzt, überhaupt

$$\begin{aligned}
\overset{m,\mu}{(n)} = & \frac{\overset{m}{K}(2,3,4,5,\ldots,n).\alpha_1^\mu}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_5)\ldots(\alpha_1-\alpha_n)} \\
& + \frac{\overset{m}{K}(1,3,4,5,\ldots,n).\alpha_2^\mu}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_5)\ldots(\alpha_2-\alpha_n)} \\
& + \frac{\overset{m}{K}(1,2,4,5,\ldots,n).\alpha_3^\mu}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_5)\ldots(\alpha_3-\alpha_n)} \\
& + \frac{\overset{m}{K}(1,2,3,5,\ldots,n).\alpha_4^\mu}{(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_5)\ldots(\alpha_4-\alpha_n)} \\
& \text{u. s. w.} \\
& + \frac{\overset{m}{K}(1,2,3,4,\ldots,n-1).\alpha_n^\mu}{(\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_2)(\alpha_n-\alpha_3)(\alpha_n-\alpha_4)\ldots(\alpha_n-\alpha_{n-1})}
\end{aligned}$$

setzen. Ist nun

$$\frac{\overset{m}{K}(1,2,3,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n-1,n).\alpha_k^\mu}{(\alpha_k-\alpha_1)(\alpha_k-\alpha_2)\ldots(\alpha_k-\alpha_{k-1})(\alpha_k-\alpha_{k+1})\ldots(\alpha_k-\alpha_n)}$$

ein allgemeines Glied dieser Reihe, so kann man dasselbe unbeschadet seines Werths im Zähler und im Nenner mit $\alpha_k - \alpha_{n+1}$ multipliciren, und erhält dann als Zähler

$$\overset{m}{K}(1,2,3,\ldots,k-1,\,k+1,\ldots,\,n-1,n)\,.\,\alpha_k^{\mu+1}$$
$$-\overset{m}{K}(1,2,3,\ldots,k-1,\,k+1,\ldots,\,n-1,n)\,.\,\alpha_k^{\mu}\,\alpha_{n+1}\,,$$

und als Nenner

$$(\alpha_k-\alpha_1)(\alpha_k-\alpha_2)\ldots(\alpha_k-\alpha_{k-1})(\alpha_k-\alpha_{k+1})\ldots(\alpha_k-\alpha_n)\,(\alpha_k-\alpha_{n+1}).$$

Den Zähler aber kann man auf folgende Art umformen:

$$\left\{\begin{array}{l}\overset{m}{K}(1,2,3,\ldots,k-1\,,k+1,\ldots,n-1,n)\\ +\overset{m-1}{K}(1,2,3,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n-1,n)\,.\,\alpha_{n+1}\end{array}\right\}\alpha_k^{\mu+1}$$
$$-\left\{\begin{array}{l}\overset{m}{K}(1,2,3,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n-1,n)\\ +\overset{m-1}{K}(1,2,3,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n-1,n)\,.\,\alpha_k\end{array}\right\}\alpha_k^{\mu}\,\alpha_{n+1}\,,$$

so dass also dieser Zähler, weil nach einem sehr bekannten Satze der Kombinationslehre

$$\overset{m}{K}(1,2,3,\ldots,k-1,\,k+1,\ldots,n-1,n)$$
$$+\overset{m-1}{K}(1,2,3,\ldots,k-1,\,k+1,\ldots,\,n-1,n)\,.\,\alpha_{n+1}$$
$$=\overset{m}{K}(1,2,3,\ldots,k-1,\,k+1,\ldots,\,n,n+1)$$

und

$$\overset{m}{K}(1,2,3,\ldots,k-1,\,k+1,\ldots,n-1,n)$$
$$+\overset{m-1}{K}(1,2,3,\ldots,k-1,\,k+1,\ldots,n-1,n)\,.\,\alpha_k$$
$$=\overset{m}{K}(1,2,3,4,\ldots,n)$$

ist, sich auf die folgende Form bringen lässt:

$$\overset{m}{K}(1,2,3,\ldots,k-1,\,k+1,\ldots,n,n+1)\,.\,\alpha_k^{\mu+1}$$
$$-K(1,2,3,4,\ldots,n)\,.\,\alpha_k^{\mu}\,\alpha_{n+1}\,.$$

Wenden wir nun diese Transformation auf die oben durch

$$\overset{m,\mu}{(n)}$$

bezeichnete Grösse an, und zerlegen zugleich jeden einzelnen Bruch nach Maassgabe der beiden seinen Zähler bildenden Theile in zwei Theile, so erhalten wir ohne alle Schwierigkeit

$$\overset{m,\mu}{(n)} = \frac{\overset{m}{K}(2,3,4,5,\ldots,n+1)\,.\,\alpha_1{}^{\mu+1}}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_5)\ldots(\alpha_1-\alpha_{n+1})}$$

$$+\frac{\overset{m}{K}(1,3,4,5,\ldots,n+1)\,.\,\alpha_2{}^{\mu+1}}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_5)\ldots(\alpha_2-\alpha_{n+1})}$$

$$+\frac{\overset{m}{K}(1,2,4,5,\ldots,n+1)\,.\,\alpha_3{}^{\mu+1}}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_5)\ldots(\alpha_3-\alpha_{n+1})}$$

$$+\frac{\overset{m}{K}(1,2,3,5,\ldots,n+1)\,.\,\alpha_4{}^{\mu+1}}{(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_5)\ldots(\alpha_4-\alpha^{n+1})}$$

u. s. w.

$$+\frac{\overset{m}{K}(1,2,3,4,\ldots,n-1,n+1)\,.\,\alpha_n{}^{\mu+1}}{(\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_2)(\alpha_n-\alpha_3)\ldots(\alpha_n-\alpha_{n-1})(\alpha_n-\alpha_{n+1})}$$

$$-\frac{\overset{m}{K}(1,2,3,4,\ldots,n)\,.\,\alpha_1{}^{\mu}\,\alpha_{n+1}}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_5)\ldots(\alpha_1-\alpha_{n+1})}$$

$$-\frac{\overset{m}{K}(1,2,3,4\ldots,n)\,.\,\alpha_2{}^{\mu}\,\alpha_{n+1}}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_5)\ldots(\alpha_2-\alpha_{n+1})}$$

$$-\frac{\overset{m}{K}(1,2,3,4,\ldots,n)\,.\,\alpha_3{}^{\mu}\,\alpha_{n+1}}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_5)\ldots(\alpha_3-\alpha_{n+1})}$$

$$-\frac{\overset{m}{K}(1,2,3,4,\ldots,n)\,.\,\alpha_4{}^{\mu}\,\alpha_{n+1}}{(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_5)\ldots(\alpha_4-\alpha_{n+1})}$$

u. s. w.

$$-\frac{\overset{m}{K}(1,2,3,4,\ldots,n)\,.\,\alpha_n{}^{\mu}\,\alpha_{n+1}}{(\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_2)(\alpha_n-\alpha_3)\ldots(\alpha_n-\alpha_{n-1})(\alpha_n-\alpha_{n+1})}.$$

Fügt man aber dieser Reihe noch die verschwindende Grösse

$$\frac{\overset{m}{K}(1,2,3,4,\ldots,n)\,.\,\alpha_{n+1}{}^{\mu+1}}{(\alpha_{n+1}-\alpha_1)(\alpha_{n+1}-\alpha_2)(\alpha_{n+1}-\alpha_3)(\alpha_{n+1}-\alpha_4)\ldots(\alpha_{n+1}-\alpha_n)}$$

$$-\frac{\overset{m}{K}(1,2,3,4,\ldots,n)\,.\,\alpha_{n+1}{}^{\mu}\,\alpha_{n+1}}{(\alpha_{n+1}-\alpha_1)(\alpha_{n+1}-\alpha_2)(\alpha_{n+1}-\alpha_3)(\alpha_{n+1}-\alpha_4)\ldots(\alpha_{n+1}-\alpha_n)}$$

bei, so erhält man in den oben eingeführten Zeichen auf der Stelle die sehr bemerkenswerthe Relation:

$$\overset{m,\mu}{(n)} = \overset{m,\mu+1}{(n+1)} - \alpha_{n+1}\,\overset{m}{K}(1,2,3,4,\ldots,n)\,.\,\overset{\mu}{(n+1)},$$

oder

$$\overset{m,\mu+1}{(n+1)}=\overset{m,\mu}{(n)}+\alpha_{n+1}\overset{m}{K}(1,2,3,4,\ldots,n).\overset{\mu}{(n+1)},$$

oder

$$\alpha_{n+1}\overset{m}{K}(1,2,3,4,\ldots,n).\overset{\mu}{(n+1)}=\overset{m,\mu+1}{(n+1)}-\overset{m,\mu}{(n)},$$

wobei man auch noch bemerken kann, dass diese Gleichungen noch etwas mehr Symmetrie erhalten, wenn man, was offenbar in gewisser Weise verstattet ist, $\overset{0,\mu}{(n+1)}$ für $\overset{\mu}{(n+1)}$ schreibt.

Wenn man in der Reihe

$$\overset{m,0}{(n)}=\frac{\overset{m}{K}(2,3,4,5,\ldots,n)}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_5)\ldots(\alpha_1-\alpha_n)}$$

$$+\frac{\overset{m}{K}(1,3,4,5,\ldots,n)}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_5)\ldots(\alpha_2-\alpha_n)}$$

$$+\frac{\overset{m}{K}(1,2,4,5,\ldots,n)}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_5)\ldots(\alpha_3-\alpha_n)}$$

$$+\frac{\overset{m}{K}(1,2,3,5,\ldots,n)}{(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_5)\ldots(\alpha_4-\alpha_n)}$$

u. s. w.

$$+\frac{\overset{m}{K}(1,2,3,4,\ldots,n-1)}{(\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_2)(\alpha_n-\alpha_3)(\alpha_n-\alpha_4)\ldots(\alpha_n-\alpha_{n-1})}$$

den ersten Bruch auf bekannte Weise in Partialbrüche *) zerlegt, so erhält man ohne Schwierigkeit:

$$\overset{m,0}{(n)}$$

$$=\frac{\overset{m}{K}(1,3,4,5,\ldots,n)-\overset{m}{K}(2,3,4,5,\ldots,n)}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_5)\ldots(\alpha_2-\alpha_n)}$$

$$+\frac{\overset{m}{K}(1,2,4,5,\ldots,n)-\overset{m}{K}(2,3,4,5,\ldots,n)}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_5)\ldots(\alpha_3-\alpha_n)}$$

$$+\frac{\overset{m}{K}(1,2,3,5,\ldots,n)-\overset{m}{K}(2,3,4,5,\ldots,n)}{(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_5)\ldots(\alpha_4-\alpha_n)}$$

u. s. w.

$$+\frac{\overset{m}{K}(1,2,3,4,\ldots,n-1)-\overset{m}{K}(2,3,4,5,\ldots,n)}{(\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_2)(\alpha_n-\alpha_3)(\alpha_n-\alpha_4)\ldots(\alpha_n-\alpha_{n-1})}.$$

Weil nun aber nach dem schon vorher angewandten Satze der Kombinationslehre

---

*) Man vergleiche I.

$$\overset{m}{K}(1,3,4,5,\ldots,n)-\overset{m}{K}(2,3,4,5,\ldots,n)$$
$$=\overset{m}{K}(3,4,5,\ldots,n)+\alpha_1\overset{m-1}{K}(3,4,5,\ldots,n)$$
$$-\overset{m}{K}(3,4,5,\ldots,n)-\alpha_2\overset{m-1}{K}(3,4,5,\ldots,n)$$
$$=(\alpha_1-\alpha_2)\overset{m-1}{K}(3,4,5,\ldots,n),$$

$$\overset{m}{K}(1,2,4,5,\ldots,n)-\overset{m}{K}(2,3,4,5,\ldots,n)$$
$$=\overset{m}{K}(2,4,5,\ldots,n)+\alpha_1\overset{m-1}{K}(2,4,5,\ldots,n)$$
$$-\overset{m}{K}(2,4,5,\ldots,n)-\alpha_3\overset{m-1}{K}(2,4,5,\ldots,n)$$
$$=(\alpha_1-\alpha_3)\overset{m-1}{K}(2,4,5,\ldots,n),$$

$$\overset{m}{K}(1,2,3,5,\ldots,n)-\overset{m}{K}(2,3,4,5,\ldots,n)$$
$$=\overset{m}{K}(2,3,5,\ldots,n)+\alpha_1\overset{m-1}{K}(2,3,5,\ldots,n)$$
$$-\overset{m}{K}(2,3,5,\ldots,n)-\alpha_4\overset{m-1}{K}(2,3,5,\ldots,n)$$
$$=(\alpha_1-\alpha_4)\overset{m-1}{K}(2,3,5,\ldots,n),$$

u. s. w.

$$\overset{m}{K}(1,2,3,4,\ldots,n-1)-\overset{m}{K}(2,3,4,5,\ldots,n)$$
$$=\overset{m}{K}(2,3,4,\ldots,n-1)+\alpha_1\overset{m-1}{K}(2,3,4,\ldots,n-1)$$
$$-\overset{m}{K}(2,3,4,\ldots,n-1)-\alpha_n\overset{m-1}{K}(2,3,4,\ldots,n-1)$$
$$=(\alpha_1-\alpha_n)\overset{m-1}{K}(2,3,4,\ldots,n-1)$$

ist; so ist nach dem Vorhergehenden

$$\overset{m,0}{(n)}$$

$$=-\frac{\overset{m-1}{K}(3,4,5,\ldots,n)}{(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_5)\ldots\ldots(\alpha_2-\alpha_n)}$$
$$-\frac{\overset{m-1}{K}(2,4,5,\ldots,n)}{(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_5)\ldots\ldots(\alpha_3-\alpha_n)}$$
$$-\frac{\overset{m-1}{K}(2,3,5,\ldots,n)}{(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_5)\ldots\ldots(\alpha_4-\alpha_n)}$$

u. s. w.

$$-\frac{\overset{m-1}{K}2,3,4,\ldots,n-1)}{(\alpha_n-\alpha_2)(\alpha_n-\alpha_3)(\alpha_n-\alpha_4)\ldots\ldots(\alpha_n-\alpha_{n-1})}.$$

Nun ist aber klar, dass man eine der vorhergehenden gan ähnliche Zerlegung jetzt wieder von Neuem in Anwendung bringen kann, und wenn man dann diese Zerlegungen weiter fortsetzt, so muss man nothwendig endlich auf die folgende Gleichung kommen:

$$\overset{m,0}{(n)}$$

$$=(-1)^{m-1}.\frac{\overset{1}{K}(m+1,\ m+2,\ m+3,\ldots.,n)}{(\alpha_m-\alpha_{m+1})(\alpha_m-\alpha_{m+2})(\alpha_m-\alpha_{m+3})\ldots.(\alpha_m-\alpha_n)}$$

$$+(-1)^{m-1}.\frac{\overset{1}{K}(m,\ m+2,\ m+3,\ldots.,n)}{(\alpha_{m+1}-\alpha_m)(\alpha_{m+1}-\alpha_{m+2})(\alpha_{m+1}-\alpha_{m+3})\ldots.(\alpha_{m+1}-\alpha_n)}$$

$$+(-1)^{m-1}.\frac{\overset{1}{K}(m,\ m+1,\ m+3,\ldots.,n)}{(\alpha_{m+2}-\alpha_m)(\alpha_{m+2}-\alpha_{m+1})(\alpha_{m+2}-\alpha_{m+3})\ldots(\alpha_{m+2}-\alpha_n)}$$

u. s. w.

$$+(-1)^{m-1}.\frac{\overset{1}{K}(m,\ m+1,\ m+2,\ldots.,n-1)}{(\alpha_n-\alpha_m)(\alpha_n-\alpha_{m+1})(\alpha_n-\alpha_{m+2})\ldots.(\alpha_n-\alpha_{n-1})}.$$

Wendet man nun aber die erwähnte Zerlegung nochmals an, was jedoch nur für $n > m+1$ möglich ist, und bemerkt, dass

$$\overset{1}{K}(m+1,\ m+2,\ m+3,\ldots.,n)=\alpha_{m+1}+\alpha_{m+2}+\alpha_{m+3}+\ldots.+\alpha_n,$$

$$\overset{1}{K}(m,\ m+2,\ m+3,\ldots.,n)=\alpha_m+\alpha_{m+2}+\alpha_{m+3}+\ldots\ldots+\alpha_n,$$

$$\overset{1}{K}(m,\ m+1,\ m+3,\ldots.,n)=\alpha_m+\alpha_{m+1}+\alpha_{m+3}+\ldots.+\alpha_n,$$

u. s. w.

$$\overset{1}{K}(m,\ m+1,\ m+2,\ldots.,n-1)=\alpha_m+\alpha_{m+1}+\alpha_{m+2}+\ldots.+\alpha_{n-1}$$

ist, so erhält man

$$\overset{m,0}{(n)}$$

$$=(-1)\ .\frac{1}{(\alpha_{m+1}-\alpha_{m+2})(\alpha_{m+1}-\alpha_{m+3})\ldots.(\alpha_{m+1}-\alpha_n)}$$

$$+(-1)^m.\frac{1}{(\alpha_{m+2}-\alpha_{m+1})(\alpha_{m+2}-\alpha_{m+3})\ldots.(\alpha_{m+2}-\alpha_n)}$$

u. s. w.

$$+(-1)^m.\frac{1}{(\alpha_n-\alpha_{m+1})(\alpha_n-\alpha_{m+2})\ldots\ldots(\alpha_n-\alpha_{n-1})},$$

und weil nun die Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens, wie unmittelbar aus I. hervorgeht, der Null gleich ist, so ist überhaupt für $n > m+1$:

$$\overset{m,0}{(n)}=0.$$

Für $n=m+1$ ist dagegen nach dem Obigen

$$\overset{m,0}{(n)}$$

$$=(-1)^{m-1}.\frac{\overset{1}{K}(m+1)}{\alpha_m-\alpha_{m+1}}+(-1)^{m-1}.\frac{\overset{1}{K}(m)}{\alpha_{m+1}-\alpha_m}$$

$$=(-1)^{m-1}.\frac{\alpha_{m+1}}{\alpha_m-\alpha_{m+1}}+(-1)^{m-1}.\frac{\alpha_m}{\alpha_{m+1}-\alpha_m}$$

$$=(-1)^{m-1}.\frac{\alpha_{m+1}-\alpha_m}{\alpha_m-\alpha_{m+1}}=-(-1)^{m-1}=(-1)^m.$$

Es ist also

$$\overset{m,0}{(n)}=0 \text{ oder } \overset{m,0}{(n)}=(-1)^m,$$

jenachdem

$$n>m+1 \text{ oder } n=m+1$$

ist.

Ueberhaupt ist nach dem Obigen

$$\overset{m,\mu}{(m+1)}=\frac{\overset{m}{K}(2,3,4,5,\ldots,m+1).\alpha_1{}^\mu}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_5)\ldots(\alpha_1-\alpha_{m+1})}$$

$$+\frac{\overset{m}{K}(1,3,4,5,\ldots,m+1).\alpha_2{}^\mu}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_5)\ldots(\alpha_2-\alpha_{m+1})}$$

$$+\frac{\overset{m}{K}(1,2,4,5,\ldots,m+1).\alpha_3{}^\mu}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_5)\ldots(\alpha_3-\alpha_{m+1})}$$

$$+\frac{\overset{m}{K}(1,2,3,5,\ldots,m+1).\alpha_4{}^\mu}{(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_5)\ldots(\alpha_4-\alpha_{m+1})}$$

u. s. w.

$$+\frac{\overset{m}{K}(1,2,3,4,\ldots,m).\alpha_{m+1}{}^\mu}{(\alpha_{m+1}-\alpha_1)(\alpha_{m+1}-\alpha_2)(\alpha_{m+1}-\alpha_3)(\alpha_{m+1}-\alpha_4)\ldots(\alpha_{m+1}-\alpha_m)},$$

also, wie leicht erhellet:

$$\overset{m,\mu}{(m+1)}=\frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots\alpha_{m+1}.\alpha_1{}^{\mu-1}}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_5)\ldots(\alpha_1-\alpha_{m+1})}$$

$$+\frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots\alpha_{m+1}.\alpha_2{}^{\mu-1}}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_5)\ldots(\alpha_2-\alpha_{m+1})}$$

$$+\frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots\alpha_{m+1}.\alpha_3{}^{\mu-1}}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_5)\ldots(\alpha_3-\alpha_{m+1})}$$

$$+\frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots\alpha_{m+1}.\alpha_4{}^{\mu-1}}{(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_5)\ldots(\alpha_4-\alpha_{m+1})}$$

u. s. w.

$$+\frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots\alpha_{m+1}.\alpha_{m+1}{}^{\mu-1}}{(\alpha_{m+1}-\alpha_1)(\alpha_{m+1}-\alpha_2)(\alpha_{m+1}-\alpha_3)(\alpha_{m+1}-\alpha_4)\ldots(\alpha_{m+1}-\alpha_m)}.$$

Hieraus schliesst man mit Hülfe von I. leicht, dass

$$\overset{m,1}{(m+1)}=0,\ \overset{m,2}{(m+1)}=0,\ \overset{m,3}{(m+1)}=0,\ldots,\overset{m,m}{(m+1)}=0;$$

aber

$$\overset{m,m+1}{(m+1)}=\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots\alpha_{m+1}$$

ist.

Aus der oben bewiesenen Relation

$$\overset{m,\mu+1}{(n+1)}=\overset{m,\mu}{(n)}+\alpha_{n+1}\overset{m}{K}(1,2,3,4,\ldots,n).\overset{\mu}{(n+1)}$$

ergeben sich nun die folgenden Gleichungen:

$$\overset{m,1}{(n)}=\overset{m,0}{(n-1)}+\alpha_n\overset{m}{K}(1,2,3,4,\ldots,n-1).\overset{0}{(n)},$$

$$\overset{m,2}{(n)}=\overset{m,1}{(n-1)}+\alpha_n\overset{m}{K}(1,2,3,4,\ldots,n-1).\overset{1}{(n)},$$

$$\overset{m,3}{(n)}=\overset{m,2}{(n-1)}+\alpha_n\overset{m}{K}(1,2,3,4,\ldots,n-1).\overset{2}{(n)},$$

$$\overset{m,4}{(n)}=\overset{m,3}{(n-1)}+\alpha_n\overset{m}{K}(1,2,3,4,\ldots,n-1).\overset{3}{(n)},$$

u. s. w.

$$\overset{m,n-1}{(n)}=\overset{m,n-2}{(n-1)}+\alpha_n\overset{m}{K}(1,2,3,4,\ldots,n-1).\overset{n-2}{(n)};$$

also, weil nach I.

$$\overset{0}{(n)}=\overset{1}{(n)}=\overset{2}{(n)}=\overset{3}{(n)}=\ldots=\overset{n-2}{(n)}=0$$

ist:

$$\overset{m,1}{(n)}=\overset{m,0}{(n-1)},$$

$$\overset{m,2}{(n)}=\overset{m,1}{(n-1)},$$

$$\overset{m,3}{(n)}=\overset{m,2}{(n-1)},$$

$$\overset{m,4}{(n)}=\overset{m,3}{(n-1)},$$

u. s. w.

$$\overset{m,n-1}{(n)}=\overset{m,n-2}{(n-1)};$$

und in dem nachfolgenden Schema sind folglich offenbar die sämmtlichen in vertikalen Reihen stehenden Glieder einander gleich:

$$\overset{m,0}{(n)}\ ,\ \overset{m,1}{(n)}\ ,\ \overset{m,2}{(n)}\ ,\ \overset{m,3}{(n)}\ ,\ \ldots\ ,\ \overset{m,n-m-2}{(n)}\ ,\ \overset{m,n-m-1}{(n)}\ ,\ \overset{m,n-m}{(n)}\ ,\ \ldots\ ,\ \overset{m,n-2}{(n)}\ ,\ \overset{m,n-1}{n}\ ;$$

$$\overset{m,0}{(n-1)}\ ,\ \overset{m,1}{(n-1)}\ ,\ \overset{m,2}{(n-1)}\ ,\ \ldots\ ,\ \overset{m,n-m-3}{(n-1)}\ ,\ \overset{m,n-m-2}{(n-1)}\ ,\ \overset{m,n-m-1}{(n-1)}\ ,\ \ldots\ ,\ \overset{m,n-3}{(n-1)}\ ,\ \overset{m,n-2}{(n-1)}\ ;$$

$$\overset{m,0}{(n-2)}\ ,\ \overset{m,1}{(n-2)}\ ,\ \ldots\ ,\ \overset{m,n-m-4}{(n-2)}\ ,\ \overset{m,n-m-3}{(n-2)}\ ,\ \overset{m,n-m-2}{(n-2)}\ ,\ \ldots\ ,\ \overset{m,n-4}{(n-2)}\ ,\ \overset{m,n-3}{(n-2)}\ ;$$

$$\overset{m,0}{(n-3)}\ ,\ \ldots\ ,\ \overset{m,n-m-5}{(n-3)}\ ,\ \overset{m,n-m-4}{(n-3)}\ ,\ \overset{m,n-m-3}{(n-3)}\ ,\ \ldots\ ,\ \overset{m,n-5}{(n-3)}\ ,\ \overset{m,n-4}{(n-3)}\ ;$$

$$\vdots$$

$$\overset{m,0}{(m+2)}\ ,\ \overset{m,1}{(m+2)}\ ,\ \overset{m,2}{(m+2)}\ ,\ \ldots\ ,\ \overset{m,m}{(m+2)}\ ,\ \overset{m,m+1}{(m+2)}\ ;$$

$$\overset{m,0}{(m+1)}\ ,\ \overset{m,1}{(m+1)}\ ,\ \ldots\ ,\ \overset{m,m-1}{(m+1)}\ ,\ \overset{m,m}{(m+1)}.$$

Weil nun nach dem Vorhergehenden

$$\overset{m,0}{(n)}=0,\ \overset{m,0}{(n-1)}=0,\ \overset{m,0}{(n-2)}=0,\ \overset{m,0}{(n-2)}=0, \ldots \overset{m,0}{(m+2)}=0;$$

$$\overset{m,0}{(m+1)}=(-1)^m;$$

$$\overset{m,1}{(m+1)}=0,\ \overset{m,2}{(m+1)}=0, \ldots \overset{m,m-1}{(m+1)}=0,\ \overset{m,m}{(m+1)}=0$$

ist; so ist

$$\overset{m,0}{(n)} = 0,$$

$$\overset{m,1}{(n)} = 0,$$

$$\overset{m,2}{(n)} = 0,$$

$$\overset{m,3}{(n)} = 0,$$

u. s. w.

$$\overset{m,n-m-2}{(n)} = 0.$$

$$\overset{m,n-m-1}{(n)} = (-1)^m,$$

$$\overset{m,n-m}{(n)} = 0,$$

u. s. w.

$$\overset{m,n-2}{(n)} = 0,$$

$$\overset{m,n-1}{n} = 0.$$

III.

Der vorhergehenden Relationen kann man sich jetzt zur allgemeinen Auflösung der n folgenden Gleichungen des ersten Grades:

$$A_1 + A_2\alpha_1 + A_3\alpha_1{}^2 + A_4\alpha_1{}^3 + \ldots\ldots + A_n\alpha_1{}^{n-1} = a_1,$$

$$A_1 + A_2\alpha_2 + A_3\alpha_2{}^2 + A_4\alpha_2{}^3 + \ldots\ldots + A_n\alpha_2{}^{n-1} = a_2,$$

$$A_1 + A_2\alpha_3 + A_3\alpha_3{}^2 + A_4\alpha_3{}^3 + \ldots\ldots + A_n\alpha_3{}^{n-1} = a_3,$$

$$A_1 + A_2\alpha_4 + A_3\alpha_4{}^2 + A_4\alpha_4{}^3 + \ldots\ldots + A_n\alpha_4{}^{n-1} = a_4,$$

u. s. w.

$$A_1 + A_2\alpha_n + A_3\alpha_n{}^2 + A_4\alpha_n{}^3 + \ldots\ldots + A_n\alpha_n{}^{n-1} = a_n$$

zwischen den n unbekannten Grössen

$$A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots. A_n$$

sehr einfach auf folgende Art bedienen.

Man multiplicire die obigen n Gleichungen nach der Reihe mit den folgenden $m$ten Kombinationsklassen, wo wir die Bezeichnung grösserer Deutlichkeit wegen gegen früher absichtlich etwas verändert haben:

$$\overset{m}{K}(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \ldots. \alpha_n),$$
$$\overset{m}{K}(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \ldots. \alpha_n)$$
$$\overset{m}{K}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \ldots. \alpha_n)$$
$$\overset{m}{K}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \ldots. \alpha_n)$$

u. s. w.

$$\overset{m}{K}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots. \alpha_{n-1});$$

dividire dieselben dann nach der Reihe durch die Producte

$$(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_5)\ldots..(\alpha_1-\alpha_n),$$
$$(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_5)\ldots.(\alpha_2-\alpha_n),$$
$$(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_5)\ldots.(\alpha_3-\alpha_n),$$
$$(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_5)\ldots.(\alpha_4-\alpha_n),$$

u. s. w.

$$(\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_2)(\alpha_n-\alpha_3)(\alpha_n-\alpha_4)\ldots.(\alpha_n-\alpha_{n-1});$$

und addire sie hierauf sämmtlich zusammen; so erhält man offenbar die folgende Gleichung:

$$A_1.\overset{m,0}{(n)}+A_2.\overset{m,1}{(n)}+A_3.\overset{m,2}{(n)}+\ldots.+A_{n-m-1}.\overset{m,n-m-2}{(n)}$$
$$+A_{n-m}.\overset{m,n-m-1}{(n)}$$
$$+A_{n-m+1}.\overset{m,n-m}{(n)}+A_{n-m+2}.\overset{m,n-m+1}{(n)}+\ldots+A_n.\overset{m,n-1}{(n)}$$
$$=\frac{\overset{m}{K}(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \ldots. \alpha_n)}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_5)\ldots\ldots.(\alpha_1-\alpha_n)}a_1$$
$$+\frac{\overset{m}{K}(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \ldots. \alpha_n)}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_5)\ldots\ldots.(\alpha_2-\alpha_n)}a_2$$
$$+\frac{\overset{m}{K}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \ldots. \alpha_n)}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_5)\ldots\ldots(\alpha_3-\alpha_n)}a_3$$

$$+\frac{\overset{m}{K}(\alpha_1\,,\ \alpha_2\,,\ \alpha_3\,,\ \alpha_5\,,\ldots.\alpha_n)}{(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_5)\ldots\ldots(\alpha_4-\alpha_n)}a_4$$

u. s. w.

$$+\frac{\overset{m}{K}(\alpha_1\,,\ \alpha_2\,,\ \alpha_3\,,\ \alpha_4\,,\ldots.\alpha_{n-1})}{(\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_2)(\alpha_n-\alpha_3)(\alpha_n-\alpha_4)\ldots.(\alpha_n-\alpha_{n-1})}a_n,$$

und es ist folglich nach II.

$$(-1)^m\,.\,A_{n-m}=\frac{\overset{m}{K}(\alpha_2\,,\ \alpha_3\,,\ \alpha_4\,,\ \alpha_5\,,\ldots.\alpha_n)}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_5)\ldots.(\alpha_1-\alpha_n)}a_1$$

$$+\frac{\overset{m}{K}(\alpha_1\,,\ \alpha_3\,,\ \alpha_4\,,\ \alpha_5\,,\ldots.\alpha_n)}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_5)\ldots.(\alpha_2-\alpha_n)}a_2$$

$$+\frac{\overset{m}{K}(\alpha_1\,,\ \alpha_2\,,\ \alpha_4\,,\ \alpha_5\,,\ldots.\alpha_n)}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_5)\ldots..(\alpha_3-\alpha_n)}a_3$$

$$+\frac{\overset{m}{K}(\alpha_1\,,\ \alpha_2\,,\ \alpha_3\,,\ \alpha_5\,,\ldots.\alpha_n)}{(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_5)\ldots.(\alpha_4-\alpha_n)}a_4$$

u. s. w.

$$+\frac{\overset{m}{K}(\alpha_1\,,\ \alpha_2\,,\ \alpha_3\,,\ \alpha_4\,,\ldots.\alpha_{n-1})}{(\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_2)(\alpha_n-\alpha_3)(\alpha_n-\alpha_4)\ldots.(\alpha_n-\alpha_{n-1})}a_n,$$

ein völlig independenter Ausdruck für jede beliebige der gesuchten n unbekannten Grössen.

Bemerkt mag noch werden, was sich übrigens auch nach dem Vorhergehenden eigentlich schon von selbst versteht, dass

$$A_n=\frac{a_1}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_5)\ldots.(\alpha_1-\alpha_n)}$$

$$+\frac{a_2}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_5)\ldots..(\alpha_2-\alpha_n)}$$

$$+\frac{a_3}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_5)\ldots.(\alpha_3-\alpha_n)}$$

$$+\frac{a_4}{(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_5)\ldots.(\alpha_4-\alpha_n)}$$

u. s. w.

$$+\frac{a_n}{(\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_2)(\alpha_n-\alpha_3)(\alpha_n-\alpha_4)\ldots.(\alpha_n-\alpha_{n-1})}$$

ist.

Auf diese Weise sind die gegebenen n Gleichungen des ersten Grades vollständig und völlig independent aufgelöst. Zu-

gleich enthält das Obige verschiedene bemerkenswerthe arithmetische Sätze, von denen der eine von uns besonders hervorgehoben worden ist; die übrigen wird der aufmerksame Leser gewiss auch ohne besondere Erinnerung nicht unbeachtet gelassen haben.

XXX.

Ueber einige Sätze der Zahlenlehre.

Von

dem Herausgeber.

Aus den in der vorhergehenden Abhandlung bewiesenen allgemeinen arithmetischen Theoremen lassen sich verschiedene bemerkenswerthe Sätze von den Zahlen ableiten, von denen ich einige in dem vorliegenden Aufsatze entwickeln will, ohne jedoch für jetzt die Absicht zu haben, diesen Gegenstand zu erschöpfen.

Wenn wir der Kürze wegen jetzt

$$\overset{1}{\Pi}_n=(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_5)\ldots.(\alpha_1-\alpha_n),$$

$$\overset{2}{\Pi}_n=(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_5)\ldots..(\alpha_2-\alpha_n),$$

$$\overset{3}{\Pi}_n=(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_5)\ldots.(\alpha_3-\alpha_n),$$

$$\overset{4}{\Pi}_n=(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_5)\ldots...(\alpha_4-\alpha_n),$$

u. s. w.

$$\overset{n}{\Pi}_n=(\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_2)(\alpha_n-\alpha_3)(\alpha_n-\alpha_4)\ldots.(\alpha_n-\alpha_{n-1})$$

setzen; so ist in der in der vorhergehenden Abhandlung gebrauchten Bezeichnung

$$\overset{\mu}{(n)}=\frac{\alpha_1{}^\mu}{\overset{1}{\Pi}_n}+\frac{\alpha_2{}^\mu}{\overset{2}{\Pi}_n}+\frac{\alpha_3{}^\mu}{\overset{3}{\Pi}_n}+\ldots.+\frac{\alpha_n{}^\mu}{\overset{n}{\Pi}_n}.$$

Wenn nun von jetzt an

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \ldots,\ \alpha_n$$

lauter (positive oder negative) ganze Zahlen bezeichnen, und $\mu+1$ eine in keiner dieser Zahlen aufgehende positive Primzahl ist, so ist, wenn

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4, \ldots \lambda_n$$

gewisse positive ganze Zahlen bezeichnen, nach dem Fermat'schen Satze

$$\alpha_1^{\mu}=\lambda_1(\mu+1)+1,$$
$$\alpha_2^{\mu}=\lambda_2(\mu+1)+1,$$
$$\alpha_3^{\mu}=\lambda_3(\mu+1)+1,$$
$$\alpha_4^{\mu}=\lambda_4(\mu+1)+1,$$
u. s. w.
$$\alpha_n^{\alpha}=\lambda_n(\mu+1)+1;$$

also nach dem Obigen:

$$\overset{n}{(n)}=(\mu+1)\left\{\frac{\lambda_1}{\overset{1}{\Pi}_n}+\frac{\lambda_2}{\overset{2}{\Pi}_n}+\frac{\lambda_3}{\overset{3}{\Pi}_n}+\ldots+\frac{\lambda_n}{\overset{n}{\Pi}_n}\right\}$$
$$+\frac{1}{\overset{1}{\Pi}_n}+\frac{1}{\overset{2}{\Pi}_n}+\frac{1}{\overset{3}{\Pi}_n}+\ldots+\frac{1}{\overset{n}{\Pi}_n},$$

d. i. in der eingeführten Bezeichnung:

$$\overset{\mu}{(n)}=(\mu+1)\left\{\frac{\lambda_1}{\overset{1}{\Pi}_n}+\frac{\lambda_2}{\overset{2}{\Pi}_n}+\frac{\lambda_3}{\overset{3}{\Pi}_n}+\ldots+\frac{\lambda_n}{\overset{n}{\Pi}_n}\right\}+\overset{0}{(n)}.$$

Weil nun aber, wie in der vorhergehenden Abhandlung gezeigt worden ist,

$$\overset{0}{(n)}=0$$

ist, so ist

$$\overset{\mu}{(n)}=(\mu+1)\left\{\frac{\lambda_1}{\overset{1}{\Pi}_n}+\frac{\lambda_2}{\overset{2}{\Pi}_n}+\frac{\lambda_3}{\overset{3}{\Pi}_n}+\ldots+\frac{\lambda_n}{\overset{n}{\Pi}_n}\right\},$$

und folglich

$$\overset{\mu}{(n)}.\overset{1}{\Pi}_n\overset{2}{\Pi}_n\overset{3}{\Pi}_n\overset{4}{\Pi}_n\ldots\overset{n}{\Pi}_n$$
$$=(\mu+1)\left\{\begin{array}{l}\lambda_1\overset{2}{\Pi}_n\overset{3}{\Pi}_n\overset{4}{\Pi}_n\ldots\overset{n}{\Pi}_n\\+\lambda_2\overset{1}{\Pi}_n\overset{3}{\Pi}_n\overset{4}{\Pi}_n\ldots\overset{n}{\Pi}_n\\+\lambda_3\overset{1}{\Pi}_n\overset{2}{\Pi}_n\overset{4}{\Pi}_n\ldots\overset{n}{\Pi}_n\\\text{u. s. w.}\\+\lambda_n\overset{1}{\Pi}_n\overset{2}{\Pi}_n\overset{3}{\Pi}_n\ldots\overset{n-1}{\Pi}_n\end{array}\right\}.$$

Setzen wir jetzt $\mu = n-1$, so dass also n eine in keiner der ganzen Zahlen

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots \alpha_n$$

aufgehende Primzahl ist, so wird die vorhergehende Gleichung, weil, wie in der vorhergehenden Abhandlung gezeigt worden ist,

$$\overset{\mu}{(n)} = \overset{n-1}{(n)} = 1$$

ist:

$$\overset{1}{\Pi}_n \overset{2}{\Pi}_n \overset{3}{\Pi}_n \overset{4}{\Pi}_n \ldots \overset{n}{\Pi}_n$$

$$= n \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 \overset{2}{\Pi}_n \overset{3}{\Pi}_n \overset{4}{\Pi}_n \ldots \overset{n}{\Pi}_n \\ + \lambda_2 \overset{1}{\Pi}_n \overset{3}{\Pi}_n \overset{4}{\Pi}_n \ldots \overset{n}{\Pi}_n \\ + \lambda_3 \overset{1}{\Pi}_n \overset{2}{\Pi}_n \overset{4}{\Pi}_n \ldots \overset{n}{\Pi}_n \\ \text{u. s. w.} \\ + \lambda_n \overset{1}{\Pi}_n \overset{2}{\Pi}_n \overset{3}{\Pi}_n \ldots \overset{n-1}{\Pi}_n \end{array} \right\},$$

und die Primzahl n geht also hiernach unter den gemachten Voraussetzungen jederzeit in dem Producte

$$\overset{1}{\Pi}_n \overset{2}{\Pi}_n \overset{3}{\Pi}_n \overset{4}{\Pi}_n \ldots \overset{n}{\Pi}_n$$

auf.

Nun ist aber, wie man leicht findet:

$$\begin{array}{l} \overset{1}{\Pi}_n \overset{2}{\Pi}_n \overset{3}{\Pi}_n \overset{4}{\Pi}_n \ldots \overset{n}{\Pi}_n \\ = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} . (\alpha_1-\alpha_2)^2 (\alpha_1-\alpha_3)^2 (\alpha_1-\alpha_4)^2 \ldots (\alpha_1-\alpha_n)^2 \\ \times (\alpha_2-\alpha_3)^2 (\alpha_2-\alpha_4)^2 \ldots (\alpha_2-\alpha_n)^2 \\ \times (\alpha_3-\alpha_4)^2 \ldots (\alpha_3-\alpha_n)^2 \\ \text{u. s. w.} \\ \times (\alpha_{n-1}-\alpha_n)^2, \end{array}$$

und nach dem Satze des Euklides von den Primzahlen kann die Primzahl n in dem Producte

$$\begin{array}{l} (\alpha_1-\alpha_2)^2 (\alpha_1-\alpha_3)^2 (\alpha_1-\alpha_4)^2 \ldots (\alpha_1-\alpha_n)^2 \\ \times (\alpha_2-\alpha_3)^2 (\alpha_2-\alpha_4)^2 \ldots (\alpha_2-\alpha_n)^2 \\ \times (\alpha_3-\alpha_4)^2 \ldots (\alpha_3-\alpha_n)^2 \\ \text{u. s. w.} \\ \times (\alpha_{n-1}-\alpha_n)^2 \end{array}$$

nur dann aufgehen, wenn sie in dem Producte

$$(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)\ldots\ldots(\alpha_1-\alpha_n)$$
$$\times(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)\ldots\ldots(\alpha_2-\alpha_n)$$
$$\times(\alpha_3-\alpha_4)\ldots\ldots(\alpha_3-\alpha_n)$$
u. s. w.
$$\times(\alpha_{n-1}-\alpha_n)$$

aufgeht; also ergiebt sich aus dem Obigen unmittelbar der folgende Satz:

I.

Wenn die positive oder negative Primzahl n in keiner der positiven oder negativen ganzen Zahlen

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ldots\ \alpha_{(n)}$$

aufgeht, wo jetzt (n) den absoluten Werth von n bezeichnen soll; so geht diese Primzahl n jederzeit in dem Producte

$$(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)\ldots(\alpha_1-\alpha_{(n)})$$
$$\times(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)\ldots(\alpha_2-\alpha_{(n)})$$
$$\times(\alpha_3-\alpha_4)\ldots(\alpha_3-\alpha_{(n)})$$
u. s. w.
$$\times(\alpha_{(n)-1}-\alpha_{(n)})$$

auf.

Um ein Beispiel zu geben, so sei $n=5$ und

$$\alpha_1=+12,\ \alpha_2=-6,\ \alpha_3=-9,\ \alpha_4=+8,\ \alpha_5=+4.$$

Dann ist

$$\alpha_1-\alpha_2=+18,\ \alpha_1-\alpha_3=+21,\ \alpha_1-\alpha_4=+4,\ \alpha_1-\alpha_5=+8;$$
$$\alpha_2-\alpha_3=+3,\ \alpha_2-\alpha_4=-14,\ \alpha_2-\alpha_5=-10;$$
$$\alpha_3-\alpha_4=-17,\ \alpha_3-\alpha_5=-13;$$
$$\alpha_4-\alpha_5=+4;$$

woraus auf der Stelle die Richtigkeit des Satzes in dem vorliegenden speciellen Falle erhellet, da 5 in -10 aufgeht.

Wenn wir in der vorher gefundenen Gleichung

$$
\begin{aligned}
\overset{\mu}{(n)} . \overset{1}{\Pi}_n \overset{2}{\Pi}_n \overset{3}{\Pi}_n \overset{4}{\Pi}_n \ldots \overset{n}{\Pi}_n
= (\mu+1) \left\{ \begin{array}{l}
\lambda_1 \overset{2}{\Pi}_n \overset{3}{\Pi}_n \overset{4}{\Pi}_n \ldots \overset{n}{\Pi}_n \\
+ \lambda_2 \overset{1}{\Pi}_n \overset{3}{\Pi}_n \overset{4}{\Pi}_n \ldots \overset{n}{\Pi}_n \\
+ \lambda_3 \overset{1}{\Pi}_n \overset{2}{\Pi}_n \overset{4}{\Pi}_n \ldots \overset{n}{\Pi}_n \\
\text{u. s. w.} \\
+ \lambda_n \overset{1}{\Pi}_n \overset{2}{\Pi}_n \overset{3}{\Pi}_n \ldots \overset{n-1}{\Pi}_n
\end{array} \right\}
\end{aligned}
$$

aber $\mu = n$ setzen, so dass also jetzt $n+1$ eine in keiner der positiven oder negativen ganzen Zahlen

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots \alpha_n$$

aufgehende Primzahl ist, so wird die vorstehende Gleichung, weil, wie in der vorhergehenden Abhandlung gezeigt worden ist,

$$\overset{n}{(n)} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \ldots + \alpha_n$$

ist:

$$
\begin{aligned}
(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \ldots + \alpha_n) \overset{1}{\Pi}_n \overset{2}{\Pi}_n \overset{3}{\Pi}_n \overset{4}{\Pi}_n \ldots \overset{n}{\Pi}_n
= (n+1) \left\{ \begin{array}{l}
\lambda_1 \overset{2}{\Pi}_n \overset{3}{\Pi}_n \overset{4}{\Pi}_n \ldots \overset{n}{\Pi}_n \\
+ \lambda_2 \overset{1}{\Pi}_n \overset{3}{\Pi}_n \overset{4}{\Pi}_n \ldots \overset{n}{\Pi}_n \\
+ \lambda_3 \overset{1}{\Pi}_n \overset{2}{\Pi}_n \overset{4}{\Pi}_n \ldots \overset{n}{\Pi}_n \\
\text{u. s. w.} \\
+ \lambda_n \overset{1}{\Pi}_n \overset{2}{\Pi}_n \overset{3}{\Pi}_n \ldots \overset{n-1}{\Pi}_n
\end{array} \right\},
\end{aligned}
$$

und die Primzahl $n+1$ geht also hiernach unter den gemachten Voraussetzungen immer in dem Producte

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \ldots + \alpha_n) \overset{1}{\Pi}_n \overset{2}{\Pi}_n \overset{3}{\Pi}_n \overset{4}{\Pi}_n \ldots \overset{n}{\Pi}_n$$

auf.

Auf ganz ähnliche Art wie vorher leitet man hieraus mit Hülfe des Satzes des Euklides von den Primzahlen den folgenden Satz ab, wobei wir jedoch, was übrigens, — wenigstens hier —, eigentlich nicht nöthig wäre, der Kürze wegen, negative Werthe der Primzahlen ausschliessen wollen:

II.

Wenn die positive Primzahl $n+1$, welche grösser als 2 ist, in keiner der positiven oder negativen ganzen Zahlen

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4, \ldots \alpha_n$$

aufgeht, und auch deren Summe

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\ldots+\alpha_n$$

durch $n+1$ nicht ohne Rest theilbar ist; so geht diese Primzahl $n+1$ jederzeit in dem Producte

$$\begin{aligned}(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)\ldots(\alpha_1-\alpha_n)\\ \times(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)\ldots(\alpha_2-\alpha_n)\\ \times(\alpha_3-\alpha_4)\ldots(\alpha_3-\alpha_n)\\ \text{u. s. w.}\\ \times(\alpha_{n-1}-\alpha_n)\end{aligned}$$

auf.

Für $n+1=5$ und

$$\alpha_1=-12,\ \alpha_2=+8,\ \alpha_3=-11,\ \alpha_4=+3$$

also

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=-12$$

ist

$$\begin{aligned}\alpha_1-\alpha_2=-20,\ \alpha_1-\alpha_3=-1,\ \alpha_1-\alpha_4=-15;\\ \alpha_2-\alpha_3=+19,\ \alpha_2-\alpha_4=+5;\\ \alpha_3-\alpha_4=-14;\end{aligned}$$

woraus sogleich die Richtigkeit des Satzes in dem vorliegenden speciellen Falle erhellet.

Wäre $n+1=5$ und

$$\alpha_1=-9,\ \alpha_2=+7,\ \alpha_3=-11,\ \alpha_4=-2$$

also

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=-15;$$

so wäre

$$\begin{aligned}\alpha_1-\alpha_2=-16,\ \alpha_1-\alpha_3=+2,\ \alpha_1-\alpha_4=-7;\\ \alpha_2-\alpha_3=+18,\ \alpha_2-\alpha_4=+9;\\ \alpha_3-\alpha_4=-9;\end{aligned}$$

und $n+1$ würde also in diesem Falle, wo die Summe

$$a_1+a_2+a_3+a_4$$

durch $n+1$ ohne Rest theilbar ist, in dem Producte

$$(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)$$
$$\times(a_2-a_3)(a_2-a_4)$$
$$\times(a_3-a_4)$$

nicht aufgehen.

Aus dem vorhergehenden Satze ergiebt sich nun aber auch unmittelbar der folgende Satz:

III.

Wenn die positive Primzahl $n+1$, welche grösser als 2 ist, in keiner der positiven oder negativen ganzen Zahlen

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4, \ldots a_n$$

und auch in keiner der Differenzen aufgeht, welche man erhält, wenn man je zwei dieser Zahlen von einander subtrahirt; so geht die Primzahl $n+1$ jederzeit in der Summe

$$a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots+a_n$$

auf.

Ginge nämlich $n+1$ in dieser Summe nicht auf, so müsste es unter den gemachten Voraussetzungen nach dem vorhergehenden Satze in dem Producte

$$(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)\ldots(a_1-a_n)$$
$$\times(a_2-a_3)(a_2-a_4)\ldots(a_2-a_n)$$
$$\times(a_3-a_4)\ldots(a_3-a_n)$$
u. s. w.
$$\times(a_{n-1}-a_n),$$

und folglich nach dem Satze des Euklides von den Primzahlen nothwendig mindestens in einem Factor dieses Products aufgehen, was der gemachten Voraussetzung widerstreitet.

Nach einer anderen in der vorhergehenden Abhandlung eingeführten Bezeichnung ist

$$\overset{m,\mu}{(n)} = \frac{\overset{m}{K}(2,3,4,5,\ldots\ldots,n)\,.\,\alpha_1^{\mu}}{\overset{1}{\Pi}_n}$$
$$+\frac{\overset{m}{K}(1,3,4,5,\ldots\ldots,n)\,.\,\alpha_2^{\mu}}{\overset{2}{\Pi}_n}$$
$$+\frac{\overset{m}{K}(1,2,4,5,\ldots\ldots,n)\,.\,\alpha_3^{\mu}}{\overset{3}{\Pi}_n}$$
u. s. w.
$$+\frac{\overset{m}{K}(1,2,3,4,\ldots\ldots,n-1)\,.\,\alpha_n^{\mu}}{\overset{n}{\Pi}_n}.$$

Ist nun $\mu+1$ eine in keiner der positiven oder negativen ganzen Zahlen

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ldots\ldots\alpha_n$$

aufgehende Primzahl, so erhalten wir ganz auf ähnliche Art wie oben mittelst des Fermat'schen Satzes die Gleichung

$$\overset{m,\mu}{(n)} = (\mu+1)\left\{\frac{\lambda_1\,.\,\overset{m}{K}(2,3,4,5,\ldots\ldots,n)}{\overset{1}{\Pi}_n}\right.$$
$$+\frac{\lambda_2\,.\,\overset{m}{K}(1,3,4,5,\ldots\ldots,n)}{\overset{2}{\Pi}_n}$$
$$+\frac{\lambda_2\,.\,\overset{m}{K}(1,2,4,5,\ldots\ldots,n)}{\overset{3}{\Pi}_n}$$
u. s. w.
$$\left.+\frac{\lambda_n\,.\,\overset{m}{K}(1,2,3,4,\ldots\ldots,n-1)}{\overset{n}{\Pi}_n}\right\}$$
$$+\frac{\overset{m}{K}(2,3,4,5,\ldots\ldots,n)}{\overset{1}{\Pi}_n}$$
$$+\frac{\overset{m}{K}(1,3,4,5,\ldots\ldots,n)}{\overset{2}{\Pi}_n}$$
$$+\frac{\overset{m}{K}(1,2,4,5,\ldots\ldots,n)}{\overset{3}{\Pi}_n}$$
u. s. w.
$$+\frac{\overset{m}{K}(1,2,3,4,\ldots\ldots,n-1)}{\overset{n}{\Pi}_n},$$

d. i., wie leicht erhellet:

$$\overset{m,\mu}{(n)} - \overset{m,0}{(n)} = (\mu+1)\left\{\begin{aligned}&\frac{\lambda_1 . \overset{m}{K}(2,3,4,5,\ldots,n)}{\overset{1}{\Pi}_n}\\ &+\frac{\lambda_2 . \overset{m}{K}(1,3,4,5,\ldots,n)}{\overset{2}{\Pi}_n}\\ &+\frac{\lambda_3 . \overset{m}{K}(1,2,4,5,\ldots,n)}{\overset{3}{\Pi}_n}\\ &\text{u. s. w.}\\ &+\frac{\lambda_n . \overset{m}{K}(1,2,3,4,\ldots,n-1)}{\overset{n}{\Pi}_n}\end{aligned}\right\};$$

wo wie früher λ_1, λ_2, λ_3, ... λ_n ganze Zahlen sind.

Setzen wir nun

$$m=n-1,\quad \mu=n;$$

so wird die vorstehende Gleichung:

$$\overset{n-1,n}{(n)} - \overset{n-1,0}{(n)} = (n+1)\left\{\begin{aligned}&\frac{\lambda_1 . \overset{n-1}{K}(2,3,4,5,\ldots,n)}{\overset{1}{\Pi}_n}\\ &+\frac{\lambda_2 . \overset{n-1}{K}(1,3,4,5,\ldots,n)}{\overset{2}{\Pi}_n}\\ &+\frac{\lambda_3 . \overset{n-1}{K}(1,2,4,5,\ldots,n)}{\overset{3}{\Pi}_n}\\ &\text{u. s. w.}\\ &+\frac{\lambda_n . \overset{n-1}{K}(1,2,3,4,\ldots,n-1)}{\overset{n}{\Pi}_n}\end{aligned}\right\};$$

also, weil, wie in der vorhergehenden Abhandlung gezeigt worden ist,

$$\overset{n-1,0}{(n)} = (-1)^{n-1},\quad \overset{n-1,n}{(n)} = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots\alpha_n$$

d. i., weil unter der oben gemachten Voraussetzung, wenn nur die Primzahl $n+1$ grösser als 2 ist, jedenfalls $n-1$ eine ungerade Zahl ist,

$$\overset{n-1,0}{(n)} = -1,\quad \overset{n-1,n}{(n)} = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots\alpha_n$$

ist:

$$(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots\alpha_n+1)\overset{1}{\Pi}_n\overset{2}{\Pi}_n\overset{3}{\Pi}_n\overset{4}{\Pi}_n\ldots\overset{n}{\Pi}_n$$

$$=(n+1)\left\{\begin{array}{l}\lambda_1\overset{2}{\Pi}_n\overset{3}{\Pi}_n\overset{4}{\Pi}_n\ldots\overset{n}{\Pi}_n.\overset{n-1}{K}(2,3,4,5,\ldots,n)\\+\lambda_2\overset{1}{\Pi}_n\overset{3}{\Pi}_n\overset{4}{\Pi}_n\ldots\overset{n}{\Pi}_n.\overset{n-1}{K}(1,3,4,5,\ldots,n)\\+\lambda_3\overset{1}{\Pi}_n\overset{2}{\Pi}_n\overset{4}{\Pi}_n\ldots\overset{n}{\Pi}_n.\overset{n-1}{K}(1,2,4,5,\ldots,n)\\\text{u. s. w.}\\+\lambda_n\overset{1}{\Pi}_n\overset{2}{\Pi}_n\overset{3}{\Pi}_n\ldots\overset{n}{\Pi}_n.\overset{n-1}{K}(1,2,3,4,\ldots,n-1)\end{array}\right\},$$

woraus sich ergiebt, dass unter den gemachten Voraussetzungen die Primzahl $n+1$ jederzeit in

$$(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots\alpha_n+1)\overset{1}{\Pi}_n\overset{2}{\Pi}_n\overset{3}{\Pi}_n\overset{4}{\Pi}_n\ldots\overset{n}{\Pi}_n$$

aufgeht.

Geht nun aber die Primzahl $n+1$ in keiner der Differenzen

$$\begin{array}{l}\alpha_1-\alpha_2,\ \alpha_1-\alpha_3,\ \alpha_1-\alpha_4,\ldots,\alpha_1-\alpha_n;\\\alpha_2-\alpha_3,\ \alpha_2-\alpha_4,\ldots,\alpha_2-\alpha_n;\\\alpha_3-\alpha_4,\ldots,\alpha_3-\alpha_n;\\\text{u. s. w.}\\\alpha_{n-1}-\alpha_n\end{array}$$

auf, so geht dieselbe nach dem Satze des Euklides von den Primzahlen offenbar auch in dem Producte

$$\overset{1}{\Pi}_n\overset{2}{\Pi}_n\overset{3}{\Pi}_n\overset{4}{\Pi}_n\ldots\ldots\overset{n}{\Pi}_n$$

nicht auf, und muss folglich nach demselben Satze unter den oben gemachten Voraussetzungen jederzeit in

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots\alpha_n+1$$

aufgehen.

Hierdurch werden wir unmittelbar zu dem folgenden merkwürdigen Satze geführt:

IV.

Wenn die positive 2 übersteigende Primzahl $n+1$ in keiner der n positiven oder negativen ganzen Zahlen

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ldots\ \alpha_n$$

und auch in keiner der Differenzen aufgeht, welche man erhält, wenn man je zwei dieser Zahlen von ein-

Setzen wir jetzt $\mu = n - 1$, so dass also n eine in keiner der ganzen Zahlen

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4, \ldots\ \alpha_n$$

aufgehende Primzahl ist, so wird die vorhergehende Gleichung, weil, wie in der vorhergehenden Abhandlung gezeigt worden ist,

$$\overset{\mu}{(n)} = \overset{n-1}{(n)} = 1$$

ist:

$$\begin{aligned}&\overset{1}{\Pi}_n\,\overset{2}{\Pi}_n\,\overset{3}{\Pi}_n\,\overset{4}{\Pi}_n \ldots \overset{n}{\Pi}_n\\ = n\left\{\begin{aligned}&\lambda_1\,\overset{2}{\Pi}_n\,\overset{3}{\Pi}_n\,\overset{4}{\Pi}_n \ldots \overset{n}{\Pi}_n\\ &+\lambda_2\,\overset{1}{\Pi}_n\,\overset{3}{\Pi}_n\,\overset{4}{\Pi}_n \ldots \overset{n}{\Pi}_n\\ &+\lambda_3\,\overset{1}{\Pi}_n\,\overset{2}{\Pi}_n\,\overset{4}{\Pi}_n \ldots \overset{n}{\Pi}_n\\ &\quad\text{u. s. w.}\\ &+\lambda_n\,\overset{1}{\Pi}_n\,\overset{2}{\Pi}_n\,\overset{3}{\Pi}_n \ldots \overset{n-1}{\Pi}_n\end{aligned}\right\},\end{aligned}$$

und die Primzahl n geht also hiernach unter den gemachten Voraussetzungen jederzeit in dem Producte

$$\overset{1}{\Pi}_n\,\overset{2}{\Pi}_n\,\overset{3}{\Pi}_n\,\overset{4}{\Pi}_n \ldots \overset{n}{\Pi}_n$$

auf.

Nun ist aber, wie man leicht findet:

$$\begin{aligned}&\overset{1}{\Pi}_n\,\overset{2}{\Pi}_n\,\overset{3}{\Pi}_n\,\overset{4}{\Pi}_n \ldots \overset{n}{\Pi}_n\\ &= (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}.(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_1-\alpha_3)^2(\alpha_1-\alpha_4)^2 \ldots (\alpha_1-\alpha_n)^2\\ &\qquad\times(\alpha_2-\alpha_3)^2(\alpha_2-\alpha_4)^2 \ldots (\alpha_2-\alpha_n)^2\\ &\qquad\times(\alpha_3-\alpha_4)^2 \ldots (\alpha_3-\alpha_n)^2\\ &\qquad\quad\text{u. s. w.}\\ &\qquad\times(\alpha_{n-1}-\alpha_n)^2,\end{aligned}$$

und nach dem Satze des Euklides von den Primzahlen kann die Primzahl n in dem Producte

$$\begin{aligned}&(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_1-\alpha_3)^2(\alpha_1-\alpha_4)^2 \ldots (\alpha_1-\alpha_n)^2\\ &\times(\alpha_2-\alpha_3)^2(\alpha_2-\alpha_4)^2 \ldots (\alpha_2-\alpha_n)^2\\ &\times(\alpha_3-\alpha_4)^2 \ldots (\alpha_3-\alpha_n)^2\\ &\quad\text{u. s. w.}\\ &\times(\alpha_{n-1}-\alpha_n)^2\end{aligned}$$

nur dann aufgehen, wenn sie in dem Producte

$$(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)\ldots\ldots(\alpha_1-\alpha_n)$$
$$\times(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)\ldots\ldots(\alpha_2-\alpha_n)$$
$$\times(\alpha_3-\alpha_4)\ldots\ldots(\alpha_3-\alpha_n)$$
u. s. w.
$$\times(\alpha_{n-1}-\alpha_n)$$

aufgeht; also ergiebt sich aus dem Obigen unmittelbar der folgende Satz:

I.

Wenn die positive oder negative Primzahl n in keiner der positiven oder negativen ganzen Zahlen

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ldots\ \alpha_{(n)}$$

aufgeht, wo jetzt (n) den absoluten Werth von n bezeichnen soll; so geht diese Primzahl n jederzeit in dem Producte

$$(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)\ldots(\alpha_1-\alpha_{(n)})$$
$$\times(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)\ldots(\alpha_2-\alpha_{(n)})$$
$$\times(\alpha_3-\alpha_4)\ldots(\alpha_3-\alpha_{(n)})$$
u. s. w.
$$\times(\alpha_{(n)-1}-\alpha_{(n)})$$

auf.

Um ein Beispiel zu geben, so sei $n=5$ und

$$\alpha_1=+12,\ \alpha_2=-6,\ \alpha_3=-9,\ \alpha_4=+8,\ \alpha_5=+4.$$

Dann ist

$$\alpha_1-\alpha_2=+18,\ \alpha_1-\alpha_3=+21,\ \alpha_1-\alpha_4=+4,\ \alpha_1-\alpha_5=+8;$$
$$\alpha_2-\alpha_3=+3,\ \alpha_2-\alpha_4=-14,\ \alpha_2-\alpha_5=-10;$$
$$\alpha_3-\alpha_4=-17,\ \alpha_3-\alpha_5=-13;$$
$$\alpha_4-\alpha_5=+4;$$

woraus auf der Stelle die Richtigkeit des Satzes in dem vorliegenden speciellen Falle erhellet, da 5 in -10 aufgeht.

Wenn wir in der vorher gefundenen Gleichung

$$\overset{\mu}{(n)}.\overset{1}{\Pi}_n\overset{2}{\Pi}_n\overset{3}{\Pi}_n\overset{4}{\Pi}_n\ldots\overset{n}{\Pi}_n$$

$$=(\mu+1)\left\{\begin{array}{l}\lambda_1\overset{2}{\Pi}_n\overset{3}{\Pi}_n\overset{4}{\Pi}_n\ldots\overset{n}{\Pi}_n\\+\lambda_2\overset{1}{\Pi}_n\overset{3}{\Pi}_n\overset{4}{\Pi}_n\ldots\overset{n}{\Pi}_n\\+\lambda_3\overset{1}{\Pi}_n\overset{2}{\Pi}_n\overset{4}{\Pi}_n\ldots\overset{n}{\Pi}_n\\\text{u. s. w.}\\+\lambda_n\overset{1}{\Pi}_n\overset{2}{\Pi}_n\overset{3}{\Pi}_n\ldots\overset{n-1}{\Pi}_n\end{array}\right\}$$

aber $\mu=n$ setzen, so dass also jetzt $n+1$ eine in keiner der positiven oder negativen ganzen Zahlen

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ldots\alpha_n$$

aufgehende Primzahl ist, so wird die vorstehende Gleichung, weil, wie in der vorhergehenden Abhandlung gezeigt worden ist,

$$\overset{n}{(n)}=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\ldots+\alpha_n$$

ist:

$$(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\ldots+\alpha_n)\overset{1}{\Pi}_n\overset{2}{\Pi}_n\overset{3}{\Pi}_n\overset{4}{\Pi}_n\ldots\overset{n}{\Pi}_n$$

$$=(n+1)\left\{\begin{array}{l}\lambda_1\overset{2}{\Pi}_n\overset{3}{\Pi}_n\overset{4}{\Pi}_n\ldots\overset{n}{\Pi}_n\\+\lambda_2\overset{1}{\Pi}_n\overset{3}{\Pi}_n\overset{4}{\Pi}_n\ldots\overset{n}{\Pi}_n\\+\lambda_3\overset{1}{\Pi}_n\overset{2}{\Pi}_n\overset{4}{\Pi}_n\ldots\overset{n}{\Pi}_n\\\text{u. s. w.}\\+\lambda_n\overset{1}{\Pi}_n\overset{2}{\Pi}_n\overset{3}{\Pi}_n\ldots\overset{n-1}{\Pi}_n\end{array}\right\},$$

und die Primzahl $n+1$ geht also hiernach unter den gemachten Voraussetzungen immer in dem Producte

$$(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\ldots+\alpha_n)\overset{1}{\Pi}_n\overset{2}{\Pi}_n\overset{3}{\Pi}_n\overset{4}{\Pi}_n\ldots\overset{n}{\Pi}_n$$

auf.

Auf ganz ähnliche Art wie vorher leitet man hieraus mit Hülfe des Satzes des Euklides von den Primzahlen den folgenden Satz ab, wobei wir jedoch, was übrigens, — wenigstens hier —, eigentlich nicht nöthig wäre, der Kürze wegen, negative Werthe der Primzahlen ausschliessen wollen:

II.

Wenn die positive Primzahl $n+1$, welche grösser als 2 ist, in keiner der positiven oder negativen ganzen Zahlen

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots. \alpha_n$$

aufgeht, und auch deren Summe

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\ldots.+\alpha_n$$

durch $n+1$ nicht ohne Rest theilbar ist; so geht diese Primzahl $n+1$ jederzeit in dem Producte

$$\begin{aligned}(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4) \ldots. (\alpha_1-\alpha_n)\\ \times(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4) \ldots. (\alpha_2-\alpha_n)\\ \times(\alpha_3-\alpha_4) \ldots. (\alpha_3-\alpha_n)\\ \text{u. s. w.}\\ \times(\alpha_{n-1}-\alpha_n)\end{aligned}$$

auf.

Für $n+1=5$ und

$$\alpha_1=-12,\ \alpha_2=+8,\ \alpha_3=-11,\ \alpha_4=+3$$

also

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=-12$$

ist

$$\begin{aligned}\alpha_1-\alpha_2=-20,\ \alpha_1-\alpha_3=-1,\ \alpha_1-\alpha_4=-15;\\ \alpha_2-\alpha_3=+19,\ \alpha_2-\alpha_4=+\ 5;\\ \alpha_3-\alpha_4=-14;\end{aligned}$$

woraus sogleich die Richtigkeit des Satzes in dem vorliegenden speciellen Falle erhellet.

Wäre $n+1=5$ und

$$\alpha_1=-9,\ \alpha_2=+7,\ \alpha_3=-11,\ \alpha_4=-2$$

also

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=-15;$$

so wäre

$$\begin{aligned}\alpha_1-\alpha_2=-16,\ \alpha_1-\alpha_3=+2,\ \alpha_1-\alpha_4=-7;\\ \alpha_2-\alpha_3=+18,\ \alpha_2-\alpha_4=+9;\\ \alpha_3-\alpha_4=-9;\end{aligned}$$

und $n+1$ würde also in diesem Falle, wo die Summe

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$$

durch $n+1$ ohne Rest theilbar ist, in dem Producte

$$\begin{aligned}(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)\\ \times(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)\\ \times(\alpha_3-\alpha_4)\end{aligned}$$

nicht aufgehen.

Aus dem vorhergehenden Satze ergiebt sich nun aber auch unmittelbar der folgende Satz:

III.

Wenn die positive Primzahl $n+1$, welche grösser als 2 ist, in keiner der positiven oder negativen ganzen Zahlen

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4, \ldots \alpha_n$$

und auch in keiner der Differenzen aufgeht, welche man erhält, wenn man je zwei dieser Zahlen von einander subtrahirt; so geht die Primzahl $n+1$ jederzeit in der Summe

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\ldots+\alpha_n$$

auf.

Ginge nämlich $n+1$ in dieser Summe nicht auf, so müsste es unter den gemachten Voraussetzungen nach dem vorhergehenden Satze in dem Producte

$$\begin{aligned}(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)\ldots\ldots(\alpha_1-\alpha_n)\\ \times(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)\ldots\ldots(\alpha_2-\alpha_n)\\ \times(\alpha_3-\alpha_4)\ldots\ldots(\alpha_3-\alpha_n)\\ \text{u. s. w.}\\ \times(\alpha_{n-1}-\alpha_n),\end{aligned}$$

und folglich nach dem Satze des Euklides von den Primzahlen nothwendig mindestens in einem Factor dieses Products aufgehen, was der gemachten Voraussetzung widerstreitet.

Nach einer anderen in der vorhergehenden Abhandlung eingeführten Bezeichnung ist

$$\overset{m,\mu}{(n)} = \frac{\overset{m}{K}(2,3,4,5,\ldots,n).\alpha_1^{\mu}}{\overset{1}{\Pi}_n} + \frac{\overset{m}{K}(1,3,4,5,\ldots,n).\alpha_2^{\mu}}{\overset{2}{\Pi}_n} + \frac{\overset{m}{K}(1,2,4,5,\ldots,n).\alpha_3^{\mu}}{\overset{3}{\Pi}_n}$$

u. s. w.

$$+ \frac{\overset{m}{K}(1,2,3,4,\ldots,n-1).\alpha_n^{\mu}}{\overset{n}{\Pi}_n}.$$

Ist nun $\mu+1$ eine in keiner der positiven oder negativen ganzen Zahlen

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4, \ldots \alpha_n$$

aufgehende Primzahl, so erhalten wir ganz auf ähnliche Art wie oben mittelst des Fermat'schen Satzes die Gleichung

$$\overset{m,\mu}{(n)} = (\mu+1)\left\{ \frac{\lambda_1.\overset{m}{K}(2,3,4,5,\ldots,n)}{\overset{1}{\Pi}_n} + \frac{\lambda_2.\overset{m}{K}(1,3,4,5,\ldots,n)}{\overset{2}{\Pi}_n} + \frac{\lambda_3.\overset{m}{K}(1,2,4,5,\ldots,n)}{\overset{3}{\Pi}_n} \right.$$

u. s. w.

$$\left. + \frac{\lambda_n.\overset{m}{K}(1,2,3,4,\ldots,n-1)}{\overset{n}{\Pi}_n} \right\}$$

$$+ \frac{\overset{m}{K}(2,3,4,5,\ldots,n)}{\overset{1}{\Pi}_n} + \frac{\overset{m}{K}(1,3,4,5,\ldots,n)}{\overset{2}{\Pi}_n} + \frac{\overset{m}{K}(1,2,4,5,\ldots,n)}{\overset{3}{\Pi}_n}$$

u. s. w.

$$+ \frac{\overset{m}{K}(1,2,3,4,\ldots,n-1)}{\overset{n}{\Pi}_n},$$

d. i., wie leicht erhellet:

$$\overset{m,\mu}{(n)} - \overset{m,0}{(n)} = (\mu+1)\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\lambda_1 . \overset{m}{K}(2,3,4,5,\ldots,n)}{\overset{1}{\Pi}_n} \\ + \dfrac{\lambda_2 . \overset{m}{K}(1,3,4,5,\ldots,n)}{\overset{2}{\Pi}_n} \\ + \dfrac{\lambda_3 . \overset{m}{K}(1,2,4,5,\ldots,n)}{\overset{3}{\Pi}_n} \\ \text{u. s. w.} \\ + \dfrac{\lambda_n . \overset{m}{K}(1,2,3,4,\ldots,n-1)}{\overset{n}{\Pi}_n} \end{array}\right\};$$

wo wie früher $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n$ ganze Zahlen sind.

Setzen wir nun

$$m = n-1, \quad \mu = n;$$

so wird die vorstehende Gleichung:

$$\overset{n-1,n}{(n)} - \overset{n-1,0}{(n)} = (n+1)\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\lambda_1 . \overset{n-1}{K}(2,3,4,5,\ldots,n)}{\overset{1}{\Pi}_n} \\ + \dfrac{\lambda_2 . \overset{n-1}{K}(1,3,4,5,\ldots,n)}{\overset{2}{\Pi}_n} \\ + \dfrac{\lambda_3 . \overset{n-1}{K}(1,2,4,5,\ldots,n)}{\overset{3}{\Pi}_n} \\ \text{u. s. w.} \\ + \dfrac{\lambda_n . \overset{n-1}{K}(1,2,3,4,\ldots,n-1)}{\overset{n}{\Pi}_n} \end{array}\right\};$$

also, weil, wie in der vorhergehenden Abhandlung gezeigt worden ist,

$$\overset{n-1,0}{(n)} = (-1)^{n-1}, \quad \overset{n-1,n}{(n)} = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots\alpha_n$$

d. i., weil unter der oben gemachten Voraussetzung, wenn nur die Primzahl $n+1$ grösser als 2 ist, jedenfalls $n-1$ eine ungerade Zahl ist,

$$\overset{n-1,0}{(n)} = -1, \quad \overset{n-1,n}{(n)} = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots\alpha_n$$

ist:

$$(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots\alpha_n+1)\overset{1}{\Pi}_n\overset{2}{\Pi}_n\overset{3}{\Pi}_n\overset{4}{\Pi}_n\ldots\overset{n}{\Pi}_n$$

$$=(n+1)\left\{\begin{array}{l} \lambda_1\overset{2}{\Pi}_n\overset{3}{\Pi}_n\overset{4}{\Pi}_n\ldots\overset{n}{\Pi}_n.\overset{n-1}{K}(2,3,4,5,\ldots,n) \\ +\lambda_2\overset{1}{\Pi}_n\overset{3}{\Pi}_n\overset{4}{\Pi}_n\ldots\overset{n}{\Pi}_n.\overset{n-1}{K}(1,3,4,5,\ldots,n) \\ +\lambda_3\overset{1}{\Pi}_n\overset{2}{\Pi}_n\overset{4}{\Pi}_n\ldots\overset{n}{\Pi}_n.\overset{n-1}{K}(1,2,4,5,\ldots,n) \\ \qquad\qquad\text{u. s. w.} \\ +\lambda_n\overset{1}{\Pi}_n\overset{2}{\Pi}_n\overset{3}{\Pi}_n\ldots\overset{n}{\Pi}_n.\overset{n-1}{K}(1,2,3,4,\ldots,n-1) \end{array}\right\},$$

woraus sich ergiebt, dass unter den gemachten Voraussetzungen die Primzahl $n+1$ jederzeit in

$$(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots\alpha_n+1)\overset{1}{\Pi}_n\overset{2}{\Pi}_n\overset{3}{\Pi}_n\overset{4}{\Pi}_n\ldots\overset{n}{\Pi}_n$$

aufgeht.

Geht nun aber die Primzahl $n+1$ in keiner der Differenzen

$$\begin{array}{r} \alpha_1-\alpha_2,\ \alpha_1-\alpha_3,\ \alpha_1-\alpha_4,\ldots,\alpha_1-\alpha_n; \\ \alpha_2-\alpha_3,\ \alpha_2-\alpha_4,\ldots,\alpha_2-\alpha_n; \\ \alpha_3-\alpha_4,\ldots,\alpha_3-\alpha_n; \\ \text{u. s. w.} \\ \alpha_{n-1}-\alpha_n \end{array}$$

auf, so geht dieselbe nach dem Satze des Euklides von den Primzahlen offenbar auch in dem Producte

$$\overset{1}{\Pi}_n\overset{2}{\Pi}_n\overset{3}{\Pi}_n\overset{4}{\Pi}_n\ldots\ldots\overset{n}{\Pi}_n$$

nicht auf, und muss folglich nach demselben Satze unter den oben gemachten Voraussetzungen jederzeit in

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots\alpha_n+1$$

aufgehen.

Hierdurch werden wir unmittelbar zu dem folgenden merkwürdigen Satze geführt:

IV.

Wenn die positive 2 übersteigende Primzahl $n+1$ in keiner der n positiven oder negativen ganzen Zahlen

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ldots\ \alpha_n$$

und auch in keiner der Differenzen aufgeht, welche man erhält, wenn man je zwei dieser Zahlen von ein-

ander subtrahirt; so geht die Primzahl $n+1$ jederzeit in

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots\alpha_n+1$$

auf, oder es findet unter den gemachten Voraussetzungen jederzeit die Congruenz

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots\alpha_n\equiv-1 \text{ (Mod. } n+1)$$

Statt. Auch ist, wenn die Primzahl $n+1=2$ ist und nur in α_1 nicht aufgeht, offenbar immer

$$\alpha_1\equiv-1 \text{ (Mod. 2)},$$

was sich von selbst versteht.

Um ein Beispiel zu diesem Satze zu geben, sei $n+1=5$ und

$$\alpha_1=+7,\ \alpha_2=-6,\ \alpha_3=+11,\ \alpha_4=+13;$$

also

$$\begin{aligned}\alpha_1-\alpha_2=+13,\ \alpha_1-\alpha_3=-4,\ \alpha_1-\alpha_4&=-6;\\ \alpha_2-\alpha_3=-17,\ \alpha_2-\alpha_4&=-19;\\ \alpha_3-\alpha_4&=-2;\end{aligned}$$

woraus man sieht, dass alle bei dem vorhergehenden Satze gemachten Voraussetzungen in diesem Falle erfüllt sind. Weil nun

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4=+7.-6.+11.+13=-6006,$$

also

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4+1=-6005$$

ist, so sieht man, dass der Satz im vorliegenden Falle richtig ist.

Wenn man für

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ldots,\ \alpha_n$$

die positiven ganzen Zahlen

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots,\ n$$

setzt, so sind die Voraussetzungen dieses Satzes, wenn nur $n+1$ eine Primzahl ist, offenbar vollständig erfüllt, und man erhält also aus dem Vorhergehenden die Congruenz

$$1.2.3.4\ldots n\equiv-1 \text{ (Mod. } n+1),$$

welche den bekannten Wilson'schen Satz ausspricht, der also unter dem vorhergehenden weit allgemeineren Theoreme als ein specieller Fall enthalten ist, und sich mit der grössten Leichtigkeit aus demselben ableiten lässt.

Da mir die vorhergehende Erweiterung des Wilson'schen Satzes bemerkenswerth zu sein scheint, so habe ich mich veranlasst gesehen, nachzuforschen, ob nicht vielleicht der Fermat'sche Satz einer ähnlichen Erweiterung fähig ist, und will im Folgenden das, was sich mir in dieser Beziehung bis jetzt durch ziemlich einfache Betrachtungen dargeboten hat, mittheilen.

Wir wollen annehmen, dass $n+1$ eine positive Primzahl sei, und

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_n$$

sollen n positive oder negative ganze Zahlen bezeichnen, von denen wenigstens eine, die wir durch α_k bezeichnen wollen, durch $n+1$ nicht theilbar ist. Dagegen sollen die Differenzen

$$\alpha_k - \alpha_1, \alpha_k - \alpha_2, \ldots, \alpha_k - \alpha_{k-1}, \alpha_k - \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_k - \alpha_n$$

sämmtlich durch $n+1$ theilbar sein, woraus dann sehr leicht und ganz von selbst folgt, dass überhaupt die sämmtlichen Differenzen durch $n+1$ theilbar sind, welche man erhält, wenn man je zwei der Zahlen

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_n$$

von einander subtrahirt, so dass man also auch bei der folgenden Betrachtung von der Annahme ausgehen kann, dass diese letztere Bedingung erfüllt sei, weil ihre Erfüllung durch die Erfüllung der ersteren allerdings einfacheren Bedingung unmittelbar und ganz von selbst herbeigeführt wird.

Setzen wir nun

$$\alpha_k - \alpha_1 = \lambda_{1,k}.(n+1),$$
$$\alpha_k - \alpha_2 = \lambda_{2,k}.(n+1),$$
$$\alpha_k - \alpha_3 = \lambda_{3,k}.(n+1),$$
u. s. w.
$$\alpha_k - \alpha_{k-1} = \lambda_{k-1,k}.(n+1),$$
$$\alpha_k - \alpha_k = \lambda_{k,k}.(n+1),$$
$$\alpha_k - \alpha_{k+1} = \lambda_{k+1,k}.(n+1),$$
u. s. w.
$$\alpha_k - \alpha_n = \lambda_{n,k}.(n+1);$$

wo nach der gemachten Voraussetzung

$$\lambda_{1,k}, \lambda_{2,k}, \lambda_{3,k}, \lambda_{4,k}, \ldots \lambda_{n,k}$$

lauter ganze Zahlen sind, da offenbar auch das verschwindende $\lambda_{k,k}$ in diese Kategorie gerechnet werden kann; so ist

$$\alpha_1 = \alpha_k - \lambda_{1,k}.(n+1),$$
$$\alpha_2 = \alpha_k - \lambda_{2,k}.(n+1),$$

$$\alpha_3 = \alpha_k - \lambda_{3,k}.(n+1),$$
$$\alpha_4 = \alpha_k - \lambda_{4,k}.(n+1),$$
u. s. w.
$$\alpha_n = \alpha_k - \lambda_{n,k}.(n+1);$$

und wenn man nun auf beiden Seiten der Gleichheitszeichen multiplicirt, so erhält man offenbar eine Gleichung, welche, wenn L eine ganze Zahl bezeichnet, im Allgemeinen von der Form

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \ldots . \alpha_n = \alpha_k^n + L(n+1)$$

ist. Also ist auch

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \ldots . \alpha_n - 1 = \alpha_k^n - 1 + L(n+1),$$

und da nun nach dem Fermat'schen Satze, weil nach der Voraussetzung α_k nicht durch die Primzahl $n+1$ theilbar ist, jederzeit $\alpha_k^n - 1$ durch $n+1$ theilbar ist, so ist nach dem Vorhergehenden unter den gemachten Voraussetzungen offenbar jederzeit auch

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \ldots . \alpha_n - 1$$

durch die Primzahl $n+1$ theilbar. Wir erhalten daher den folgenden Satz:

V.

Wenn die positive Primzahl $n+1$ wenigstens in *einer* der n positiven oder negativen ganzen Zahlen

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots . \alpha_n$$

nicht aufgeht, dagegen die sämmtlichen Differenzen durch $n+1$ ohne Rest theilbar sind, welche man erhält, wenn man je zwei dieser Zahlen von einander subtrahirt; so geht die Primzahl $n+1$ jederzeit in

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \ldots . \alpha_n - 1$$

auf, oder es findet unter den gemachten Voraussetzungen jederzeit die Congruenz

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \ldots . \alpha_n \equiv +1 \text{ (Mod. } n+1)$$

Statt.

Dass unter diesem Satze, wenn man ihn unabhängig von dem Fermat'schen Satze nach seinem gewöhnlichen Ausdrucke beweisen könnte, dieser letztere Satz als ein besonderer Fall enthalten sein würde, leuchtet auf der Stelle ein.

Setzt man z. B. $n+1=5$ und

$$\alpha_1 = +12, \ \alpha_2 = +7, \ \alpha_3 = +17, \ \alpha_4 = +2;$$

so sind die Voraussetzungen des vorhergehenden Satzes offenbar vollständig erfüllt, und es ist

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4-1=2855,$$

d. h. durch 5 ohne Rest theilbar, wie es nach dem obigen Satze erforderlich ist.

Ist aber z. B. $n+1=5$ und

$$\alpha_1=+17,\ \alpha_2=+7,\ \alpha_3=+2,\ \alpha_4=+8;$$

so sind die Voraussetzungen des vorhergehenden Satzes offenbar nicht vollständig erfüllt, und es ist

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4-1=1903$$

durch 5 nicht theilbar.

Verbindet man die Sätze V. und VI. mit einander, und beachtet, als sich von selbst verstehend, dass, wenn nur 2 in α_1 nicht aufgeht, offenbar immer

$$\alpha_1\equiv\mp1 \text{ (Mod. 2)}$$

ist, so ergiebt sich der folgende Satz:

VI.

Wenn die positive Primzahl $n+1$ in keiner der n positiven oder negativen ganzen Zahlen

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ldots.\ \alpha_n$$

und auch in keiner der Differenzen aufgeht, welche man erhält, wenn man je zwei dieser Zahlen von einander subtrahirt; so geht die Primzahl $n+1$ jederzeit in

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots.\alpha_n+1$$

auf, oder es findet unter den gemachten Voraussetzungen jederzeit die Congruenz

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots.\alpha_n\equiv-1 \text{ (Mod. } n+1)$$

Statt.

Wenn dagegen die positive Primzahl $n+1$ wenigstens in *einer* der n positiven oder negativen ganzen Zahlen

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ldots.\ \alpha_n$$

und in allen den Differenzen aufgeht, welche man er-

hält, wenn man je zwei dieser Zahlen von einander subtrahirt; so geht die Primzahl $n+1$ jederzeit in

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \ldots . \alpha_n - 1$$

auf, oder es findet unter den gemachten Voraussetzungen jederzeit die Congruenz

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \ldots . \alpha_n \equiv +1 \text{ (Mod. } n+1)$$

Statt.

Indem ich wiederhole, dass es nicht meine Absicht ist, diesen Gegenstand in der vorliegenden Abhandlung zu erschöpfen, will ich mir nur noch erlauben, dieselbe mit den folgenden allgemeinen Bemerkungen zu schliessen. Es hat mir nämlich immer geschienen, dass viele der bereits entdeckten höchst merkwürdigen Gesetze der Zahlenlehre noch unter einer zu speciellen Ferm ausgedrückt und aufgefasst, und noch nicht auf ihren wahren möglichst allgemeinen Ausdruck gebracht worden sind; und so sehr ich auch die vielen trefflichen Leistungen, namentlich der neueren Zeit, auf diesem Gebiete anzuerkennen bereit bin, so scheint mir doch eine immer noch grössere Erweiterung und Verallgemeinerung der Gesichtspunkte, unter denen die Gesetze dieser herrlichen Wissenschaft gegenwärtig aufgefasst werden, nöthig zu sein, wenn dieselbe noch raschere Fortschritte als bisher machen soll. Was den obigen allgemeinen Satz VI. betrifft, so ist es mir sehr wahrscheinlich, dass sich derselbe noch mehr verallgemeineren lässt, vielleicht in ähnlicher Weise, wie schon früher der Fermat'sche und Wilson'sche Satz verallgemeinert worden sind, was ich hier, ohne mich darüber weiter zu verbreiten, als bekannt voraussetzen kann. Auch werden sich gewiss noch ganz andere einfachere, bessere, namentlich mehr als meine obige Darstellung der wahren Natur des Gegenstandes entsprechende Wege einschlagen lassen, um zu dem Beweise desselben zu gelangen, wobei zugleich die Entdeckung noch anderer Gesetze nicht ausbleiben wird, wie dies immer bei Untersuchungen dieser Art, die in der That auch eben dadurch einen ganz besonderen Reitz erhalten, der Fall zu sein pflegt, wobei ich nochmals bemerke, dass ich in dem Obigen keineswegs eine völlig erschöpfende Darstellung der betreffenden Sätze mir als Zweck vorgesetzt habe, und weitere Untersuchungen über dieselben für jetzt anderen, die sich etwa für diesen Gegenstand interessiren möchten, gern überlasse und anheimstelle.

XXXI.

Ueber strenge und gelinde Winter.

Auszug aus einem Briefe des

Herrn Dr. J. Ph. Wolfers,

astronomischen Rechners an der Königl. Sternwarte zu Berlin

an den Herausgeber.

(Mit den beiden mit *A.* und *B.* bezeichneten lithographirten Tafeln.)

Sie wünschten meine Mittheilungen über Temperatur-Curven zu erhalten, ich werde sie diesem Briefe beifügen und die Curven mitschicken. Meine Hypothese findet, wie alles Neue, Widerspruch, doch auch zu meiner Freude bereits Anklang, ich werde mich auch künftig so lange damit beschäftigen, als ich nicht von der Fruchtlosigkeit dieser Betrachtungen überzeugt werde. Die anbei erfolgenden Zeichnungen sind übrigens die einzigen, welche ich besitze, daher mein Wunsch, sie nach der Benutzung zurückzuerhalten. — Fast jeder Winter, welcher sich entweder durch besonders strenge Kälte oder durch gelinde Witterung auszeichnet, pflegt in den öffentlichen Blättern mit den Worten besprochen zu werden, dass die ältesten Leute sich keines ähnlichen erinnern. Dies war z. B. mit dem vorjährigen (1845—1846) ziemlich gelinden Winter der Fall. Man könnte hierauf kurz antworten, dass bei alten Leuten das Gedächtniss in der Regel schwach wird und sie sich deshalb keiner ähnlichen Erscheinung erinnern. Allein aus eigener Erfahrung weiss ich, wie leicht die Leiden und Freuden einer einzelnen Jahreszeit vergessen werden, wenn man nicht durch besondere Hülfsmittel die Erinnerung daran festhält, und schon deshalb glaube ich, dass es nicht ganz uninterressant sein wird, auf den vorliegenden Blättern den Verlauf der Temperatur während der 10 vorhergehenden und des gegenwärtigen Winters (1846—47) graphisch vor Augen gestellt zu sehen. Bei etwas aufmerksamer Betrachtung dieser verschiedenen Curven wird man charakteristische Unterschiede derselben wahrnehmen, jedoch glaube ich im Stande zu sein, darzuthun, dass die entschieden gelinden Winter sich wesentlich von den strengen unterscheiden, und dass man diese Unterschiede schon in der Regel an einem verhältnissmässig kleinen Theile jeder Curve wahrnehmen könne. Sollte sich dies, was freilich wegen der ge-

ringen Anzahl der zu Grunde gelegten Curven immer noch problematisch bleibt, später bestätigen; so würde man alsdann im Stande sein, schon beim Beginnen eines jeden Winters seinen Charakter zu erlauschen.

Ehe ich zu diesen Betrachtungen übergehe, liegt es mir ob, über die Beobachtungen Rechenschaft zu geben, auf welche diese Curven begründet sind. Es sind dies die Temperaturen, welche im wahren Mittage an dem Normal-Thermometer der hiesigen Sternwarte abgelesen und welche theils bereits durch den Druck veröffentlicht, theils durch Herrn Dr. Galle mir freundlichst mitgetheilt worden sind. In den ersten bereits erschienenen Jahrgängen wurde aus drei, während des Tages angestellten Beobachtungen die jedesmalige mittlere Temperatur abgeleitet und ich würde diese zur Anlage der Curven gewählt haben, wenn nicht in den spätern Jahrgängen die Temperatur des Mittages allein angegeben wäre. Der Consequenz wegen wählte ich daher von Anfang an diese einzelne Temperatur, welche übrigens im Winter wenig von der mittlern Temperatur des Tages verschieden ist.

Es war z. B.

am 15. Jan. 1836	die Mittagstemper.	$=+2^{\circ},77$,	die mittlere	$=+2^{\circ},60$,
„ 15. „ 1837	„ „	$-2,29$,	„ „	$-2,24$,
„ 15. „ 1838	„ „	$-8,50$,	„ „	$-9,28$,
„ 15. Febr. „	„ „	$-3,06$,	„ „	$-4,01$,
„ 15. März „	„ „	$+6,26$,	„ „	$+5,60$.

Diese Tage habe ich ohne besondere Auswahl angesetzt und die einzelnen, bis 1° ansteigenden Unterschiede würden freilich von Belang sein, wenn ich, wie es bisher meistens geschehen, die mittlern Temperaturen der ganzen Winter bestimmen und aus dem Resultat den Charakter des strengen oder gelinden ableiten wollte. Hier werden wir es jedoch mehr mit dem Gange der Temperatur von einem Tage zum andern, als mit der absoluten Grösse derselben an einzelnen Tagen zu thun haben und daher werden jene Unterschiede von keinem besonderen Belange sein.

In der Regel erstrecken sich die Curven über die fünf Monate vom 15. November bis zum 15. März, und nur in Einem Falle, im Frühjahre 1845, habe ich ein kleines Stück bis zum 23. März hinzugefügt, weil bis zu diesem Tage der damalige strenge Nachwinter anhielt. Die starke horizontale, durch jede Curve hindurchgehende Linie bezeichnet die Temperatur 0°, jedes Intervall in vertikaler Richtung entspricht 2° R., jede vertikale Linie gehört einem Tage an und die stark ausgezogenen vertikalen Linien bezeichnen den Anfang der Monate. In den Schaltjahren 1840 und 1844 gehört die Linie des 1. März dem 29. Februar an, dieselbe Anomalie findet bei den folgenden Linien bis zum 15. März in diesen Jahren statt.

Um nun von strengen und gelinden Wintern sprechen zu können, schicke ich folgende Erklärung voraus. Unter einem strengen Winter will ich einen solchen verstehen, in welchem die

Temperatur drei bis vier Wochen hindurch ganz oder fast unausgesetzt unter dem Gefrierpunkte bleibt, ohne Rücksicht auf den absolut tiefen Stand des Thermometers. Unter einem gelinden Winter verstehe ich einen solchen, in welchem die Temperatur an mehrern einzelnen Tagen auch mehr oder weniger tief unter den Gefrierpunkt sinken mag, wo aber die Dauer dieser niedrigen Temperatur beschränkt ist und die letztere mit eintretender höherer Temperatur von längerer Dauer abwechselt. Diese Erklärungen stimmen keinesweges mit denjenigen überein, welche in den meteorologischen Lehrbüchern aufgestellt zu werden pflegen, es können vielleicht selbst Fälle vorkommen, in denen ein strenger Winter nach meiner Erklärung einem gelinden nach jener entspricht und umgekehrt; allein ich wollte zunächst keine neuen Bezeichnungen einführen, wie etwa wenn ich statt eines strengen einen beständigen oder hartneckigen Winter aufgestellt hätte. Uebrigens bitte ich meine Erklärungen nur als für die hier anzustellenden Betrachtungen aufgestellt anzusehen, nur so darf ich sicher sein, nicht missverstanden zu werden.

Betrachten wir demgemäss die vorliegenden 11 Curven, so entsprechen unzweifelhaft die fünf folgenden I, III, VII, VIII und X gelinden, die vier II, V, IX und XI strengen Wintern; die zwei übrigen IV und VI weder ganz strengen noch ganz gelinden Wintern, sie neigen sich jedoch mehr den erstern zu. Die erstgenannten fünf Curven sind von den vier zweitgenannten wesentlich verschieden, allein man wird für jede dieser beiden Klassen ein gemeinschaftliches Kennzeichen herausfinden können, welches sich bald früher bald später zeigt und wonach man den weitern Verlauf des Winters beurtheilen kann.

Ich behaupte demnach, dass in den gelinden Wintern sich anfangs eine kurze Kälteperiode einstellt, welche mit einer, längere Zeit anhaltenden, wärmern Periode abwechselt. In der Curve I., von 1836—1837, dauerte die erste Periode vom 23. bis zum 27. November und die darauf folgende wärmere Periode vom 28. November bis zum 23. December. In der Curve III., von 1838—1839, fand die Kälte vom 19. bis zum 28. November, die Wärme vom 29. November bis zum 18. Januar statt. In der Curve VII., von 1842—1843, herrschte die Kälte nur 3—4 Tage und die darauf folgende Wärme 12 Tage hindurch. In der Curve VIII., von 1843—1844, stand das Thermometer nur Einen Tag unter 0 und es folgte eine warme Periode von 26tägiger Dauer. Endlich währte in der Curve X., von 1845—1846, die Kälteperiode etwa 3, die warme 18 Tage. Dieser letztgenannte Winter wurde als ein auffallend gelinder in den Zeitungen besprochen, allein mit einem Blick auf die Curven sieht man, dass er bis Ende Februar die beiden Winter von 1842—1843 und 1843—1844 in dieser Beziehung keinesweges übertraf. Zieht man die Ende Februar eingetretene hohe Temperatur in Betracht, so musste hierdurch freilich die mittlere Temperatur des ganzen Winters bedeutend erhöht werden und unter den verzeichneten Curven finden wir nur in der von 1841—1842 ein anderes in dieser Beziehung nahe kommendes Beispiel.

Von den strengen Wintern behaupte ich, dass nach dem Eintritt der ersten Kälte das Thermometer früher oder später wohl

wieder über 0 steigen mag, dass aber diese wärmere Periode, welche ich kurz die Krisis nennen will, nur von kurzer Dauer sein wird. So sehen wir in der Curve II., von 1837—1838, das Thermometer zuerst am 11. December unter 0 sinken und bis zum 27. in Perioden von wenigen Tagen auf- und niedersteigen, worauf am letztgenannten Tage die Kälte entschieden das Uebergewicht erhält und wir in dem folgenden Theile der Curve das wahre Ideal eines strengen Winters wahrnehmen. In der Curve V., von 1840—1841, sinkt das Thermometer am 9. December unter 0 und es tritt sogleich eine anhaltende Kälteperiode bis zum 1. Januar ein. Jetzt findet eine Krisis von 3 Tagen statt, wo die Wärme jedoch nicht voll 1° erreicht und es folgen hierauf im Januar und Februar bis Anfang März die Kälteperioden so überwiegend, dass der ganze Winter nothwendig ein sehr strenger genannt werden muss. Der dritte strenge Winter findet sich in der Curve X., von 1844—1845. Hier tritt die erste Kälte bereits am 28. November ein und währt bis zum 15. December. Nun folgt eine nur 6 Tage währende Krisis, hierauf eine achttägige Kälteperiode und dann während des ganzen Januars gelinde Kälte. Dass aber das Kennzeichen des strengen Winters richtig war, sehen wir an der folgenden Kälteperiode, welche mit sehr kurzen und geringen Unterbrechungen vom 7. Februar bis zum 23. März fortdauert. Man könnte diesen Winter als die Verbindung zweier strengen Winter, eines Früh- und Spätwinters, durch einen gelinden Januar bezeichnen. Der vierte zu betrachtende strenge Winter ist der letzte von 1846—1847, unter XI. verzeichnete. Er beginnt, ähnlich wie der eben besprochene, am letzten November und lässt sich sogleich als ein hartneckiger an, wenn er auch in den ersten zehn Tagen sich nicht als sehr streng darstellt. Die am 20. December eintretende Krisis währt nur vier Tage und von da ab tritt der strenge Winter ganz entschieden ein, indem vom 24. December bis zum 24. Januar die Temperatur sich nicht über den Gefrierpunkt erhebt. Diese vier strengen Winter entsprechen demnach dem oben aufgestellten Kennzeichen.

Es bleiben nun noch zwei Curven zu betrachten übrig. Die unter IV. verzeichnete, von 1839—1840, entspricht in ihrem Lauf vom 2. bis 21. December einem strengen Winter, man wird den ganzen Verlauf bis zum 16. Januar auch als einen solchen betrachten können, dann aber treten Wärmeperioden überwiegend ein und es kann demnach dieser Winter nur als ein kurzer und strenger Frühwinter bezeichnet werden. Aehnlich stellt uns die Curve VI., von 1841—1842, einen kurzen strengen Winter dar, welcher vorzugsweise in den Januar fällt, wo die Kälte entschieden vorherrschend ist und 16 kalte Tage ohne Unterbrechung vorliegen. Die beiden zuletzt besprochenen Winter entsprechen nun zwar, wie ich eben angedeutet habe, dem Charakter eines strengen, und können als solche betrachtet werden; ich halte es jedoch für besser, sie bei der aufzustellenden Analogie als Ausnahmefälle auszuschliessen.

Fassen wir nun das Resultat der neun andern Winter zusammen, von denen fünf gelinde und vier strenge waren, so kann man die beiderseitigen Kennzeichen auf folgende Weise mathematisch kurz aussprechen. Tritt im Anfange ein kurzes minus ein,

worauf ein grösseres plus folgt, so wird der Winter ein gelinder werden. Wird das erste, längere oder kürzere minus nur durch ein kurzes plus unterbrochen, so wird der Winter streng ausfallen. Dies ist ein schwacher Versuch, um aus dem Anfange des Winters auf den weitern Verlauf zu schliessen, was meines Wissens bis jetzt auf ähnliche Weise noch nicht geschehen ist. Ob die Erfahrung künftig die Wahrheit der aufgestellten Analogieen bestätigen wird oder nicht, steht dahin; im erstern Falle würde ich die Resultate elfjähriger Erfahrung auf eine bestimmte und fruchtbringende Weise gedeutet haben.

XXXII.

Mein letztes Wort gegen Herrn Doctor Barfuss.

Von dem

Herrn Professor Dr. O. Schlömilch

an der Universität zu Jena.

„Spät kommt Ihr, doch Ihr kommt; der weite Weg, Graf Isolan', entschuldigt Euer Säumen."

Ich habe mich beim Lesen der nochmaligen Einreden des Herrn Dr. Barfuss verschiedene Male gefragt, ob denn eigentlich meine Wenigkeit es ist, wogegen dort polemisirt wird, denn in der That hätte ich es kaum für der Mühe werth gehalten, auf solchen Unsinn zu antworten, wie ihn Herr Dr. Barfuss (höchst siegreich natürlich) widerlegt. Der Grund dieser Verwunderung liegt aber sehr einfach in der wirklich originellen Taktik, die der Herr Doctor gegenwärtig anzunehmen sich erlaubt hat und die freilich der Art ist, dass mit ihr auch ein Drieberg über einen Humboldt — nicht den Sieg davon tragen — aber wohl zu schimpfen Gelegenheit finden würde. Das schlaue Manövre besteht nämlich darin, alles, was einem unbequem wird, mit völligem Stillschweigen zu übergehen, dafür aber dem Gegner so viel Unsinn als möglich in die Schuhe zu schieben, je toller, desto besser, denn auf Wahrheit kommt's gar nicht mehr an, und nun am Ende sich über die ungeheure Bornirtheit des anderen lustig zu machen. Auf die Dauer wird freilich diese Kunst nicht vorhalten, denn hat es auch der Eine mit noch so viel Glück und Geschick versucht,

den Anderen lächerlich zu machen, so wird doch eine einfache Darstellung des wahren Sachbestandes hinreichen, um Jenen an den verdienten Pranger der öffentlichen Meinung zu stellen. Diese Bemerkungen sind es einzig und allein, welche mich zur Redaktion der nachfolgenden wenigen Zeilen bewogen haben; ich will nur mit wenigen Worten auseinandersetzen, was ich eigentlich gemeint habe und was Herr Dr. Barfuss aus meinen Worten gemacht hat; das Uebrige ergiebt sich dann von selbst.

Es ist eine bekannte Sache, dass durch mehrmaliges Vorkommen einer Erscheinung nur die Möglichkeit, aber nie die Nothwendigkeit derselben bewiesen wird; 100 Beispiele für eine Regel (etwa die regula falsi) beweisen nur, dass dieselbe richtige Resultate liefern kann; *ein einziges* Beispiel aber, in welchem die Regel nicht trifft, reicht hin, um ihre Unsicherheit (Nichtallgemeingültigkeit) zu begründen. So habe ich a posteriori aus den Consequenzen, welche sich an die Gleichungen

$$-\frac{2x}{x^2-1}=(x-\frac{1}{x})+(x^3-\frac{1}{x^3})+(x^5-\frac{1}{x^5})+\ldots,$$

$$0=(x+\frac{1}{x})+(x^3+\frac{1}{x^3})+(x^5+\frac{1}{x^5})+\ldots$$

knüpfen, die Unsicherheit der Rechnung mit divergirenden Reihen dargethan; ich habe ferner gezeigt, dass der einzige Weg, um aus diesen Irrthümern des Calcüls herauszukommen und sich vor künftigen zu hüten, darin besteht, die Begriffe der arithmetischen Summe und der syntaktischen Entwickelung durch besondere Zeichen auseinander zu halten; das Erste war eine vollendete Thatsache, denn nur ein Blinder konnte die Resultate der mitgetheilten Rechnung leugnen und nur ein Wahnsinniger sie richtig finden, das Zweite war ein Vorschlag, und gewiss ein beachtungswerther. Würde nicht der Geometer die Hände über dem Kopfe zusammenschlagen, wenn man Gleichheit mit = und dann Aehnlichkeit auch mit = bezeichnen wollte? Nun nennen wir aber Summe einer Reihe die Gränze, welcher man sich nähert, wenn man immer mehr Glieder einer Reihe addirt und wir beweisen, dass man die Summe der ins Unendliche verlängerten Reihe gleich setzen darf. Bei einer divergirenden Reihe wie $1-1+1-$ etc. giebt es keine solche Gränze, also keine arithmetische Summe und wer jetzt dies einer bestimmten Grösse gleich setzt, bringt eine eben so heillose Confusion in die Analyse, wie einer, der Gleichheit und dann auch Aehnlichkeit mit = bezeichnet, in die Geometrie. Was erwidert nun Herr Dr. Barfuss auf alles Diess? Nichts! — Die Thatsachen ignorirt er, auf den Vorschlag findet er sich nicht bewogen einzugehen, aber halt, er bringt ein Beispiel, worin die Rechnung mit divergenten Reihen etwas Richtiges giebt. — Lächerliche Polemik! als wenn ich je geläugnet hätte, dass unter Umständen bei solchen Rechnungen etwas Richtiges herauskommen könnte, dann nämlich, wenn die Reihen der Art sind, dass sie innerhalb eines, wenn auch kleinen Intervalles convergiren. Diess ist in des Herrn Doctors Beispiele der Fall, die Reihen $1-x+x^2$ etc., $1-2x+3x^2$ etc. convergiren für $x<1$, und da das unter dieser Bedingung gefundene Resultat eine blos identische Transformation

ist, so gilt dasselbe unabhängig von seiner Herleitungsweise, aber man darf diess nicht umkehren (Umkehrungen müssen ja immer bewiesen werden) und daraus schliessen wollen, dass $1-1+1\ldots=\frac{1}{2}$, $1-2+3-\ldots=\frac{1}{4}$ sei etc. Weit entfernt also, dass hier Herr Dr. Barfuss etwas gegen mich vorbringt, bestätigt er vielmehr einen der von mir aufgestellten Sätze (dass solche Reihen, welche innerhalb eines Intervalles convergiren, richtige Resultate geben), den Hauptsatz aber, dass Reihen, die jederzeit divergiren, wie

$$(x+\frac{1}{x})+(x^2+\frac{1}{x^2})+(x^3+\frac{1}{x^3})+\ldots,$$

auch immer falsche Resultate liefern, trifft das Alles gar nicht.

Ich will hier noch eine Bemerkung einschalten, welche das Phantom einer syntaktischen Bedeutung der Reihen völlig vernichtet. Man könnte sagen: allerdings sind z. B.

$$\frac{1}{1-x} \text{ und } 1+x+x^2+\ldots$$

nur für $x<1$ einander gleich, aber jenseit dieser Stelle tritt die syntaktische Verwandtschaft ein; dem gegenüber will ich zeigen, dass über die Stelle hinaus, wo die Reihe divergent wird, zwischen ihr und der Funktion links durchaus keine Beziehung mehr statt findet. Es sei $\varphi(x)$ eine Funktion, welche von $x=0$ bis $x=a$ stetig bleibt, hier aber diskontinuirlich wird. Dieser Beweis beruht auf einer Eigenthümlichkeit des Ausdruckes:

$$f(x)=\varphi(x).\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin at\cos xt}{t}dt+\psi(x).\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin xt\cos at}{t}dt,$$

worin $\psi(x)$ eine ganz willkührliche Funktion bezeichnet. Erinnert man sich, dass

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin \alpha t\cos \beta t}{t}dt=1 \text{ ist für } \beta<\alpha,$$
$$\text{dagegen } =0 \quad \text{für } \beta>\alpha;$$

so folgt auf der Stelle

$$f(x)=\varphi(x) \text{ für } x<a,$$
$$\text{dagegen } f(x)=\psi(x) \quad ,, \quad x>a.$$

Verwandelt man $\varphi(x)$ in eine Reihe von der Form

$$\varphi(x)=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots\ldots \qquad (\mathfrak{D})$$

so ist

$$A_0=\varphi(0),\ A_1=\frac{\varphi'(0)}{1},\ A_2=\frac{\varphi''(0)}{1.2},\ldots$$

und die Coeffizientenbestimmung geschieht also mittelst des Werthes $x=0$; daraus folgt, dass, wenn man

$$f(x)=B_0+B_1x+B_2x^2+\ldots.$$

setzt, $B_0=A_0$, $B_1=A_1$, ... sein muss, weil für $x<a$, mithin auch für $x=0$, die Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ zusammenfallen. Gilt also die Gleichung (☽), so gilt auch die folgende:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x)\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin at\cos xt}{t}dt+\psi(x)\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin xt\cos at}{t}dt\\ =A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots.\end{aligned}\right\}\ (\odot)$$

Sollte nun die Gleichung (☽) über $x=a$ hinaus noch irgend eine Bedeutung haben, d. h. sollte die Reihe in irgend einer Beziehung zu $\varphi(x)$ stehen, so müsste diess in der Gleichung ($\odot$) ebenso der Fall sein, weil hier dieselbe Reihe vorkommt. Für $x>a$ reduzirt sich aber die linke Seite von ($\odot$) auf $\psi(x)$, und daher haben wir den Satz: wenn für $x>a$ eine Beziehung zwischen $A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots.$ und der Funktion $\varphi(x)$ statt finden soll, so muss dieselbe Beziehung zwischen A_0+A_1x+etc. und $\psi(x)$ vorhanden sein. Nun ist aber $\psi(x)$ eine von $\varphi(x)$ verschiedene und völlig willkührliche Funktion und zwischen einer solchen und einer ganz bestimmten Reihe (d. h. einer solchen, deren Coeffizienten unveränderliche Werthe haben) kann überhaupt gar keine Beziehung statt finden, eben weil durch die Willkührlichkeit von $\psi(x)$ jede etwa statuirte Beziehung sogleich aufgehoben werden kann. Da nun zwischen $\psi(x)$ und der Reihe kein Zusammenhang möglich ist, so giebt es auch keinen zwischen $\varphi(x)$ und der Reihe, sobald $x>a$ genommen wird. Dass aber gleichzeitig die Reihe divergirt, weiss man a priori aus dem Cauchy'schen Satze, denn der Modulus von x ist hier grösser als der Modulus a desjenigen x, für welches $\varphi(x)$ eine Unterbrechung der Continuität erleidet.

Wenn sich nun bei dem Streite über die Zulässigkeit divergenter Reihen Herr Dr. Barfuss darauf beschränkt, die Hauptsachen unerörtert zu lassen und gegen Dinge zu eifern, die ich von allem Anfange her zugegeben habe, so tritt dagegen die wirklich entsetzliche Erbärmlichkeit seiner Polemik da in ihrer ganzen Glorie auf, wo er gegen das Resultat

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1-x^2}=0$$

zu Felde zieht. Bis hieher hatte der Streit von seiner Seite doch noch einigen Schein von Ehrlichkeit, hier aber fängt er an, sich solcher Waffen zu bedienen, mit denen man, um einen gelinden Ausdruck zu brauchen, seine Moralität in ein zweideutiges Licht stellt. Ich bitte zu vergleichen. — Meine Frage war: ist

$$\int\frac{dx}{x}=lx+C \text{ oder } =\tfrac{1}{2}l(x^2)+C$$

und ich habe darauf geantwortet: sowohl lx als $\frac{1}{2}l(x^2)$ befriedige die Differenzialgleichung $dy=\frac{dx}{x}$, aber da lx und $\frac{1}{2}l(x^2)$ *verschiedene* Funktionen sind, so muss man aus anderen Eigenschaften des Integrales jene Frage entscheiden. Nun ist aber

$$\int\frac{d(-x)}{(-x)}=\int\frac{dx}{x},$$

und folglich muss, wenn $\varphi(x)$ den von x abhängigen Theil des Integrales bezeichnet, $\varphi(-x)=\varphi(x)$ sein. Man kann daher nicht $\varphi(x)=lx$ setzen, weil dann diese Eigenschaft nicht statt fände, sondern muss $\varphi(x)=\frac{1}{2}l(x^2)$ nehmen. — Hier behauptet nun Herr Dr. Barfuss, ich suchte das Imaginäre dadurch zu vermeiden, dass ich sagte $l(-1)=\frac{1}{2}l(-1)^2=l1=0$, und fragt mich nachher, ob ich nicht wüsste, dass $\log(-a)$ und $\frac{1}{2}l(-a)^2$ verschiedene Funktionen seien!! Wirklich, ich traute meinen Augen kaum, als ich das sah! Nachdem ich ausdrücklich in meiner algebraischen Analysis bemerkt habe, dass lx und $\frac{1}{2}l(x^2)$ zwei sehr verschiedene Funktionen sind *), nachdem ich eben *wegen* ihrer Verschiedenheit die Frage, ob $\int\frac{dx}{x}=lx$ oder $=\frac{1}{2}l(x^2)$ sei, aufgeworfen hatte (denn sonst wäre sie überflüssig gewesen), werde ich von Herrn Dr. Barfuss des Unsinnes beschuldigt, $l(-a)$ und $\frac{1}{2}l(-a)^2$ nicht unterscheiden zu können! — Nun sind aber nur zwei Fälle möglich: entweder hat Herr Dr. Barfuss meine Exposition aus Mangel an Fassungskraft nicht verstanden, oder er hat sie nicht verstehen wollen. Im ersten Falle verbietet es mir die Beschränktheit meiner Zeit, diese Polemik zur Belehrung des Herrn Dr. Barfuss weiter fortzusetzen, im zweiten halte ich es unter meiner Würde, noch ein ferneres Wort an ihn zu verschwenden.

---

*) S. 163. heisst es: „lz und $\frac{1}{2}l(z^2)$ sind ganz *verschiedene* Funktionen von z, die wohl für positive z übereinstimmen, aber nicht für negative u. s. w. Construirt man beide Funktionen geometrisch, so hat die der ersten Funktion entsprechende Curve nur *einen* Zweig, die andere *zwei* congruente Zweige. Es ist daher *nicht* für *jedes* z, $l(z^2)=2lz$.“ Kann man sich deutlicher über die Verschiedenheit von lz und $\frac{1}{2}l(z^2)$ aussprechen?

XXXIII.

Ueber einen Satz vom Tetraeder.

Von
Herrn C. G. Flemming,
Lehrer am Conradinum zu Jenkau bei Danzig.

Lehrsatz. Halbirt man die sechs Kanten des Tetraeders und legt durch jeden Halbirungspunkt eine Ebene senkrecht gegen die gegenüberliegende Kante, so schneiden sich diese sechs Ebenen in einem Punkte, welcher mit dem Schwerpunkte des Tetraeders und dem Mittelpunkte der um das Tetraeder beschriebenen Kugel auf einer geraden Linie liegt, und der Schwerpunkt liegt in der Mitte der beiden andern.

I. Analytischer Beweis. Wenn ein Tetraeder mit einer Ecke in dem Anfangspunkte eines rechtwinkligen Coordinatensystems liegt und die Coordinaten der andern drei Eckpunkte $x'\,y'\,z'$, $x''\,y''\,z''$, $x'''\,y'''\,z'''$ heissen, so sind, wie man durch Betrachtung ähnlicher Dreiecke leicht sieht, die Coordinaten der Mittelpunkte seiner Kanten:

$$\tfrac{1}{2}x',\ \tfrac{1}{2}y',\ \tfrac{1}{2}z';\quad \tfrac{1}{2}x'',\ \tfrac{1}{2}y'',\ \tfrac{1}{2}z'';\quad \tfrac{1}{2}x''',\ \tfrac{1}{2}y''',\ \tfrac{1}{2}z''';$$

$$\tfrac{1}{2}(x'+x''),\ \tfrac{1}{2}(y'+y''),\ \tfrac{1}{2}(z'+z'');$$

$$\tfrac{1}{2}(x'+x'''),\ \tfrac{1}{2}(y'+y'''),\ \tfrac{1}{2}(z'+z''');$$

$$\tfrac{1}{2}(x''+x'''),\ \tfrac{1}{2}(y''+y'''),\ \tfrac{1}{2}(z''+z''').$$

Als Gleichungen für die Projectionen der Kanten des Tetraeders auf die xz und yz Ebene erhält man folgende:

$$x=\frac{x'}{z'}z,\quad y=\frac{y'}{z'}z;$$

$$x=\frac{x''}{z''}z,\quad y=\frac{y''}{z''}z;$$

$$x=\frac{x'''}{z'''}z,\quad y=\frac{y'''}{z'''}z;$$

$$x - x' = \frac{x' - x''}{z' - z''}(z - z'), \quad y - y' = \frac{y' - y''}{z' - z''}(z - z');$$

$$x - x' = \frac{x' - x'''}{z' - z'''}(z - z'), \quad y - y' = \frac{y' - y'''}{z' - z'''}(z - z');$$

$$x - x'' = \frac{x'' - x'''}{z'' - z'''}(z - z''), \quad y - y'' = \frac{y'' - y'''}{z'' - z'''}(z - z'').$$

Die sechs ersten dieser Gleichungen gehören zu den Kanten, welche durch den Anfangspunkt gehen, die sechs letzten zu den drei übrigen Kanten. Um nun die Gleichungen für die Ebenen aufzusuchen, von denen jede durch den Mittelpunkt einer Kante geht und senkrecht auf der gegenüberliegenden Kante steht, muss man sich erinnern, dass, wenn eine Linie auf einer Ebene senkrecht steht, auch die Projectionen der Linie senkrecht auf den Schnitten jener Ebene mit den Coordinatenebenen sein müssen. Ist nun die Gleichung der Ebene

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

so sind

$$x = -\frac{C}{A}z - \frac{D}{A},$$

$$y = -\frac{C}{B}z - \frac{D}{B}$$

die Gleichungen für die Schnitte derselben mit der xz und yz Ebene. Es seien ferner $x = az + b$ und $y = a'z + b'$ die Gleichungen für die Projectionen der Linie auf diese Coordinatenebenen, so müssen, wenn diese auf jenen senkrecht stehen sollen, die Bedingungsgleichungen

$$-\frac{1}{a} = -\frac{C}{A}, \quad -\frac{1}{a'} = -\frac{C}{B},$$

oder

$$A = aC \text{ und } B = a'C$$

statt finden. Setzt man diese Werthe für A und B in die Gleichung der Ebene hinein, so erhält man

$$ax + a'y + z + \frac{D}{C} = 0$$

als Gleichung für die Ebene, welche auf der gegebenen Linie senkrecht ist. Soll sie ausserdem noch durch einen Punkt, dessen Coordinaten p, q, r sind, gehen, so müssen auch diese der gefundenen Gleichung genügen und daher

$$ap + a'q + r + \frac{D}{C} = 0$$

sein. Zieht man diese Gleichung von der vorigen ab, so erhält man

$$a(x-p)+a'(x-q)+(z-r)=0$$

als Gleichung für die Ebene, welche sowohl senkrecht auf der gegebenen Linie ist als auch durch den Punkt pqr geht.

Setzen wir nun für pqr die oben angegebenen Ausdrücke für die Coordinaten der Mittelpunkte der Kanten, und für a und a' die Ausdrücke aus den Gleichungen der entsprechenden gegenüberliegenden Kante, so erhalten wir als Gleichungen für die in Rede stehenden sechs Ebenen, nachdem wir sie nach xyz geordnet haben, folgende:

$$(1) \quad x'x+y'y+z'z=\tfrac{1}{2}\{x'(x''+x''')+y'(y''+y''')+z'(z''+z''')\},$$

$$(2) \quad x''x+y''y+z''z=\tfrac{1}{2}\{x''(x'+x''')+y''(y'+y''')+z''(z'+z''')\},$$

$$(3) \quad x'''x+y'''y+z'''z=\tfrac{1}{2}\{x'''(x'+x'')+y'''(y'+y'')+z'''(z'+z'')\};$$

$$(4) \quad (x'-x'')x+(y'-y'')y+(z'-z'')z=\tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}x'''(x'-x'')+y'''(y'-y'')\\ +z'''(z'-z'')\end{array}\right\},$$

$$(5) \quad (x'-x''')x+(y'-y''')y+(z'-z''')z=\tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}x''(x'-x''')+y''(y'-y''')\\ +z''(z'-z''')\end{array}\right\},$$

$$(6) \quad (x''-x''')x+(y''-y''')y+(z''-z''')z=\tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}x'(x''-x''')+y'(y''-y''')\\ +z'(z''-z''')\end{array}\right\}.$$

Um den Term rechter Hand zu vereinfachen, wollen wir folgende Substitutionen machen:

$$x''x'''+y''y'''+z''z'''=\beta',$$
$$x'x'''+y'y'''+z'z'''=\beta'',$$
$$x'x''+y'y''+z'z''=\beta'''.$$

Hiedurch nehmen jene sechs Gleichungen eine einfachere Gestalt an, nämlich:

$$(1) \qquad x'x+y'y+z'z=\frac{\beta'''+\beta''}{2},$$

$$(2) \qquad x''x+y''y+z''z=\frac{\beta'''+\beta'}{2},$$

$$(3) \qquad x'''x+y'''y+z'''z=\frac{\beta''+\beta'}{2};$$

$$(4) \qquad (x'-x'')x+(y'-y'')y+(z'-z'')z=\frac{\beta''-\beta'}{2},$$

$$(5) \qquad (x'-x''')x+(y'-y''')y+(z'-z''')z=\frac{\beta'''-\beta'}{2},$$

$$(6) \qquad (x''-x''')x+(y''-y''')y+(z''-z''')z=\frac{\beta'''-\beta''}{2}.$$

Man sieht nun sogleich, dass die drei letzten Gleichungen von den drei ersten abhängen, indem man diese erhält, wenn man suc-

cessive die zweite von der ersten, die dritte von der ersten und die dritte von der zweiten abzieht. Da wir also nur drei unabhängige Gleichungen haben, so muss es für jede der Coordinaten xyz einen Werth geben, welcher alle sechs Gleichungen befriedigt, oder die durch diese Gleichungen ausgedrückten Ebenen müssen sich in einem Punkte schneiden.

Wir wollen nun die drei ersten Gleichungen auflösen, um die Coordinaten des Schnittpunktes jener sechs Ebenen zu bestimmen. Damit die Rechnung vereinfacht werde, werden wir setzen:

$$x'^2+y'^2+z'^2=\alpha', \quad y''z'''-z''y'''=\xi', \quad z''x'''-x''z'''=\eta',$$
$$x''^2+y''^2+z''^2=\alpha'', \quad z'y'''-y'z'''=\xi'', \quad x'z'''-z'x'''=\eta'',$$
$$x'''^2+y'''^2+z'''^2=\alpha''', \quad y'z''-z'y''=\xi''', \quad z'x''-x'z''=\eta''',$$
$$x''y'''-y''x'''=\zeta',$$
$$y'x'''-x'y'''=\zeta'',$$
$$x'y''-y'x''=\zeta''',$$
$$x'y''z'''+y'z''x'''+z'x''y'''-x'z''y'''-y'x''z'''-z'y''x'''=\lambda,$$

und uns einiger von den Relationen bedienen, welche Lagrange zwischen diesen Grössen aufgestellt hat, nämlich:

$$(1)\quad \eta''\zeta'''-\zeta''\eta'''=\lambda x', \qquad (3)\quad x'\eta'+x''\eta''+x'''\eta'''=0,$$
$$(2)\quad \zeta''\xi'''-\xi''\zeta'''=\lambda y', \qquad (4)\quad x'\zeta'+x''\zeta''+x'''\zeta'''=0,$$
$$(5)\quad y'\zeta'+y''\zeta''+y'''\zeta'''=0,$$

$$(6)\quad \begin{cases} x'=\dfrac{\alpha'\xi'+\beta'''\xi''+\beta''\xi'''}{\lambda}, \\ x''=\dfrac{\beta'''\xi'+\alpha''\xi''+\beta'\xi'''}{\lambda}, \\ x'''=\dfrac{\beta''\xi'+\beta'\xi''+\alpha'''\xi'''}{\lambda}, \end{cases} \qquad (7)\quad \begin{cases} y'=\dfrac{\alpha'\eta'+\beta'''\eta''+\beta''\eta'''}{\lambda}, \\ y''=\dfrac{\beta'''\eta'+\alpha''\eta''+\beta'\eta'''}{\lambda}, \\ y'''=\dfrac{\beta''\eta'+\beta'\eta''+\alpha'''\eta'''}{\lambda}, \end{cases}$$

$$(8)\quad \begin{cases} z'=\dfrac{\alpha'\zeta'+\beta'''\zeta''+\beta''\zeta'''}{\lambda}, \\ z''=\dfrac{\beta'''\zeta'+\alpha''\zeta''+\beta'\zeta'''}{\lambda}, \\ z'''=\dfrac{\beta''\zeta'+\beta'\zeta''+\alpha'''\zeta'''}{\lambda}. \end{cases}$$

Durch Elimination und Anwendung der fünf ersten Relationen erhalten wir für die Coordinaten des Schnittpunkts

$$x=\frac{(\xi'\beta'''+\beta'\xi''')+(\xi'\beta''+\beta'\xi'')+(\xi''\beta'''+\beta''\xi''')}{2\lambda},$$

$$y=\frac{(\eta'\beta'''+\beta'\eta''')+(\eta'\beta''+\beta'\eta'')+(\eta''\beta'''+\beta''\eta''')}{2\lambda},$$

$$z=\frac{(\zeta'\beta'''+\beta'\zeta''')+(\zeta'\beta''+\beta'\zeta'')+(\zeta''\beta'''+\beta''\zeta''')}{2\lambda}.$$

Diese Ausdrücke lassen sich vermittelst der Relationen unter (6), (7) und (8) noch auf eine andere Form bringen, in welcher sie für unsern Zweck brauchbarer sein werden, nämlich:

$$x=\frac{\lambda(x'+x''+x''')-(\alpha'\xi'+\alpha''\xi''+\alpha'''\xi''')}{2\lambda},$$

$$y=\frac{\lambda(y'+y''+y''')-(\alpha'\eta'+\alpha''\eta''+\alpha'''\eta''')}{2\lambda},$$

$$z=\frac{\lambda(z'+z''+z''')-(\alpha'\zeta'+\alpha''\zeta''+\alpha'''\zeta''')}{2\lambda}.$$

Wir wollen jetzt zur Bestimmung des Mittelpunktes der um das Tetraeder beschriebenen Kugel übergehen. Dieser Punkt hat die Eigenschaft, dass er von jedem der vier Eckpunkte des Tetraeders gleich weit entfernt ist. Nennen wir diese Entfernung s, so finden, wie man sogleich sieht, folgende Gleichungen Statt, wenn pqr die gesuchten Coordinaten sind:

$$\begin{aligned}
p^2 + q^2 + r^2 &= s^2,\\
(p-x')^2+(q-y')^2+(r-z')^2 &= s^2,\\
(p-x'')^2+(q-y'')^2+(r-z'')^2 &= s^2,\\
(p-x''')^2+(q-y''')^2+(r-z''')^2 &= s^2
\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
p^2 + q^2 + r^2 &= s^2,\\
p^2+q^2+r^2-2px'-2qy'-2rz' &= s^2-\alpha',\\
p^2+q^2+r^2-2px''-2qy''-2rz'' &= s^2-\alpha'',\\
p^2+q^2+r^2-2px'''-2qy'''-2rz''' &= s^2-\alpha'''.
\end{aligned}$$

Zieht man nach einander jede der drei letzten Gleichungen von der ersten ab, so erhält man:

$$x'p+y'q+z'r=\frac{\alpha'}{2},$$

$$x''p+y''q+z''r=\frac{\alpha''}{2},$$

$$x'''p+y'''q+z'''r=\frac{\alpha'''}{2}.$$

Durch Elimination und Anwendung der obigen Relationen ergeben sich für die gesuchten Coordinaten folgende Werthe:

$$p=\frac{\alpha'\xi'+\alpha''\xi''+\alpha'''\xi'''}{2\lambda},$$

$$q=\frac{\alpha'\eta'+\alpha''\eta''+\alpha'''\eta'''}{2\lambda},$$

$$r=\frac{\alpha'\zeta'+\alpha''\zeta''+\alpha'''\zeta'''}{2\lambda}.$$

Um die Lage des Schwerpunktes des Tetraeders zu bestimmen, ist weiter nichts nöthig, als den Schwerpunkt einer Seitenfläche aufzusuchen, von diesem eine Linie nach der gegenüberstehenden Ecke des Tetraeders zu ziehen und von dieser Ecke aus auf der gezogenen Linie drei Viertel derselben abzuschneiden. Wendet man diese Methode an, so findet man durch einfache Betrachtungen ähnlicher Dreiecke für die Coordinaten des Schwerpunktes die Ausdrücke

$$t=\tfrac{1}{4}(x'+x''+x'''),$$
$$u=\tfrac{1}{4}(y'+y''+y'''),$$
$$v=\tfrac{1}{4}(z'+z''+z''').$$

Betrachten wir nun die Ausdrücke für die Coordinaten aller drei Punkte, die wir bestimmt haben, so sehen wir, dass folgende drei Gleichungen zwischen ihnen Statt finden:

$$t=\tfrac{1}{2}(p+x),$$
$$u=\tfrac{1}{2}(q+y),$$
$$v=\tfrac{1}{2}(r+z);$$

durch welche der obige Satz bewiesen ist.

II. Geometrischer Beweis. Legt man durch den Halbirungspunkt jeder Kante eine Parallele mit der gegenüberliegenden Kante, so entsteht ein neues Tetraeder. Von diesem gilt Folgendes:

1) es ist dem gegebenen Tetraeder congruent;

2) seine Kanten werden von den Kanten des andern halbirt.

Wegen des Parallelismus der entsprechenden Kanten und also auch der Flächen stehen beide Tetraeder in Collineationsverwandtschaft, und müssen daher einen Aehnlichkeitspunkt haben, d. h. einen Punkt, der zu beiden dieselbe Beziehung hat. Dass dies der gemeinschaftliche Schwerpunkt ist, ist leicht nachzuweisen. Man erhält den Schwerpunkt eines Tetraeders unter andern auf folgende Weise: Man schliesse von den sechs Kanten des Tetraeders zwei einander gegenüberliegende Kanten aus, und halbire die übrigen vier. Die vier Halbirungspunkte liegen in einer Ebene, die das ganze Tetraeder halbirt und durch den Schwerpunkt geht. Indem man immer ein anderes Paar Kanten ausschliesst, kann man die Operation dreimal wiederholen. Der Schnittpunkt der so erhaltenen drei Ebenen ist also der Schwer-

punkt. Die Ebenen sind aber beiden Tetraedern gemein, folglich auch der Schwerpunkt, der mithin der Aehnlichkeitspunkt ist. — Der Schwerpunkt hat hier also die Eigenschaft, dass er in jeder geraden Linie liegt, die einen beliebigen Punkt des einen Tetraeders mit dem entsprechenden des andern verbindet. Da beide Tetraeder congruent sind, so halbirt er den Abstand zweier entsprechenden Punkte.

Unsere sechs Ebenen haben nun zu dem neuen Tetraeder die Beziehung, dass sie die Kanten halbiren und auf diesen Kanten selbst senkrecht stehen. Von solchen sechs Ebenen ist es aber bekannt, dass sie sich in einem Punkte, dem Mittelpunkte der um das Tetraeder beschriebenen Kugel, schneiden. Die Mittelpunkte der um beide Tetraeder beschriebenen Kugeln müssen einander entsprechende Punkte sein, und somit ist der Satz bewiesen.

XXXIV.

Bemerkung über die Lambertische Reihe.

Von

Herrn L. Schläfli,

Privatdocenten der Mathematik zu Bern.

Wenn durch die Gleichung

$$t = y^{\alpha-\beta} - (\alpha-\beta)xy^{\alpha},$$

welche mittelst der Substitution $y^{\alpha-\beta} = z$ die Gestalt

$$t = z - x.(\alpha-\beta)z^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}}$$

erhält, y in Function von t und x gegeben ist, so kann man mit Hülfe des Lagrangeschen Satzes jede beliebige Potenz von z, also auch von y, nach den steigenden Potenzen von x entwickeln. Setzt man dann $t=1$, so lassen sich die gegebene Gleichung und die aus ihr hervorgehende Reihe für eine beliebige Potenz von y so darstellen:

$$y^{-\beta} - y^{-\alpha} = (\alpha - \beta)x, \tag{1}$$

$$y^m = 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{m[m+(n-1)\alpha+\beta][m+(n-2)\alpha+2\beta]\ldots[m+\alpha+(n-1)\beta]}{1\;.\;2\;.\;3\;\ldots\ldots\;n} x^n \tag{2}$$

(Klügels Wörterbuch, Artikel: Lambertische Reihe.) Damit die Reihe in (2) convergire, ist nöthig und reicht hin, dass

$$x < \left(\frac{\beta^\beta}{\alpha^\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}}$$

sei. Für den Fall eines unendlich klein werdenden m geht die Gleichung (2) über in

$$\log y = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{[(n-1)\alpha+\beta][(n-2)\alpha+2\beta]\ldots[\alpha+(n-1)\beta]}{2\;.\;3\;\ldots\;n} x^n. \tag{3}$$

Multiplicirt man die Reihen für y^p und y^q mit einander, so muss das Product mit der Reihe für y^{p+q} identisch werden. Indem man beiderseits die Coefficienten von x^n gleich setzt, erhält man die endliche Relation:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{n=i} \frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{1\;.\;2\;\ldots\;i}.p[p+(n-i-1)\alpha+\beta][p+(n-i-2)\alpha+2\beta]\ldots \\ &\ldots[p+\alpha+(n-i-1)\beta]\times q[q+(i-1)\alpha+\beta][q+(i-2)\alpha+2\beta]\ldots \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\ldots[q+\alpha+(i-1)\beta] \\ &=(p+q)(p+q+(n-1)\alpha+\beta)(p+q+(n-2)\alpha+2\beta)\ldots(p+q+\alpha+(n-1)\beta). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Wird in dieser Formel $\alpha=\beta=0$ gesetzt, so reducirt sie sich auf

$$\sum_{i=0}^{i=n} \frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{1\;.\;2\;\ldots\;i} p^{n-i} q^i = (p+q)^n,$$

was der binomische Satz für ganze Exponenten ist. Wird hingegen nur $\alpha=0$ gesetzt, so geht jene Formel in den analogen Satz für Facultäten über. Setzt man endlich $\alpha=\beta=1$, so verwandelt sich die Formel (4) in

$$\sum_{i=0}^{i=n} \binom{n}{i}.p(p+n-i)^{n-i-1}.q(q+i)^{i-1} = (p+q)(p+q+n)^{n-1} \tag{5}$$

wo $\binom{n}{i}$ den binomischen Coefficienten von x^i in der Entwickelung von $(1+x)^n$ bezeichnet. Diese spezielle Formel (5) lässt sich auf elementarem Wege beweisen. Es ergiebt sich nämlich, wenn man nach Potenzen von q entwickelt, als Coefficient von q^m auf der linken Seite

$$\binom{n}{m} \sum_{i=0}^{i=n-m} \binom{n-m}{i} p(p+n-m-i)^{n-m-i-1}\, m(m+i)^{i-1}$$

und auf der rechten

$$\binom{n}{m}(p+m)(p+n)^{n-m-1}.$$

Beide Ausdrücke sind aber vermöge der Formel (5) einander gleich, wenn diese bereits für alle kleinern Exponenten als n bewiesen ist; und für $m=0$ fallen sie ohnehin zusammen. Da nun die Formel (5) sich für die Werthe 1, 2 des Exponenten n sogleich verificirt, so ist sie allgemein für jeden ganzen und positiven Werth von n gültig.

Die aus der Lambertischen Reihe hervorgehende Formel (4) lässt sich demnach als die Vermittlung des binomischen Satzes für Facultäten und der Formel (5) ansehen, von welcher diese beiden letzten Formeln nur spezielle Fälle sind.

Der Formel (4) lässt sich übrigens noch eine andere zur Seite stellen, welche sich aus der Gleichung

$$y^p \cdot \frac{1}{q}\frac{\partial . y^q}{\partial x} = \frac{1}{p+q}\frac{\partial . y^{p+q}}{\partial x}$$

ergiebt, wenn man darin für y^p, y^q, y^{p+q} die entstehenden Reihen (2) substituirt und die beiderseitigen Coefficienten von x^n einander gleich setzt; sie ist aber unsymmetrisch.

Für den besondern Fall, wo $\alpha=\beta=1$, (wie man sogleich, unbeschadet der Allgemeinheit, statt bloss $\alpha=\beta$, setzen darf) gehen die Formeln (1), (2) über in

$$\log y = xy, \tag{6}$$

$$y^m = 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{m(m+n)^{n-1}}{1.2.3....n} x^n. \tag{7}$$

Die Reihe (7) ist convergent, wenn $x < \frac{1}{e}$ ist, und findet daher ihre Anwendung ohne Ausnahme für alle Systeme positiver Werthe von x und y, welche der Gleichung (6) genügen; denn einmal, wenn x reell bleiben soll, so kann y nur positiv sein; nun hat aber der Quotient $\frac{\log y}{y}$ für positive endliche Werthe von y ein einziges Maximum, nämlich $\frac{1}{e}$, welches dem Werthe $y=e$ entspricht; daher sind diejenigen reellen Werthe von x, welche reellen Werthen von y entsprechen, zwischen den beiden Gränzen $-\infty$ und $\frac{1}{e}$ enthalten. — Die Formeln (6) und (7) hangen mit folgender Aufgabe zusammen:

Man soll eine Function f von x und h finden, welche, wenn h als constant vorausgesetzt wird, der Gleichung

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = f(x+h)$$

genügt.

Mit Weglassung der arbiträren Integrationsconstante, die als Factor der gesuchten Function erscheint, kann man $f(x) = e^{kx}$ setzen, so erhält man für die Constante k die Bedingung

$$k = e^{hk}, \text{ oder } \log k = hk,$$

eine Gleichung, die in der Form mit (6) übereinstimmt. Setzt man nun in der Reihe für e^{kx} die aus der Formel (7) für die einzelnen Potenzen von k sich ergebenden Werthe, so erhält man folgenden nach den steigenden Potenzen von h geordneten Ausdruck für $f(x)$:

$$f(x) = e^x + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{m(m+n)^{n-1}}{1.2.3....m} x^m \right) \frac{h^n}{1.2....n}. \quad (8)$$

Hier ist nun der Coefficient von $\frac{h^n}{1.2....n}$ das Product von e^x mit einer ganzen rationalen Function von x, die mit dem Term $(n+1)^{n-1}x$ anfängt und mit dem Term $+x^n$ endigt. Denn wenn man die beiden unendlichen Reihen

$$1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - ....,$$

$$\frac{1.(n+1)^{n-1}}{1} x + \frac{2.(n+2)^{n-1}}{1.2} x^2 + \frac{3.(n+3)^{n-1}}{1.2.3} x^3 + ...$$

mit einander multiplicirt, so bekömmt in der Entwicklung des Products die Potenz x^m den Coefficienten

$$\sum_{i=0}^{i=m-1} (-1)^i \frac{(m+n-i)^{n-1}}{\Pi i . \Pi(m-i-1)},$$

welche Summe bekanntlich verschwindet, wenn $n-1 < m-1$ ist, und für $n-1 = m-1$ den Werth $+1$ erhält. Demnach gestaltet sich nun die Gleichung (8) so:

$$f(x) = e^x \{ 1 + x . \frac{h}{1} + (3x + x^2) \frac{h^2}{1.2} + (16x + 9x^2 + x^3) \frac{h^3}{1.2.3} .... \}. \quad (9)$$

Man kann auch auf folgendem analytischen Wege zu der Lösung (9) der Gleichung $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = f(x+h)$ gelangen. Es sei zunächst

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} u_n h^n, \quad (10)$$

so folgt

$$\frac{\partial^i f(x)}{\partial x^i} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\partial^i u_n}{\partial x^i} h^n.$$

Es ist aber

$$f(x+h)=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n}\,\frac{h^n}{1.2\ldots.n};$$

also durch Substitution der Reihen für die einzelnen Differential coefficienten von $f(x)$

$$f(x+h)=\sum_{n=0}^{n=\infty}\left(\sum_{i=0}^{i=n}\frac{1}{1.2\ldots.(n-i)}\,\frac{\partial^{n-i}u_i}{\partial x^{n-i}}\right)h^n,$$

also, wenn man den Coefficienten von h^n in dieser Reihe demjenigen in der Reihe für $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$ gleich setzt,

$$\frac{\partial u_n}{\partial x}=\sum_{i=0}^{i=n}\frac{1}{\Pi(n-i)}\,\frac{\partial^{n-i}u_i}{\partial x^{n-i}}. \qquad (11)$$

Man suche nun $\frac{\partial u_n}{\partial x}$ durch die ursprünglichen Functionen $u, u_1, \ldots u_n$ auszudrücken. Die Formel (11) giebt nach und nach:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=u,\quad \frac{\partial^m u}{\partial x^m}=u,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}=u+u_1,\quad \frac{\partial^m u_1}{\partial x^m}=mu+u_1,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x}=\frac{3}{2}u+u_1+u_2,\quad \frac{\partial^m u_2}{\partial x^m}=\frac{m(m+2)}{1.2}u+\frac{m}{1}u_1+u_2.$$

So gelangt man durch Induction zu der Formel:

$$\frac{\partial^m u_n}{\partial x^m}=\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n}\frac{m(m+n-\lambda)^{n-\lambda-1}}{1.2.3\ldots.(n-\lambda)}u^\lambda. \qquad (12)$$

Gesetzt nun, diese Formel sei für alle Differentialcoefficienten der Functionen $u_1, u_2, \ldots. u_{n-1}$ und für die Function u_n bis zum $m$ten Differentialcoefficienten inclusive bewiesen, so substituire man die Werthe, welche dieselbe für $\frac{\partial^{m+n-i}u_i}{\partial x^{m+n-i}}$ giebt, in der aus (11) herfliessenden Gleichung

$$\frac{\partial^{m+1}u_n}{\partial x^{m+1}}=\sum_{i=0}^{i=n}\frac{1}{1.2\ldots.(n-i)}\,\frac{\partial^{m+n-i}u_i}{\partial x^{m+n-i}};$$

dann wird

$$\frac{\partial^{m+1}u_n}{\partial x^{m+1}}=\sum_{i=0}^{i=n}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=i}\frac{(m+n-i)(m+n-\lambda)^{i-\lambda-1}}{\Pi(n-i).\Pi(i-\lambda)}u\lambda.$$

Für ein constantes λ geht i von λ bis n; wenn man daher die Ordnung der Summationen vertauscht und dann $i=\lambda+\mu$ setzt, so wird

$$\frac{\partial^{m+1} u_n}{\partial x^{m+1}} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} \left(\sum_{\mu=0}^{\mu=n-\lambda} \frac{(m+n-\lambda-\mu)(m+n-\lambda)^{\mu-1}}{\Pi(n-\lambda-\mu).\,\Pi\mu} \right) u_\lambda$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} \frac{(m+1)(m+1+n-\lambda)^{n-\lambda-1}}{\Pi(n-\lambda)} u_\lambda.$$

Somit wäre die Richtigkeit der Formel (12) auch für den $(m+1)$ten Differentialcoefficienten von u_n bewiesen. Da die gemachten Schlüsse auch für $m=0$ ihre Geltung behalten, und da die Formel (12) für $n=1$, 2 bereits verificirt ist, so ist ihre allgemeine Richtigkeit als bewiesen anzusehen.

Wenn man nun die drei ersten der Gleichungen (12) vollständig integrirt, so erhält man

$$u = Ce^x,$$
$$u_1 = Ce^x . x + C_1 e^x,$$
$$u_2 = Ce^x (\tfrac{3}{2}x + \tfrac{1}{2}x^2) + C_1 e^x . x + C_2 e^x;$$

durch jede neue Integration wird auch eine neue arbiträre Constante C_m eingeführt, welche in allen folgenden Integralgleichungen erscheint. Man kann aber auch so integriren, dass u_1, u_2, etc. gleichzeitig mit x verschwinden, was so viel ist, als wenn man alle übrigen arbiträren Constanten ausser C gleich Null setzt. Man kann ferner $u = u_1 = u_2 \ldots = u_{r-1} = 0$ setzen und dann die Gleichung für $\frac{\partial u_r}{\partial x}$ und alle folgenden so integriren, dass für $x=0$ nur u_r nicht verschwindet, sondern $= C_r$ wird, während alle folgenden Functionen u_{r+1}, u_{r+2}, etc. zugleich mit x verschwinden, was so viel ist, als wenn man alle übrigen arbiträren Constanten ausser C_r gleich Null setzt. Im letztern Falle braucht man nur in der Formel (12) n und λ in $n+r$ und $\lambda+r$ übergehen zu lassen, um einzusehen, dass die Folge der Functionen

$$u_r,\ u_{r+1},\ u_{r+2},\ u_{r+3},\ \text{etc.},$$

abgesehen vom arbiträren Factor C_r, genau mit der Folge der Functionen

$$u,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ \text{etc.}$$

übereinstimmt, wenn diese unter der frühern Voraussetzung, dass u_1, u_2,.... zugleich mit x verschwinden, berechnet sind. Wenn nun V den Werth bezeichnet, welchen $f(x)$ in der Formel (10) unter der Annahme, dass für $x=0$, $u=1$, $u_1 = u_2 = u_3 = \ldots = 0$ werde, erhält, so ist nach dem Vorigen der allgemeine Ausdruck für $f(x)$:

$$f(x) = V(C + C_1 h + C_2 h^2 + C_3 h^3 + \text{etc.}),$$

woraus folgt, dass man, ohne der Allgemeinheit zu schaden, sämmtliche Integrationen von u_1 an mit $x=0$ anfangen lassen kann, wodurch die Constanten C_1, C_2,.... als überflüssig wegfallen.

Aus (12) folgt für $m=1$

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} \frac{1.(1+n-\lambda)^{n-\lambda-1}}{1.2.3....(n-\lambda)} u_\lambda.$$

Setzt man hierin $u_n = u.z_n$, so wird die Gleichung durch u theilbar und reducirt sich auf

$$\frac{\partial z_n}{\partial x} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{(\lambda+1)^{\lambda-1}}{1.2.3....\lambda} z_{n-\lambda}; \qquad (13)$$

wo für z_0 immer 1 zu setzen ist; also

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} = \frac{2^0}{1}.1 = 1,$$

$$\frac{\partial z_2}{\partial x} = z_1 + \frac{3^1}{1.2},$$

$$\frac{\partial z_3}{\partial x} = z_2 + \frac{3^1}{1.2} z_1 + \frac{4^2}{1.2.3},$$

$$\frac{\partial z_4}{\partial x} = z_3 + \frac{3^1}{1.2} z_2 + \frac{4^2}{1.2.3} z_1 + \frac{5^3}{1.2.3.4},$$

u. s. f.

Man integrire diese Gleichungen von $x=0$ an und substituire die Resultate in (10), so wird

$$f(x) = Ce^x \{1 + z_1 h + z_2 h^2 + z_3 h^3 + \text{etc.}\},$$

wo z_n eine ganze rationale Function $n$ten Grades von x ist. Wenn man nun allgemeine Formeln für die Coefficienten der Potenzen von x in dieser Function z_n sucht, so sieht man sich zur Gleichung (8) zurückgeführt.

Schliesslich möge erwähnt werden, dass die Gleichung

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = f(x+h)$$

der geometrischen Aufgabe entspricht, eine ihrer Evolute ähnliche Curve zu finden, aber so, dass diejenigen Punkte der Evolute, welche bestimmten Punkten der Evolvente vermöge der Aehnlichkeit entsprechen, diesen nicht zugleich als Krümmungsmittelpunkte zugehören, sondern um einen constanten Drehungswinkel von diesen letztern entfernt sind. Bezeichnet nämlich $\frac{x}{a}$ den Winkel, den die Tangente der Evolvente mit einer festen Richtung bildet, und $f(x)$ den zu diesem Winkel gehörenden Bogen derselben Curve, so drückt obige Gleichung aus, dass der Krümmungshalbmesser der Evolvente, d. i. der Bogen der Evolute, $a$mal so gross sei als derjenige Bogen der Evolvente, welcher zu dem um den constanten Unterschied $\frac{h}{a}$ vermehrten Winkel der

Tangente gehört. Da die logarithmische Spirale stets sich selbst ähnlich und ähnlich liegend bleibt, wenn sie um ihren Pol gedreht wird, so ist ihr auch ihre Evolute in dem oben ausgesprochenen Sinne ähnlich. — Indess scheint doch die Gleichung $f(x)=Ce^{kx}$, wo $e^{kh}=k$, keine ganz allgemeine Lösung der Aufgabe zu enthalten, wenn nur der reelle Werth von k berücksichtigt wird. Die transcendente Gleichung $e^{kh}=k$ hat nämlich ausser der betrachteten reellen noch unzählige imaginäre Wurzeln, so dass

$$f(x)=\Sigma Ce^{kx}$$

gesetzt werden darf. Man braucht nur zu zweien conjugirten imaginären Werthen von k auch für die zugehörigen arbiträren Constanten stets conjugirte imaginäre Werthe zu nehmen, um für $f(x)$ einen reellen Ausdruck zu erhalten. Da bei dieser Lösung eine unendliche Menge arbiträrer Constanten auftreten, so liegt die Vermuthung nahe, die ganz allgemeine Lösung der Aufgabe möchte eine arbiträre Function impliciren.

Sucht man die Curve, welche ihrer αten Evolute in dem obigen Sinne ähnlich ist, so wird man auf die Gleichung

$$\frac{\partial^\alpha f(x)}{\partial x^\alpha}=f(x+h)$$

geführt, welche durch das System der Gleichungen

$$p=e^{\frac{ph}{\alpha}}\cos\left(\frac{qh}{\alpha}+\frac{2n\pi}{\alpha}\right),$$

$$q=e^{\frac{ph}{\alpha}}\sin\left(\frac{qh}{\alpha}+\frac{2n\pi}{\alpha}\right),$$

$$f(x)=\Sigma e^{px}(A\cos qx+B\sin qx)$$

befriedigt wird, wo das Zeichen Σ eine doppelte Summe bezeichnet, die sich einestheils auf den Fortschritt der ganzen positiven Zahl n von 0 bis $\frac{\alpha}{2}$ oder $\frac{\alpha-1}{2}$ (je nachdem α gerade oder ungerade ist), anderntheils auf die unendliche Anzahl von zusammengehörigen Werthen bezieht, welche p und q vermöge der beiden ersten Gleichungen haben können, und wo A, B die zu jedem einzelnen Systeme von Werthen für n, p, q gehörenden arbiträren Constanten bezeichnen. Wenn aber die Function $f(x)$ für ein verschwindendes h continuirlich bleiben soll, so muss die Doppelsumme auf eine endliche einfache Summe beschränkt werden, die sich nur auf den Fortschritt von n bezieht. Es muss nämlich

$$f(x)=\Sigma Ce^{krx}$$

gesetzt werden, wo r eine Wurzel der Gleichung $r^\alpha-1=0$ und k diejenige Lösung der Gleichung

$$\frac{\log k}{k}=\frac{rh}{\alpha}$$

bezeichnet, für welche zugleich auch

$$k^m = 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{m(m+n)^{n-1}}{1.2.3....n} \frac{r^n}{\alpha^n} h^n$$

ist, und wo das Summenzeichen sich auf die α Systeme von r, von k, einer zugehörigen Function von $\frac{rh}{\alpha}$, und von der arbiträren Constante C bezieht.

XXXV.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Von dem

Herrn Professor Dr. O. Schlömilch

an der Universität zu Jena.

Man soll beweisen, dass

$$\int_0^\infty \frac{dx}{a^2+x^2} e^{-b^2x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-a^2b^2} \int_{ab}^\infty dt\, e^{-t^2}$$

ist, wo nun das Integral rechts

$$= \int_0^\infty dt\, e^{-t^2} - \int_0^{ab} dt\, e^{-t^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^{ab} dt\, e^{-t^2}$$

numerisch berechnet werden kann, da bekanntlich schon **Kramp** eine Tafel für

$$\int_0^t dt\, e^{-t^2}$$

aufgestellt hat.

Es bezeichne $\overset{k}{C}_1$ die Summe der Zahlen 1, 2, 3,....k, $\overset{k}{C}_2$ die Summe der in denselben liegenden Amben, jede Ambe als Produkt betrachtet, $\overset{k}{C}_3$ die Ternensumme u. s. f., überhaupt $\overset{k}{C}_s$ die

Summe der Combinationen $s$ter Classe ohne Wiederholungen aus den Elementen $1, 2, \ldots k$, wobei jede Combination als Produkt gilt, ferner sei m eine positive ganze Zahl >1; man soll nun zeigen, dass sich die Reihe

$$\frac{1}{1^m}+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{4^m}+\ldots$$

auf folgende Gestalt bringen lässt:

$$\frac{1}{1.2\ldots(m-1)}\left[\frac{1}{m-1}+\frac{1}{m^2}\overset{m-1}{C_1}+\frac{1}{m(m+1)^2}\overset{m}{C_2}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{m(m+1)(m+2)^2}\overset{m+1}{C_3}+\ldots\right],$$

deren allgemeines Glied

$$\frac{1}{m(m+1)\ldots(m+s-1)(m+s)^2}\overset{m+s-1}{C_{s+1}}$$

ist. Für $m=2$ erhält man wegen $\overset{s+1}{C_{s+1}}=1.2\ldots(s+1)$ eine blosse Identität, für $m>2$ dagegen scheint die zweite Reihe rascher zu convergiren als die erste und deshalb die Transformation selbst nicht nutzlos zu sein.

Von dem
Herrn Doctor J. Dienger,
Lehrer der Mathematik und Physik an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

Es ist

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\partial x}{1+x^2+x^4}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{a\pi}{6}\right)}{\sin\frac{a\pi}{2}},$$

für $a>0$ und <4.

Es ist

$$\int_0^a \frac{(2x^2-a^2-b^2)\partial x}{\sqrt{a^2+b^2-x^2}\sqrt{a^2b^2-(a^2+b^2)x^2+x^4}}=\frac{\pi}{2},$$

wenn $b\geqq a$.

Wenn $F(x+iy)=U+iV$, so ist immer.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 U}{\partial y^2},\quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}.$$

Es ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(a \operatorname{tg} \varphi)\,\partial\varphi=\frac{\pi}{2}e^{-a}.$$

XXXVI.

Miscellen.

Von dem
Herrn Professor Dr. O. Schlömilch
an der Universität zu Jena.

Die Summe der Reihe $1^n+2^n+3^n+....+r^n$ lässt sich bekanntlich in Gestalt einer nach Potenzen von r verlaufenden Reihe darstellen, und man zeigt diess gewöhnlich mit Hülfe einer der inversen Differenzenrechnung angehörigen Formel; es scheint dagegen noch nicht bemerkt worden zu sein, dass man zu demselben Resultate auf einem ungleich einfacheren Wege gelangen kann. Bezeichnen wir nämlich mit $f(x)$ die Summe der Reihe

$$e^x+e^{2x}+e^{3x}+....+e^{rx}, \tag{1}$$

so ist durch $n$malige Differenziation nach x

$$f^{(n)}(x)=1^n e^x+2^n e^{2x}+3^n e^{3x}+....+r^n e^{rx},$$

und folglich für $x=0$

$$f^{(n)}(0)=1^n+2^n+3^n+...+r^n. \tag{2}$$

Hieraus geht hervor, dass es nur darauf ankommen würde, den $n$ten Differenzialquotienten der Funktion $f(x)$ zu entwickeln, was auf folgende sehr leichte Weise bewerkstelligt werden kann.

Bringt man die bekannte Formel für die Summirung der geometrischen Progression in Anwendung, indem man die Exponentialgrösse e^x an die Stelle des Progressionsexponenten setzt, so findet man leicht

$$e^x + e^{2x} + e^{3x} + \ldots + e^{rx} = \frac{e^{rx}-1}{e^x-1}\, e^x = f(x),$$

wofür wir schreiben wollen

$$f(x) = \frac{e^{rx}-1}{x} \cdot \frac{x}{1-e^{-x}}, \tag{3}$$

was offenbar mit dem Vorhergehenden zusammenfällt. Wenn nun überhaupt $f(x) = \varphi(x)\,\psi(x)$ ist, so gilt bekanntlich die Formel

$$f^{(n)}(x) = n_0\,\varphi^{(n)}(x)\,\psi(x) + n_1\,\varphi^{(n-1)}(x)\,\psi'(x) + n_2\,\varphi^{(n-2)}(x)\,\psi''(x) + \ldots$$

und für $x = 0$

$$\left. \begin{array}{l} f^{(n)}(0) = n_0\,\varphi^{(n)}(0)\,\psi(0) + n_1\,\varphi^{(n-1)}(0)\,\psi'(0) \\ \qquad + n_2\,\varphi^{(n-2)}(0)\,\psi''(0) + \ldots \end{array} \right\} \tag{4}$$

Diess lässt sich leicht auf unseren Fall anwenden, indem man

$$\varphi(x) = \frac{e^{rx}-1}{x}, \quad \psi(x) = \frac{x}{1-e^{-x}} \tag{5}$$

nimmt, und man erhält dann Folgendes.

1. Vermöge der bekannten Reihe für e^{rx} ist

$$\varphi(x) = r\left[\frac{1}{1} + \frac{rx}{1.2} + \frac{r^2x^2}{1.2.3} + \ldots\right]$$

und folglich für ein ganzes positives p

$$\varphi^{(p)}(0) = \frac{r^{p+1}}{p+1}. \tag{6}$$

2. Nimmt man in der bekannten, für $2\pi > z > -2\pi$ geltenden Reihe:

$$\tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}z = \frac{1}{z} - \frac{B_1 z}{1.2} - \frac{B_3 z^3}{1.2.3.4} - \ldots,$$

worin $B_1, B_3, B_5, \ldots$ die Bernoullischen Zahlen bedeuten, $z = x\sqrt{-1}$, so wird

$$\tfrac{1}{2}\,\frac{e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x}}{e^{\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}x}}$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{B_1 x}{1.2} - \frac{B_3 x^3}{1.2.3.4} + \frac{B_5 x^5}{1.2\ldots 6} - \ldots$$

Stellt man die linke Seite in die Form

$$\frac{1}{2}\frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{1-e^{-x}},$$

multiplicirt darauf mit x und transponirt $-\frac{x}{2}$, so ergiebt sich

$$\psi(x)=\frac{x}{1-e^{-x}}=1+\frac{x}{2}+\frac{B_1x^2}{1.2}-\frac{B_3x^4}{1.2.3.4}+....,$$

und hieraus findet man der Reihe nach

$$\psi(0)=1,\ \psi'(0)=\tfrac{1}{2};$$

$$\psi^{(q)}(0)=(-1)^{\frac{1}{2}q+1}B_{q-1} \text{ für jedes gerade } q>0,$$

$$\psi^{(q)}(0)=0 \text{ für jedes ungerade } q>1.$$

Substituiren wir jetzt in die Gleichung (5) das, was die Formel (6) für $p=n,\ n-1,\ n-2,....$ und die vorstehende für $q=2,3,4,....$ giebt, so gelangt man zu der Gleichung

$$1^n+2^n+3^n+\ldots.+r^n$$

$$=\frac{r^{n+1}}{n+1}+\tfrac{1}{2}r^n+n_2B_1\frac{r^{n-1}}{n-1}-n_4B_3\frac{r^{n-3}}{n-3}+n_6B_5\frac{r^{n-5}}{n-5}-....,$$

und diese enthält die vollständige Lösung unserer Aufgabe.

XXXVII.

Ueber die Auflösung reiner Gleichungen, insbesondere solcher des dritten Grades durch Kettenbrüche.

Von dem
Herrn Doctor E. W. Grebe,
Gymnasiallehrer zu Cassel.

In der Gleichung $x^n = D$ wollen wir nicht allein n, sondern auch D als eine positive ganze Zahl voraussetzen, und nun die reelle positive Wurzel dieser Gleichung, die wir uns jedoch nur als irrational denken und mit x_0 bezeichnen wollen, durch den gemeinen Kettenbruch

$$[1] \quad x_0 = g_1 + \cfrac{1}{g_2 + \dots + \cfrac{1}{g_i + \dots}}$$

ausdrücken, zugleich aber auch die Näherungswerthe dieses Kettenbruchs durch

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots \frac{a_i}{b_i}, \dots$$

Bezeichnen wir den auf g_i noch folgenden Kettenbruch durch $\frac{1}{x_i}$, so ist für $i \geqq 0$

$$[2] \quad \begin{cases} x_i = g_{i+1} + \dfrac{1}{x_{i+1}}, \\ x_{i+1} = \dfrac{1}{x_i - g_{i+1}}. \end{cases}$$

Daher ist insbesondere

$$x_2 = \frac{1}{\frac{1}{x_0 - g_1} - g_2} = \frac{x_0 - g_1}{g_1 g_2 + 1 - x_0} = \frac{b_1 x_0 - a_1}{a_2 - b_2 x_0}.$$

Der allgemeinere Satz

$$[3] \quad x_i = \frac{b_{i-1} x_0 - a_{i-1}}{a_i - b_i x_0},$$

welcher hiernach für $i=2$, und, wenn man, wie zu geschehen pflegt, $a_{-1}=0$, $b_{-1}=1$, $a_0=1$, $b_0=0$ setzt, auch für $i=0$ und $i=1$ richtig ist, lässt sich leicht durch den Schluss von i auf $i+1$ beweisen. Setzt man nämlich in die zweite Formel [2] den Werth [3] und reducirt, so erhält man

$$x_{i+1} = \frac{b_i x_0 - a_i}{(a_i g_{i+1} + a_{i-1}) - (b_i g_{i+1} + b_{i-1}) x_0},$$

woraus das zu Beweisende durch Anwendung der bekannten Formeln

$$a_{i+1} = a_i g_{i+1} + a_{i-1},$$
$$b_{i+1} = b_i g_{i+1} + b_{i-1}$$

sogleich folgt. Fast noch einfacher hätte man sich von der Richtigkeit der Formel [3] überzeugen können, wenn man von

$$\frac{a_{i+1}}{b_{i+1}} = \frac{a_i g_{i+1} + a_{i-1}}{b_i g_{i+1} + b_{i-1}}$$

zu

$$x_0 = \frac{a_i x_i + a_{i-1}}{b_i x_i + b_{i-1}}$$

übergegangen wäre, und nun diese letzte Gleichung nach x_i aufgelöst hätte.

In [3] lässt sich nun der Bruch rechts vom Gleichheitszeichen mit

$$a_i^{n-1} + a_i^{n-2} b_i x_0 + a_i^{n-3} b_i^2 x_0^2 + \ldots$$
$$\ldots + a_i^2 b_i^{n-3} x_0^{n-3} + a_i b_i^{n-2} x_0^{n-2} + b_i^{n-1} x_0^{n-1}$$

erweitern. Setzen wir aber der Kürze wegen

$$[4] \quad a_i^n - b_i^n D = (-1)^i k_i,$$
$$[5] \quad b_i^{n-1} b_{i-1} D - a_i^{n-1} a_{i-1} = (-1)^i h_i;$$

so erhalten wir durch die angedeutete Erweiterung, bei deren Ausführung in Beziehung auf den Zähler wir noch den bekannten Satz $a_i b_{i-1} - a_{i-1} b_i = (-1)^i$ berücksichtigen müssen,

$$[6] \quad x_i = \frac{a_i^{n-2} x_0 + a_i^{n-3} b_i x_0^2 + \ldots + a_i b_i^{n-3} x_0^{n-2} + b_i^{n-2} x_0^{n-1} + h_i}{k_i}.$$

Man kann jedoch auch den Bruch in [3] mit

$$a_{i-1}^{n-1}+a_{i-1}^{n-2}b_{i-1}x_0+\ldots+a_{i-1}b_{i-1}^{n-2}x_0^{n-2}+b_{i-1}^{n-1}x_0^{n-1}$$

erweitern. Alsdann ergibt sich auf ähnliche Weise, wenn man noch

$$[7] \quad b_{i-1}^{n-1}b_iD-a_{i-1}^{n-1}a_i=(-1)^i l_i$$

setzt,

$$[8] \quad x_i=\frac{k_{i-1}}{a_{i-1}^{n-2}x_0+a_{i-1}^{n-3}b_{i-1}x_0^2+\ldots+a_{i-1}b_{i-1}^{n-3}x_0^{n-2}+b_{i-1}^{n-2}x_0^{n-1}-l_i}.$$

Jetzt lassen sich die Formeln

$$[9] \quad \begin{cases} a_i^{n-1}=h_ib_i+k_ib_{i-1}, \\ a_i^{n-1}=k_ib_{i+1}-l_{i+1}b_i, \\ b_i^{n-1}D=h_ia_i+k_ia_{i-1}, \\ b_i^{n-1}D=k_ia_{i+1}-l_{i+1}a_i \end{cases}$$

leicht beweisen, wenn man in jeder derselben auf der rechten Seite das den Gleichungen [4], [5] und [7] Entsprechende setzt und dann reducirt.

Weil für ein ungerades i $\frac{a_i}{b_i}<x_0$ und für ein gerades i $\frac{a_i}{b_i}>x_0$, so ist k_i immer positiv. Von h_i und l_i soll in dieser Beziehung bald nachher die Rede sein.

Setzt man in [6] statt x_0 überall den Näherungswerth $\frac{a_i}{b_i}$, so setzt man, wenn i ungerade ist, zu wenig, dagegen, wenn i gerade ist, zu viel. Bezeichnen wir den begangenen Fehler absolut genommen durch α_i, so erhalten wir statt [6]

$$[10] \quad x_i=\frac{\frac{(n-1)a_i^{n-1}}{b_i}-(-1)^i\alpha_i+h_i}{k_i}.$$

Benutzen wir auf ähnliche Weise den Näherungswerth $\frac{a_{i-1}}{b_{i-1}}$ bei [8], so ergibt sich

$$[11] \quad x_i=\frac{k_{i-1}}{\frac{(n-1)a_{i-1}^{n-1}}{b_{i-1}}+(-1)^i\alpha_{i-1}-l_i}.$$

Man hätte aber auch in [6] sowohl, als in [8], zuerst $x_0=\frac{D}{x_0^{n-1}}$, $x_0^2=\frac{D}{x_0^{n-2}}, \ldots x_0^{n-2}=\frac{D}{x_0^2}$, $x_0^{n-1}=\frac{D}{x_0}$, und dann statt jedes neu

aufgetretenen x_0 den Näherungswerth, dort $\frac{a_i}{b_i}$, hier $\frac{a_{i-1}}{b_{i-1}}$, setzen können. Heissen die so begangenen absoluten Fehler β_i und β_{i-1}, so hat man

$$[12] \quad x_i = \frac{\frac{(n-1)\,b_i^{n-1}\,D}{a_i} + (-1)^i \beta_i + h_i}{k_i},$$

$$[13] \quad x_i = \frac{k_{i-1}}{\frac{(n-1)\,b_{i-1}^{n-1}\,D}{a_{i-1}} - (-1)^i \beta_{i-1} - l_i}.$$

Wenden wir bei den Gleichungen [10], [11], [12] und [13] die Formeln in [9] der Reihe nach zu Substitutionen an, so erhalten wir

$$[14] \quad \begin{cases} x_i = \frac{nh_i}{k_i} + \frac{(n-1)\,b_{i-1}}{b_i} - \frac{(-1)^i \alpha_i}{k_i}, \\ \frac{1}{x_i} = \frac{(n-1)\,b_i}{b_{i-1}} - \frac{nl_i}{k_{i-1}} + \frac{(-1)^i \alpha_{i-1}}{k_{i-1}}, \\ x_i = \frac{nh_i}{k_i} + \frac{(n-1)\,a_{i-1}}{a_i} + \frac{(-1)^i \beta_i}{k_i}, \\ \frac{1}{x_i} = \frac{(n-1)\,a_i}{a_{i-1}} - \frac{nl_i}{k_{i-1}} - \frac{(-1)^i \beta_{i-1}}{k_{i-1}}. \end{cases}$$

Eine wichtige Folgerung, die sich aus der Vergleichung der ersten und dritten Formel in [14] ergibt, ist nun die, dass der (irrationale) Werth von x_i immer zwischen die rationalen Grenzen

$$\frac{nh_i}{k_i} + \frac{(n-1)\,b_{i-1}}{b_i} \text{ und } \frac{nh_i}{k_i} + \frac{(n-1)\,a_{i-1}}{a_i}$$

fällt. Diese Grenzen, deren Abstand $\frac{n-1}{a_i b_i}$ ist, rücken mit dem Wachsen von i immer näher an einander. Wir wollen dieselben indessen noch auf andere Weise ausdrücken. Da

$$a_i = a_{i-1}\,g_i + a_{i-2},$$

so ist

$$\frac{a_i}{a_{i-1}} = g_i + \frac{a_{i-2}}{a_{i-1}}$$

und

$$\frac{a_{i-1}}{a_i} = \frac{1}{g_i + \frac{a_{i-2}}{a_{i-1}}}.$$

Durch wiederholte Anwendung des letzten Gesetzes bekommt man

$$\frac{a_{i-1}}{a_i}=\frac{1}{g_i}+\frac{1}{g_{i-1}}+\dots+\frac{1}{g_1}$$

und mit Hülfe ähnlicher Schlüsse

$$\frac{b_{i-1}}{b_i}=\frac{1}{g_i}+\frac{1}{g_{i-1}}+\dots+\frac{1}{g_2}.$$

Bezeichnen wir diese eben erhaltenen Kettenbrüche einmal durch $\frac{1}{g_{i\dots 1}}$ und $\frac{1}{g_{i\dots 2}}$, so fällt x_i zwischen $\frac{nh_i}{k_i}+\frac{n-1}{g_{i\dots 2}}$ und $\frac{nh_i}{k_i}+\frac{n-1}{g_{i\dots 1}}$. Ist nun $i \geqq 2$, so hat man

$$[15] \quad \begin{cases} x_i<\frac{nh_i}{k_i}+\frac{n-1}{g_i}, \\ x_i>\frac{nh_i}{k_i}+\frac{n-1}{g_i+1}. \end{cases}$$

Diese Formeln setzen uns in den Stand, sobald die Rechnung einmal im Gange ist, die grösste in x_i enthaltene ganze Zahl g_{i+1} aus g_i, h_i und k_i mit Sicherheit zu ermitteln.

Zu einer andern Grenzbestimmung führt auch die Vergleichung der zweiten und vierten Formel in [14], welche wir jedoch übergehen, da die Ausdrücke minder brauchbar für die Anwendung werden.

Eine einfache zwischen g, k, h und l stattfindende Relation ergibt sich durch die Verbindung von [6] und [8]. Erhöht man in der zuletzt angeführten Formel alle Indices um eine Einheit, so stimmen die irrationalen Glieder beider Formeln überein. Drückt man dieselben auf doppelte Weise aus, so ist

$$x_i k_i - h_i = \frac{k_i}{x_{i+1}} + l_{i+1}.$$

Macht man nun eine Substitution aus der ersten Formel [2], so erhält man

$$[16] \quad g_{i+1} k_i - h_i = l_{i+1}.$$

Es lässt sich nun auch die Frage über den positiven oder negativen Werth von l_i und h_i entscheiden. Nach [14] ist, wenn wir unter $g_{i\dots}$ gewisse zwischen $g_{i\dots 1}$ und $g_{i\dots 2}$ fallende Werthe verstehen,

$$x_i=\frac{nh_i}{k_i}+\frac{n-1}{g_{i\dots}},$$

$$\frac{1}{x_i}=(n-1)g_{i\dots}-\frac{nl_i}{k_{i-1}};$$

daher

$$[17] \quad \begin{cases} \dfrac{nh_i}{k_i} = x_i - \dfrac{n-1}{g_i \ldots}, \\ \dfrac{nl_i}{k_{i-1}} = (n-1) g_i \ldots - \dfrac{1}{x_i}. \end{cases}$$

Der letztere der beiden Ausdrücke in [17] ist nun, wie man sich leicht überzeugt, stets positiv, daher hat auch l_i diese Eigenschaft; der erstere aber kann positiv, negativ und auch null sein.

$$h_i \gtreqless 0, \text{ jenachdem } x_i g_i \ldots \gtreqless n-1.$$

Für $n=2$ ist die Bedingung $x_i g_i \ldots > n-1$ immer erfüllt, h_i also unter dieser Voraussetzung stets positiv. Für $n=3$ kann h_i nur dann null oder negativ sein, wenn sowohl g_i als $g_{i+1} = 1$, jedoch bleibt auch selbst in diesem Falle ein positiver Werth von h_i noch möglich.

Für $n=2$ wird auch $h_i = l_i$, wie aus [5] und [7] sofort erhellt, und aus [6] und [8] ergibt sich alsdann

$$x_i = \frac{x_0 + h_i}{k_i} = \frac{x_0 + l_i}{k_i},$$

$$x_i = \frac{k_{i-1}}{x_0 - l_i} = \frac{k_{i-1}}{x_0 - h_i};$$

woraus weiter durch Verbindung

$$\frac{x_0 + h_i}{k_i} = \frac{k_{i-1}}{x_0 - h_i},$$

und dann durch Reduction und Einführung von D

$$[18] \quad D = h_i^2 + k_i k_{i-1}$$

folgt.

Für $n=3$ erhält man aus [6] und [8]

$$[19] \quad \begin{cases} x_i = \dfrac{a_i x_0 + b_i x_0^2 + h_i}{k_i}, \\ x_i = \dfrac{k_{i-1}}{a_{i-1} x_0 + b_{i-1} x_0^2 - l_i}. \end{cases}$$

Setzt man auch hier die beiden Werthe rechter Hand gleich und reducirt, so erhält man

$$\begin{aligned} 0 = \; & a_i b_{i-1} D + a_{i-1} h_i x_0 + a_i a_{i-1} x_0^2 \\ & + a_{i-1} b_i D + b_i b_{i-1} D x_0 + b_{i-1} h_i x_0^2 \\ & - h_i l_i - a_i l_i x_0 - b_i l_i x_0^2 \\ & - k_i k_{i-1}, \end{aligned}$$

woraus wegen der Irrationalität von x_0 die drei Gleichungen folgen:

$$[20] \quad \begin{cases} h_i\, l_i + k_i\, k_{i-1} = (a_i\, b_{i-1} + a_{i-1}\, b_i)\, D, \\ a_i\, l_i = a_{i-1}\, h_i + b_i\, b_{i-1}\, D, \\ b_i\, l_i = a_i\, a_{i-1} + b_{i-1}\, h_i. \end{cases}$$

Für höhere Werthe von n kann man zwar ähnliche Formeln ableiten, doch zeichnen sich dieselben nicht durch besondere Einfachheit aus.

Wir wollen jetzt eine allgemeinere Bezeichnung einführen, in Beziehung auf welche die bisher mit k, h und l bezeichneten Zahlen nur besondere Fälle sind. Es soll nämlich jetzt dem Symbol $\begin{pmatrix} r \\ n \\ i \end{pmatrix}$ die Bedeutung beigelegt werden, dass

$$[21] \quad (-1)^i \begin{pmatrix} r \\ n \\ i \end{pmatrix} = b_i^r\, b_{i-1}^{n-r}\, D - a_i^r\, a_{i-1}^{n-r},$$

wobei r null und jede positive ganze Zahl, die $\overline{\underline{<}}\, n$ ist, bedeuten kann.

Es ist alsdann

$$[22] \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ n \\ i \end{pmatrix} = k_{i-1}, \\ \begin{pmatrix} 1 \\ n \\ i \end{pmatrix} = l_i, \\ \begin{pmatrix} n-1 \\ n \\ i \end{pmatrix} = h_i, \\ \begin{pmatrix} n \\ n \\ i \end{pmatrix} = -k_i. \end{cases}$$

Substituirt man nun auf der rechten Seite von [21] unter Anwendung des binomischen Lehrsatzes statt b_i und a_i bezüglich $b_{i-1}\, g_i + b_{i-2}$ und $a_{i-1}\, g_i + a_{i-2}$, ordnet dann das Ganze nach Potenzen von g_i, reducirt und hebt mit $(-1)^i$ auf, so erhält man

$$[23] \quad -\begin{pmatrix} r \\ n \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n \\ i-1 \end{pmatrix} g_i^r + \frac{r}{1} \begin{pmatrix} n-1 \\ n \\ i-1 \end{pmatrix} g_i^{r-1} + \frac{r(r-1)}{1.2} \begin{pmatrix} n-2 \\ n \\ i-1 \end{pmatrix} g_i^{r-2} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{r}{1} \begin{pmatrix} 1 \\ n \\ i-1 \end{pmatrix} g_i + \begin{pmatrix} 0 \\ n \\ i-1 \end{pmatrix}.$$

Diese Gleichung heisst, wenn man statt r überall n schreibt,

$$[24] \quad -\begin{pmatrix} n \\ n \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n \\ i-1 \end{pmatrix} g_i^n + \frac{n}{1} \begin{pmatrix} n-1 \\ n \\ i-1 \end{pmatrix} g_i^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} \begin{pmatrix} n-2 \\ n \\ i-1 \end{pmatrix} g_i^{n-2} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n}{1} \begin{pmatrix} 1 \\ n \\ i-1 \end{pmatrix} g_i + \begin{pmatrix} 0 \\ n \\ i-1 \end{pmatrix}.$$

Benutzt man die Formel [23], um nach und nach $\left(\begin{smallmatrix}0\\n\\i\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}1\\n\\i\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}2\\n\\i\end{smallmatrix}\right)$, u. s. w. bis zu $\left(\begin{smallmatrix}n\\n\\i\end{smallmatrix}\right)$, dessen negativen Werth man in [24] hat, auszudrücken, multiplicirt dann den ersten dieser Ausdrücke mit $+g_i^n$, den zweiten mit $-\frac{n}{1}g_i^{n-1}$, den dritten mit $+\frac{n(n-1)}{1.2}g_i^{n-2}$, u. s. w., den vorletzten mit $(-1)^{n-1}g_i$, den letzten endlich mit $(-1)^n$, und addirt diese Producte sämmtlich; so hebt sich rechts vom Gleichheitszeichen, wo man die Entwickelung von $(1-1)^n$ zu beachten hat, Alles mit Ausnahme des letzten Gliedes $(-1)^{n-1}\left(\begin{smallmatrix}0\\n\\i-1\end{smallmatrix}\right)$ auf, und man hat also

$$[25]\quad (-1)^{n-1}\left(\begin{smallmatrix}0\\n\\i-1\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}\\n\\i\end{smallmatrix}\right)g_i^n-\frac{n}{1}\left(\begin{smallmatrix}1\\n\\i\end{smallmatrix}\right)g_i^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}\left(\begin{smallmatrix}2\\n\\i\end{smallmatrix}\right)g_i^{n-2}-$$

$$\ldots\ldots+(-1)^{n-2}\frac{n(n-1)}{1.2}\left(\begin{smallmatrix}n-2\\n\\i\end{smallmatrix}\right)g_i^2+(-1)^{n-1}\frac{n}{1}\left(\begin{smallmatrix}n-1\\n\\i\end{smallmatrix}\right)g_i+(-1)^n\left(\begin{smallmatrix}n\\n\\i\end{smallmatrix}\right).$$

Für die speciellen Werthe 2, 3 und 4 von n ergeben sich noch folgende Formelgruppen, die wir bemerken wollen. Aus [23]

$$[26]\quad \begin{cases}\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\i\end{smallmatrix}\right)=-\left(\begin{smallmatrix}2\\2\\i-1\end{smallmatrix}\right)g_i-\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\i-1\end{smallmatrix}\right)\\[1ex] \left(\begin{smallmatrix}2\\2\\i\end{smallmatrix}\right)=+\left(\begin{smallmatrix}2\\2\\i-1\end{smallmatrix}\right)g_i^2+2\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\i-1\end{smallmatrix}\right)g_i+\left(\begin{smallmatrix}2\\i-1\end{smallmatrix}\right)\end{cases}$$

$$[27]\quad \begin{cases}\left(\begin{smallmatrix}1\\3\\i\end{smallmatrix}\right)=-\left(\begin{smallmatrix}3\\3\\i-1\end{smallmatrix}\right)g_i-\left(\begin{smallmatrix}2\\3\\i-1\end{smallmatrix}\right)\\[1ex] \left(\begin{smallmatrix}2\\3\\i\end{smallmatrix}\right)=-\left(\begin{smallmatrix}3\\3\\i-1\end{smallmatrix}\right)g_i^2-2\left(\begin{smallmatrix}2\\3\\i-1\end{smallmatrix}\right)g_i-\left(\begin{smallmatrix}1\\3\\i-1\end{smallmatrix}\right)\\[1ex] \left(\begin{smallmatrix}3\\3\\i\end{smallmatrix}\right)=+\left(\begin{smallmatrix}3\\3\\i-1\end{smallmatrix}\right)g_i^3+3\left(\begin{smallmatrix}2\\3\\i-1\end{smallmatrix}\right)g_i^2+3\left(\begin{smallmatrix}1\\3\\i-1\end{smallmatrix}\right)+\left(\begin{smallmatrix}0\\3\\i-1\end{smallmatrix}\right)\end{cases}$$

$$[28]\quad \begin{cases}\left(\begin{smallmatrix}1\\4\\i\end{smallmatrix}\right)=-\left(\begin{smallmatrix}4\\4\\i-1\end{smallmatrix}\right)g_i-\left(\begin{smallmatrix}3\\4\\i-1\end{smallmatrix}\right)\\[1ex] \left(\begin{smallmatrix}2\\4\\i\end{smallmatrix}\right)=-\left(\begin{smallmatrix}4\\4\\i-1\end{smallmatrix}\right)g_i^2-2\left(\begin{smallmatrix}3\\4\\i-1\end{smallmatrix}\right)g_i-\left(\begin{smallmatrix}2\\4\\i-1\end{smallmatrix}\right)\\[1ex] \left(\begin{smallmatrix}3\\4\\i\end{smallmatrix}\right)=-\left(\begin{smallmatrix}4\\4\\i-1\end{smallmatrix}\right)g_i^3-3\left(\begin{smallmatrix}3\\4\\i-1\end{smallmatrix}\right)g_i^2-3\left(\begin{smallmatrix}2\\4\\i-1\end{smallmatrix}\right)g_i-\left(\begin{smallmatrix}1\\4\\i-1\end{smallmatrix}\right)\\[1ex] \left(\begin{smallmatrix}4\\4\\i\end{smallmatrix}\right)=+\left(\begin{smallmatrix}4\\4\\i-1\end{smallmatrix}\right)g_i^4+4\left(\begin{smallmatrix}3\\4\\i-1\end{smallmatrix}\right)g_i^3+6\left(\begin{smallmatrix}2\\4\\i-1\end{smallmatrix}\right)g_i^2+\left(\begin{smallmatrix}0\\4\\i-1\end{smallmatrix}\right).\end{cases}$$

Ferner ans [25]

$$[29]\quad\begin{cases}\left(\begin{smallmatrix}0\\2\\i-1\end{smallmatrix}\right)=-\left(\begin{smallmatrix}0\\2\\i\end{smallmatrix}\right)g_i^2+2\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\i\end{smallmatrix}\right)g_i-\left(\begin{smallmatrix}2\\2\\i\end{smallmatrix}\right)\\ \left(\begin{smallmatrix}0\\3\\i-1\end{smallmatrix}\right)=+\left(\begin{smallmatrix}0\\3\\i\end{smallmatrix}\right)g_i^3-3\left(\begin{smallmatrix}1\\3\\i\end{smallmatrix}\right)g_i^2+\left(\begin{smallmatrix}2\\3\\i\end{smallmatrix}\right)g_i-\left(\begin{smallmatrix}3\\3\\i\end{smallmatrix}\right)\\ \left(\begin{smallmatrix}0\\4\\i-1\end{smallmatrix}\right)=-\left(\begin{smallmatrix}0\\4\\i\end{smallmatrix}\right)g_i^4+4\left(\begin{smallmatrix}1\\4\\i\end{smallmatrix}\right)g_i^3-\left(\begin{smallmatrix}2\\4\\i\end{smallmatrix}\right)g_i^2+\left(\begin{smallmatrix}3\\4\\i\end{smallmatrix}\right)g_i-\left(\begin{smallmatrix}4\\4\\i\end{smallmatrix}\right)\end{cases}$$

Durch Verbindung der zweiten Gleichung in [26] mit der ersten in [29] durch Addition und Subtraction leitet man unter Berücksichtigung des sich aus [22] ergebenden Satzes

$$[30]\quad \left(\begin{smallmatrix}0\\n\\i\end{smallmatrix}\right)=-\left(\begin{smallmatrix}n\\n\\i-1\end{smallmatrix}\right)$$

noch ab

$$[31]\quad\begin{cases}\left(\begin{smallmatrix}2\\2\\i\end{smallmatrix}\right)-\left(\begin{smallmatrix}2\\2\\i-2\end{smallmatrix}\right)=\left(\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\i-1\end{smallmatrix}\right)-\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\i\end{smallmatrix}\right)\right)g_i\\ \left(\begin{smallmatrix}1\\2\\i-1\end{smallmatrix}\right)+\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\i\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}0\\2\\i\end{smallmatrix}\right)g_i.\end{cases}$$

Ebenso folgt aus der Verbindung von [27] und [29]

$$[32]\quad\begin{cases}\left(\begin{smallmatrix}3\\3\\i\end{smallmatrix}\right)-\left(\begin{smallmatrix}3\\3\\i-2\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}3\\3\\i-1\end{smallmatrix}\right)g_i^3+\frac{3}{2}\left(\left(\begin{smallmatrix}2\\3\\i-1\end{smallmatrix}\right)+\left(\begin{smallmatrix}1\\3\\i\end{smallmatrix}\right)\right)g_i^2\\ \qquad\qquad+\frac{3}{2}\left(\left(\begin{smallmatrix}1\\3\\i-1\end{smallmatrix}\right)-\left(\begin{smallmatrix}2\\3\\i\end{smallmatrix}\right)\right)g_i,\\ \left(\begin{smallmatrix}1\\3\\i-1\end{smallmatrix}\right)+\left(\begin{smallmatrix}2\\3\\i\end{smallmatrix}\right)=\left(\left(\begin{smallmatrix}1\\3\\i\end{smallmatrix}\right)-\left(\begin{smallmatrix}2\\3\\i-1\end{smallmatrix}\right)\right)g_i;\end{cases}$$

so wie endlich aus der Verbindung von [28] und [29]

$$[33]\quad\begin{cases}\left(\begin{smallmatrix}4\\4\\i\end{smallmatrix}\right)-\left(\begin{smallmatrix}4\\4\\i-2\end{smallmatrix}\right)=2\left(\left(\begin{smallmatrix}3\\4\\i-1\end{smallmatrix}\right)-\left(\begin{smallmatrix}1\\4\\i\end{smallmatrix}\right)\right)g_i^3\\ \qquad+3\left(\left(\begin{smallmatrix}2\\4\\i-1\end{smallmatrix}\right)+\left(\begin{smallmatrix}2\\4\\i\end{smallmatrix}\right)\right)g_i^2+2\left(\left(\begin{smallmatrix}1\\4\\i-1\end{smallmatrix}\right)-\left(\begin{smallmatrix}3\\4\\i\end{smallmatrix}\right)\right)g_i,\\ 2\left(\left(\begin{smallmatrix}3\\4\\i\end{smallmatrix}\right)+\left(\begin{smallmatrix}1\\4\\i-1\end{smallmatrix}\right)\right)=-\left(\begin{smallmatrix}4\\4\\i-1\end{smallmatrix}\right)g_i^3\\ \qquad-2\left(\left(\begin{smallmatrix}3\\4\\i-1\end{smallmatrix}\right)+\left(\begin{smallmatrix}1\\4\\i\end{smallmatrix}\right)\right)g_i^2-3\left(\left(\begin{smallmatrix}2\\4\\i-1\end{smallmatrix}\right)-\left(\begin{smallmatrix}2\\4\\i\end{smallmatrix}\right)\right)g_i.\end{cases}$$

Potenzirt man die oben in dem Beweise für [3] bereits erwähnte Gleichung

$$x_0 = \frac{a_i x_i + a_{i-1}}{b_i x_i + b_{i-1}}$$

mit n und reducirt, so erhält man

$$[34]\quad 0 = \left(\overset{n}{\underset{i}{n}}\right) x_i^n + \frac{n}{1}\left(\overset{n-1}{\underset{i}{n}}\right) x_i^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}\left(\overset{n-2}{\underset{i}{n}}\right) x_i^{n-2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n(n-1)}{1.2}\left(\overset{2}{\underset{i}{n}}\right) x_i^2 + \frac{n}{1}\left(\overset{1}{\underset{i}{n}}\right) x_i + \left(\overset{0}{\underset{i}{n}}\right).$$

Es ist also insbesondere auch

$$[35]\quad \begin{cases} 0 = \left(\overset{2}{\underset{i}{2}}\right) x_i^2 + 2\left(\overset{1}{\underset{i}{2}}\right) x_i + \left(\overset{0}{\underset{i}{2}}\right), \\ 0 = \left(\overset{3}{\underset{i}{3}}\right) x_i^3 + 3\left(\overset{2}{\underset{i}{3}}\right) x_i^2 + 3\left(\overset{1}{\underset{i}{3}}\right) x_i + \left(\overset{0}{\underset{i}{3}}\right), \\ 0 = \left(\overset{4}{\underset{i}{4}}\right) x_i^4 + 4\left(\overset{3}{\underset{i}{4}}\right) x_i^3 + 6\left(\overset{2}{\underset{i}{4}}\right) x_i^2 + 4\left(\overset{1}{\underset{i}{4}}\right) x_i + \left(\overset{0}{\underset{i}{4}}\right). \end{cases}$$

Wenden wir uns nach diesen Ergehungen auf allgemeinem Gebiete zu der Verwandlung der Cubikwurzeln aus ganzen Irrationalzahlen in Kettenbrüche, so werden wir auch wieder der Bezeichnung der hier in Betracht kommenden Zahlen durch k, h und l als der bequemeren den Vorzug geben.

Die grösste in $\sqrt[3]{D}$ steckende ganze Zahl wird offenbar g_1. Da nun der erste Näherungsbruch $\frac{g_1}{1}$ ist, so hat man $a_1 = g_1$, $b_1 = 1$ und weiter in Gemässheit der Formeln [7], [5] und [4] $l_1 = g_1$, $h_1 = g_1^2$, $k_1 = D - g_1^3$. Nach der Folgerung aus [14] muss nun x_1 zwischen $\frac{3h_1}{k_1}$ und $\frac{3h_1}{k_1} + \frac{2}{g_1}$ liegen, und g_2, welches die grösste in x_1 enthaltene ganze Zahl ist, ist $\overset{=}{>} \frac{3h_1}{k_1}$, jedenfalls aber $< \frac{3h_1}{k_1} + \frac{2}{g_1}$ sein. Es bleibt hier, namentlich bei kleinen Werthen von g_1, oft die Wahl zwischen zwei ganzen Zahlen als Bewerbern um g_2, ein Fall, der sich auch bei einem grösseren Index ereignen kann. Man probire alsdann, halte aber bei allen Proben zur Bestimmung eines g_i bei Kettenbrüchen folgende Regel fest: war g_i zu gross, so ergibt sich später g_{i+1} negativ; war g_i zu klein, so ergibt sich g_{i+1} als Null. Aus g_2 und den früher gefundenen Zahlen folgt l_2 nach [16] oder der ersten Formel in [27], h_2 und k_2 ist durch die zweite und dritte Formel in [27] bestimmt. Ueberhaupt kann nun immer das neue g_i mit Hülfe von [15], das neue l_i, h_i und k_i durch [27] gefunden werden. Jedes weitere a_i und b_i wird nach den Formeln $a_i = a_{i-1} g_i + a_{i-2}$ und $b_i = b_{i-1} g_i + b_{i-2}$ berechnet. Für den practischen Gebrauch haben sich mir die aus [27] leicht abzuleitenden Formeln

$$[36]\quad\begin{cases} l_i = k_{i-1}\,g_i - h_{i-1}, \\ h_i = (l_i - h_{i-1})\,g_i - l_{i-1}, \\ k_i = (h_{i-1}\,g_i - h_i + 2l_{i-1})\,g_i + k_{i-2} \end{cases}$$

als die bequemsten bewährt.

Die hier folgende Tabelle enthält für alle ganzen Zahlen, die kleiner als 64 und für die Cubikwurzel irrational sind, eine Zusammenstellung der Werthe von g_i, l_i, h_i, k_i, a_i und b_i, i von 1 bis 10 genommen. Ich behalte mir vor, über die Zahlen dieser Tabelle, welche ich nach der sorgfältigen Controle, der ich dieselben unterworfen habe, als ganz frei von Rechnungsfehlern betrachten darf, später noch weitere Bemerkungen zu machen. Hier sei nur mit Rücksicht auf die Anmerkung 4) des Herrn Seeling im VIII. Theile des Archivs, Seite 80. unten, auf den Werth $h_3 = 0$ bei $\sqrt[3]{49}$ aufmerksam gemacht.

$\sqrt[3]{3}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	1	2	3	1	4	1	5	1	1	6
l_i	1	3	6	23	29	144	189	457	1306	2470
h_i	1	3	6	11	49	66	471	−203	1052	7202
k_i	2	3	29	10	193	51	928	1103	587	11435
a_i	1	3	10	13	62	75	437	512	949	6206
b_i	1	2	7	9	43	52	303	355	658	4303

$\sqrt[3]{2}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	1	3	1	5	1	1	4	1	1	8
l_i	1	2	8	11	28	72	134	262	803	1363
h_i	1	2	4	27	−10	54	248	−120	661	4813
k_i	1	10	3	55	62	47	510	683	253	17331
a_i	1	4	5	29	34	63	286	349	635	5429
b_i	1	3	4	23	27	50	227	277	504	4309

$\sqrt[3]{5}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	1	1	2	2	4	3	3	1	5	1
l_i	1	3	5	15	37	161	406	1583	2189	5672
h_i	1	1	5	15	73	227	376	801	5357	−1874
k_i	4	3	10	13	78	211	1959	598	11029	12207
a_i	1	2	5	12	53	171	566	737	4251	4988
b_i	1	1	3	7	31	100	331	431	2486	2917

$\sqrt[3]{4}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	1	1	1	2	2	1	3	2	3	1
l_i	1	2	4	8	16	45	72	268	517	1872
h_i	1	0	2	8	8	21	108	248	539	816
k_i	3	4	5	12	53	31	188	255	2411	1012
a_i	1	2	3	8	19	27	100	227	781	1008
b_i	1	1	2	5	12	17	63	143	492	635

$\sqrt[3]{7}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	1	1	10	2	16	2	1	4	2	1
l_i	1	5	7	77	163	1597	4564	7630	21726	83795
h_i	1	3	35	77	1299	433	2534	15820	4182	57887
k_i	6	1	56	15	1448	4997	2541	18773	87977	8520
a_i	1	2	21	44	725	1494	2219	10370	22959	33329
b_i	1	1	11	33	379	781	1160	5421	12002	17423

$\sqrt[3]{6}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	1	1	4	2	7	3	508	1	5	5
l_i	1	4	6	30	68	541	1693	653580	827130	4337515
h_i	1	2	12	30	236	847	429227	222660	2368770	9016595
k_i	5	2	21	14	259	5	1082807	209958	1341257	22617533
a_i	1	2	9	20	149	467	237385	237852	1426645	7371077
b_i	1	1	5	11	82	257	130638	130895	785113	4056460

$\sqrt[3]{10}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	2	6	2	9	1	1	2	4	1	12
l_i	2	8	52	110	485	898	2136	4486	24258	30560
h_i	4	22	52	470	—95	508	2358	6376	13396	181710
k_i	2	37	18	955	803	1322	1711	30634	3663	361330
a_i	2	13	28	265	293	558	1409	6194	7603	97430
b_i	1	6	13	123	136	259	654	2875	3529	45223

$\sqrt[3]{9}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	2	12	2	18	1	1	1	1	4	1
l_i	2	8	100	206	1721	2823	3888	10231	17551	32112
h_i	4	46	100	1808	—293	1395	—330	6673	33281	—18720
k_i	1	73	17	3529	2530	5283	9901	6056	65393	93159
a_i	2	25	52	961	1013	1974	2987	4961	22831	27792
b_i	1	12	25	462	487	949	1436	2385	10976	13361

$\sqrt[3]{12}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	2	3	2	5	15	7	3	1	1	3
l_i	2	8	28	72	393	5702	33004	59527	139920	253632
h_i	4	10	28	192	2943	18920	36550	−10027	90420	349716
k_i	4	19	20	39	1235	17308	96077	129893	114684	734045
a_i	2	7	16	87	1321	9334	29323	38657	67980	242597
b_i	1	3	7	38	577	4077	12808	16885	29693	105964

$\sqrt[3]{11}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	2	4	2	6	1	1	2	1	2	9
l_i	2	8	36	78	241	497	845	1943	4115	11859
h_i	4	14	36	216	−53	309	575	523	5241	55447
k_i	3	25	19	457	444	577	2518	2319	1900	1887
a_i	2	9	20	129	149	278	705	983	2671	25022
b_i	1	4	9	58	67	125	317	442	1201	11251

$\sqrt[3]{14}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	2	2	2	3	1	1	5	5	9	6
l_i	2	8	20	46	81	218	430	2443	12712	118684
h_i	4	6	20	58	−23	160	1132	6125	56840	358352
k_i	6	13	22	139	195	118	715	2093	29254	50765
a_i	2	5	12	41	53	94	523	2709	24904	152133
b_i	1	2	5	17	22	39	217	1124	10333	63122

$\sqrt[3]{13}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	2	2	1	5	1	1	43	3	2	1
l_i	2	6	19	29	60	217	405	14766	37990	60373
h_i	4	2	11	71	−40	197	8727	17712	25790	−3407
k_i	5	21	8	131	177	14	7831	27851	86163	133028
a_i	2	5	7	40	47	87	3788	11451	26690	38141
b_i	1	2	3	17	20	37	1611	4870	11351	16221

$\sqrt[3]{16}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	2	1	1	12	10	18	1	6	1	21
l_i	2	4	13	25	315	2979	47504	50032	399997	462754
h_i	4	−2	11	155	1575	24957	19568	135280	214685	4809452
k_i	8	11	3	47	253	72461	11600	535277	32259	11012744
a_i	2	3	5	63	635	11493	12128	84261	96389	2108430
b_i	1	1	2	25	252	4561	4813	33439	38252	836731

$\sqrt[3]{15}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	2	2	6	1	8	1	10	8	12	1
l_i	2	10	20	137	157	1420	1770	19344	140646	1921155
h_i	4	10	50	67	583	680	9480	77142	742704	1037805
k_i	7	5	187	28	2003	245	3603	18149	2663859	4340
a_i	2	5	32	37	328	365	3978	32189	390246	422435
b_i	1	2	13	15	133	148	1613	13052	158237	171289

$\sqrt[3]{18}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	2	1	1	1	1	1	3	22	1	2
l_i	2	6	9	16	22	51	108	380	5081	7609
h_i	4	0	3	4	2	27	192	4028	673	8791
k_i	10	9	19	26	53	45	26	9109	4141	14543
a_i	2	3	5	8	13	21	76	1693	1769	5231
b_i	1	1	2	3	5	8	29	646	675	1996

$\sqrt[3]{17}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	2	1	1	3	138	1	1	3	2	3
l_i	2	5	11	26	92	4453	10429	21412	74978	166381
h_i	4	—1	7	46	6322	—1961	7937	29996	68552	218509
k_i	9	10	11	1	10775	8468	9783	52487	78311	463796
a_i	2	3	5	18	2489	2507	4996	17495	39986	137453
b_i	1	1	2	7	968	975	1943	6804	15551	53457

$\sqrt[3]{20}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	2	1	2	1	1	154	6	1	1	1
l_i	2	8	12	16	59	103	13609	50402	58796	177083
h_i	4	2	12	−8	51	7949	33857	2936	5458	112829
k_i	12	7	28	51	1	3593	84259	61732	182541	71953
a_i	2	3	8	11	19	2937	17641	20578	38219	58797
b_i	1	1	3	4	7	1082	6499	7581	14080	21661

$\sqrt[3]{19}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	2	1	2	63	1	2	2	2	1	95
l_i	2	7	15	42	1535	2231	6661	10835	45996	65269
h_i	4	1	21	1308	185	2557	5977	3055	32106	3104489
k_i	11	8	1	2843	1208	4609	8406	49051	1025	3618486
a_i	2	3	8	507	515	1537	3589	8715	12304	1177595
b_i	1	1	3	190	193	576	1345	3266	4611	441311

$\sqrt[3]{22}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	2	1	4	19	2	2	2	2	2	29
l_i	2	10	16	76	1128	2428	6042	13796	43716	107702
h_i	4	4	38	706	768	2192	5272	11006	51624	1582546
k_i	14	5	6	917	1598	4117	9534	27361	5494	84839
a_i	2	3	14	269	552	1373	3298	7969	19236	565813
b_i	1	1	5	96	197	490	1177	2844	6865	201929

$\sqrt[3]{21}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	2	1	3	6	1	3	17	1	7	3
l_i	2	9	15	51	255	432	1581	24367	29428	212509
h_i	4	3	27	129	75	816	12573	10213	110138	277685
k_i	13	6	13	384	169	141	36940	5663	107549	340418
a_i	2	3	11	69	80	309	5333	5642	44827	140123
b_i	1	1	4	25	29	112	1933	2045	16248	50789

$\sqrt[3]{24}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	2	1	7	1	1	1	12	13	1	10
l_i	2	12	15	70	76	261	429	4940	62672	74586
h_i	4	6	51	4	2	183	2691	28808	28924	393948
k_i	16	3	121	80	263	51	587	91480	10351	297840
a_i	2	3	23	26	49	75	949	12412	13361	146022
b_i	1	1	8	9	17	26	329	4303	4632	50623

$\sqrt[3]{23}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	2	1	5	2	2	7	1	16	4	1
l_i	2	11	15	71	195	430	3537	4273	53637	257843
h_i	4	5	39	49	221	1268	1839	35407	68647	135559
k_i	15	4	55	122	93	4805	382	22261	326490	62623
a_i	2	3	17	37	91	674	765	12914	52421	65335
b_i	1	1	6	13	32	237	269	4541	18433	22974

$\sqrt[3]{26}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	2	1	25	1	1	1	39	12	1	1
l_i	2	14	17	232	238	907	1400	52024	240109	606704
h_i	4	8	211	4	2	667	27680	290728	−102643	469238
k_i	18	1	443	242	909	53	6642	530837	504061	439174
a_i	2	3	77	80	157	237	9400	113037	122437	235474
b_i	1	1	26	27	53	80	3173	38156	41329	79485

$\sqrt[3]{25}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	2	1	12	6	4	1	2	2	2	5
l_i	2	13	17	211	1057	3508	5652	14794	41346	96431
h_i	4	7	107	607	1589	862	6072	11792	44314	219239
k_i	17	2	53	416	5097	3257	10433	26569	28149	451684
a_i	2	3	38	231	962	1193	3348	7889	19126	103519
b_i	1	1	13	79	329	408	1145	2698	6541	35403

$\sqrt[3]{29}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	13	1	4	1	4	2	2	2	3
l_i	3	17	186	208	993	1381	5791	12905	34597	77125
h_i	9	101	68	374	411	2887	4427	11165	33959	94901
k_i	2	287	69	1367	448	4339	8666	22881	37028	251391
a_i	3	40	43	212	255	1232	2719	6670	16059	54847
b_i	1	13	14	69	83	401	885	2171	5227	17852

$\sqrt[3]{28}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	27	3	40	1	10	1	1	21	13
l_i	3	18	492	1462	53216	58324	205800	721349	1427182	28509964
h_i	9	240	738	28468	23286	297164	−149688	665237	15279496	170568902
k_i	1	244	55	81684	8161	502964	571661	99639	3368420	402045469
a_i	3	82	249	10042	10291	112952	123243	236195	5083338	66319589
b_i	1	27	82	3307	3389	37197	40586	77783	1674029	21840160

$\sqrt[3]{31}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	7	13	1	2	8	1	1	12	1
l_i	3	19	128	985	1841	5221	15291	50308	91178	1066127
h_i	9	67	774	83	2531	19679	−9609	44626	508316	466633
k_i	4	15	1759	962	969	34970	40699	11317	1574443	235356
a_i	3	22	289	311	911	7599	8510	16109	201818	217927
b_i	1	7	92	99	290	2419	2709	5128	64245	69373

$\sqrt[3]{30}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	9	3	13	1	9	1	2	5	4
l_i	3	18	168	489	6256	6992	43091	76789	231594	1084068
h_i	9	78	252	2913	2854	30986	5113	100261	579876	1785174
k_i	3	82	57	9169	1094	74077	40951	66371	415986	4056443
a_i	3	28	87	1159	1246	12373	13619	39611	211674	886307
b_i	1	9	28	373	401	3982	4383	12748	68123	285240

$\sqrt[3]{33}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	4	1	4	1	1	27	5	1	1
l_i	3	15	64	88	165	579	1080	25335	67439	130310
h_i	9	21	28	176	−99	513	14730	51945	−9841	72712
k_i	6	85	29	341	480	59	8013	119384	120469	171709
a_i	3	13	16	77	93	170	4683	23585	28268	51853
b_i	1	4	5	24	29	53	1460	7353	8813	16166

$\sqrt[3]{32}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	5	1	2	1	1	2	1	1	2
l_i	3	16	64	90	164	337	583	1018	2068	3744
h_i	9	32	16	84	−10	183	463	−28	1078	3264
k_i	5	96	53	248	327	383	1481	2040	2411	8096
a_i	3	16	19	54	73	127	327	454	781	2016
b_i	1	5	6	17	23	40	103	143	246	635

$\sqrt[3]{35}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	3	1	2	4	1	1	1	1	2
l_i	3	15	40	76	192	503	805	1190	2577	3959
h_i	9	15	10	92	324	−13	315	70	1317	2707
k_i	8	55	43	71	827	792	1505	2647	2638	12809
a_i	3	10	13	36	157	193	350	543	893	2329
b_i	1	3	4	11	48	59	107	166	273	712

$\sqrt[3]{34}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	4	5	1	3	3	1	1	4	2
l_i	3	19	68	306	471	1578	2786	7113	13369	48035
h_i	9	37	136	102	801	1860	−652	4979	26447	29807
k_i	7	21	442	191	793	4646	6461	4587	37241	104237
a_i	3	13	68	81	311	1014	1325	2339	10681	23701
b_i	1	4	21	25	96	313	409	722	3297	7316

$\sqrt[3]{37}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	3	99	1	1	1	2	1	1	1
l_i	3	21	66	3001	4001	9316	13994	31915	33137	125736
h_i	9	33	3246	−311	1311	4004	10664	7257	−6035	98634
k_i	10	1	6247	3690	10627	8999	42579	40394	119701	1999
a_i	3	10	993	1003	1996	2999	7994	10993	18987	29980
b_i	1	3	298	301	599	900	2399	3299	5698	8997

$\sqrt[3]{36}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	3	3	4	1	7	1	83	1	36
l_i	3	18	60	162	808	961	8886	10008	820055	862123
h_i	9	24	90	228	418	2993	4932	412422	397625	15901873
k_i	9	28	63	1036	197	11879	180	1232477	34993	3131009
a_i	3	10	33	142	175	1367	1542	129353	130895	4841573
b_i	1	3	10	43	53	414	467	39175	39642	1466287

$\sqrt[3]{39}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	2	1	1	3	1	19	1	1	3
l_i	3	15	22	55	79	390	507	3821	8816	18419
h_i	9	9	−2	35	77	234	4797	−1483	6478	27007
k_i	12	31	53	38	467	39	8618	7333	8299	37510
a_i	3	7	10	17	61	78	1543	1621	3164	11113
b_i	1	2	3	5	18	23	455	478	933	3277

$\sqrt[3]{38}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	2	1	3	4	1	2	2	1	2
l_i	3	13	34	62	196	656	1084	2384	5943	8827
h_i	9	5	16	104	306	154	1204	1276	2283	7145
k_i	11	39	26	75	962	619	1794	7219	5555	25833
a_i	3	7	10	37	158	195	548	1291	1839	4969
b_i	1	2	3	11	47	58	163	384	547	1478

$\sqrt[3]{41}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	2	4	3	19	1	36	2	3	3
l_i	3	19	43	209	640	12809	13763	415587	939115	2379106
h_i	9	17	85	329	5700	6469	249775	317861	1448175	2453678
k_i	14	15	98	51	18509	562	332681	418992	1342427	11726223
a_i	3	7	31	100	1931	2031	75047	152125	531422	1746391
b_i	1	2	9	29	560	589	21764	44117	154115	506462

$\sqrt[3]{40}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	2	2	1	1	1	1	1	7	1
l_i	3	17	33	64	96	175	210	644	1023	5174
h_i	9	13	23	8	24	55	—20	454	3339	812
k_i	13	23	87	104	199	265	624	211	8513	4784
a_i	3	7	17	24	41	65	106	171	1303	1474
b_i	1	2	5	7	12	19	31	50	381	431

$\sqrt[3]{43}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	1	1	73	14	110	2	1	18	5
l_i	3	7	26	49	3605	50335	2889677	10588920	16492876	294457789
h_i	9	−5	24	1799	25235	2757395	214229	7485014	151552596	698033089
k_i	16	21	1	386	687	2823536	10803149	1332105	89202077	464910320
a_i	3	4	7	515	7217	794385	1595987	2390372	44622683	225503787
b_i	1	1	2	147	2060	226747	455554	682301	12736972	64367161

$\sqrt[3]{42}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	2	9	1	12	1	14	1	1	1
l_i	3	21	42	414	456	5964	6608	53934	57171	205354
h_i	9	21	168	204	2610	2898	45976	1350	1887	146296
k_i	15	7	582	55	8574	679	99910	58521	207241	28454
a_i	3	7	66	73	942	1015	15152	16167	31319	47486
b_i	1	2	19	21	271	292	4359	4651	9010	13661

$\sqrt[3]{45}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	1	1	3	1	8	2	4	1	1
l_i	3	9	22	35	155	211	1719	3483	8729	16112
h_i	9	−3	16	35	85	853	1521	6129	−883	8266
k_i	18	19	17	190	37	1286	1251	14858	15229	23167
a_i	3	4	7	25	32	281	594	2657	3251	5908
b_i	1	1	2	7	9	79	167	747	914	1661

$\sqrt[3]{44}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	1	1	7	1	2	1	4	3	12
l_i	3	8	24	43	240	284	953	1487	7520	23276
h_i	9	− 4	20	137	60	208	461	3151	11620	132352
k_i	17	20	9	377	172	1161	487	3557	2908	269093
a_i	3	4	7	53	60	173	233	1105	3548	43681
b_i	1	1	2	15	17	49	66	313	1005	12373

$\sqrt[3]{47}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	1	1	1	1	3	1	13	1	2
l_i	3	11	18	25	63	90	431	555	4852	7058
h_i	9	−1	8	−1	39	90	251	3521	776	7712
k_i	20	17	33	62	43	521	62	8373	3917	15461
a_i	3	4	7	11	18	65	83	1144	1227	3598
b_i	1	1	2	3	5	18	23	317	340	997

$\sqrt[3]{46}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	1	1	2	1	1	23	1	2	1
l_i	3	10	20	38	50	173	294	4558	4922	19872
h_i	9	−2	12	32	−20	143	3300	964	3358	11592
k_i	19	18	25	82	153	19	7858	2943	23230	4553
a_i	3	4	7	18	25	43	1014	1057	3128	4185
b_i	1	1	2	5	7	12	283	295	873	1168

$\sqrt[3]{49}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	1	1	1	14	2	2	1	34	2
l_i	3	13	14	49	77	931	1409	5868	8356	179234
h_i	9	1	0	35	539	707	473	3986	142712	64688
k_i	22	15	49	8	735	1058	6341	363	160973	475259
a_i	3	4	7	11	161	333	827	1160	40267	81694
b_i	1	1	2	3	44	91	226	317	11004	22325

$\sqrt[3]{48}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	1	1	1	2	1	3	6	254	2
l_i	3	12	16	37	53	152	272	1082	6772	1307160
h_i	9	0	4	17	35	64	472	3388	858454	890640
k_i	21	16	41	35	187	112	259	40	1082807	1679664
a_i	3	4	7	11	29	40	149	934	237385	475704
b_i	1	1	2	3	8	11	41	257	65319	130895

$\sqrt[3]{51}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	1	2	2	3	17	1	2	2	5
l_i	3	15	23	67	188	621	6663	9623	31975	65010
h_i	9	3	25	61	314	5031	1011	10561	33205	127050
k_i	24	13	46	83	55	11694	5317	21268	19643	535893
a_i	3	4	11	26	89	1539	1628	4795	11218	60885
b_i	1	1	3	7	24	415	439	1293	3025	16418

$\sqrt[3]{50}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	1	2	6	15	3	5	1	2	1
l_i	3	14	26	80	500	7187	19584	83896	99644	352122
h_i	9	2	34	250	3670	10051	40478	23834	67724	184754
k_i	23	14	19	50	3619	5927	124374	61739	419846	143997
a_i	3	4	11	70	1061	3253	17326	20579	58484	79063
b_i	1	1	3	19	288	883	4703	5586	15875	21461

$\sqrt[3]{53}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	1	3	9	1	2	3	1	6	1
l_i	3	17	28	101	597	1015	2321	9454	13008	33799
h_i	9	5	52	413	83	1267	2147	4986	38678	—17887
k_i	26	11	17	1010	549	1196	11601	2999	72477	85580
a_i	3	4	15	139	154	447	1495	1942	13147	15089
b_i	1	1	4	37	41	119	398	517	3500	4017

$\sqrt[3]{52}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	1	2	1	2	1	4	1	2	19
l_i	3	16	20	57	73	244	340	1127	2331	6698
h_i	9	4	16	21	47	124	620	167	3201	64112
k_i	25	12	73	47	291	116	1747	1249	521	27260
a_i	3	4	11	15	41	56	265	321	907	17554
b_i	1	1	3	4	11	15	71	86	243	4703

$\sqrt[3]{55}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	1	4	13	2	1	6	1	8	1
l_i'	3	19	29	139	1061	3433	4827	33925	39245	309633
h_i	9	7	69	881	221	2151	12623	16475	148235	122153
k_i	28	9	16	971	3654	1163	46548	6965	457868	111537
a_i	3	4	19	251	521	772	5153	5925	52553	58478
b_i	1	1	5	66	137	203	1355	1558	13819	15377

$\sqrt[3]{54}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	1	3	1	1	5	1	1	1	27
l_i	3	18	24	45	124	216	783	818	3008	4595
h_i	9	6	36	−15	94	486	81	−46	2236	60685
k_i	27	10	81	109	62	1269	899	2962	253	156943
a_i	3	4	15	19	34	189	223	412	635	17557
b_i	1	1	4	5	9	50	59	109	168	4645

$\sqrt[3]{57}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	1	5	1	1	1	1	55	1	3
l_i	3	21	26	81	141	160	583	957	37416	42243
h_i	9	9	64	−9	69	−50	473	26037	10422	58047
k_i	30	7	145	132	229	533	26	63453	17555	207606
a_i	3	4	23	27	50	77	127	7062	7189	28629
b_i	1	1	6	7	13	20	33	1835	1868	7439

$\sqrt[3]{56}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	1	4	1	2	1	7	1	2	9
l_i	3	20	24	97	113	432	592	2895	5579	15260
h_i	9	8	44	29	71	248	1976	327	7609	63280
k_i	29	8	141	71	503	120	4871	2953	2541	150184
a_i	3	4	19	23	65	88	681	769	2219	20740
b_i	1	1	5	6	17	23	178	201	580	5421

$\sqrt[3]{59}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	1	8	2	1	8	2	11	1	6
l_i	3	23	29	151	512	782	6942	13951	143701	189437
h_i	9	11	121	31	330	3104	6894	70685	59065	638531
k_i	32	5	136	543	139	5023	1895	214386	41417	233952
a_i	3	4	35	74	109	946	2001	22957	24958	172705
b_i	1	1	9	19	28	243	514	5897	6411	44363

$\sqrt[3]{58}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	1	6	1	2	1	10	1	2	7
l_i	3	22	26	137	153	622	846	5479	10219	27096
h_i	9	10	74	37	95	374	4098	535	13889	82230
k_i	31	6	211	95	717	122	9577	5377	5855	253394
a_i	3	4	27	31	89	120	1289	1409	4107	30158
b_i	1	1	7	8	23	31	333	364	1061	7791

$\sqrt[3]{61}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	1	14	1	2	1	22	1	2	6
l_i	3	25	29	297	313	1387	1867	23975	42699	134667
h_i	9	13	199	69	191	883	20261	1847	57729	418929
k_i	34	3	496	191	1578	125	44236	22273	32066	99331
a_i	3	4	59	63	185	248	5641	5889	17419	110403
b_i	1	1	15	16	47	63	1433	1496	4425	28046

$\sqrt[3]{60}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	1	10	1	2	1	16	1	2	6
l_i	3	24	28	217	233	1004	1356	13095	23675	66149
h_i	9	12	136	53	143	628	10644	1095	32065	180829
k_i	33	4	353	143	1147	124	23739	12385	16369	365851
a_i	3	4	43	47	137	184	3081	3265	9611	60931
b_i	1	1	11	12	35	47	787	834	2455	15564

$\sqrt[3]{63}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	1	46	1	2	1	70	1	2	5
l_i	3	27	31	937	953	4457	5961	228519	395339	1188691
h_i	9	15	709	197	575	2929	207783	14775	532609	2885071
k_i	36	1	1646	575	5032	127	436302	205057	344260	3048317
a_i	3	4	187	191	569	760	53769	54529	162827	868664
b_i	1	1	47	48	143	191	13518	13701	40921	218309

$\sqrt[3]{62}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	1	22	1	2	1	34	1	2	5
l_i	3	26	30	457	473	2154	2890	55527	97451	263534
h_i	9	14	326	101	287	1394	48710	3927	131521	562614
k_i	35	2	783	287	2441	126	104237	50689	79011	1500154
a_i	3	4	91	95	281	376	13065	13441	39947	213176
b_i	1	1	23	24	71	95	3301	3396	10093	53861

XXXVIII.

Betrachtung der Coefficienten in der Entwickelung des Products

$$\prod_{i=0}^{i=n-1}(1+ix)$$

nach steigenden Potenzen von x.

Von

Herrn L. Schläfli,

Privatdocenten der Mathematik zu Bern.

Wenn wir dieses aus n Factoren zusammengesetzte Product der Kürze wegen mit $P^{(n)}$ bezeichnen, so haben wir

$$P^{(n+1)}=(1+nx).P^{(n)}.$$

Setzen wir nun fest, dass $P^{(0)}=1$ und n eine ganze (positive oder negative) Zahl sein müsse, so ist die Natur dieses Products hinreichend bestimmt. Aus dieser Definition folgt nun

$$P^{(-1)}=\frac{1}{1-x}, \quad P^{(-2)}=\frac{1}{(1-x)(1-2x)}, \text{ etc.,}$$

überhaupt

$$P^{(-n)}=\frac{1}{(1-x)(1-2x)\dots(1-nx)}. \qquad (1)$$

Die Entwickelung des Products $P^{(n)}$ besteht aus einer endlichen Zahl von Gliedern, wenn n positiv ist, verwandelt sich aber in eine unendliche Reihe, sobald n negativ wird. In diesem Falle muss x absolut kleiner als $\frac{1}{n}$ angenommen werden, damit die

Reihe convergire. Denkt man sich nämlich in (1) die Brüche $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1-2x}$, ... $\frac{1}{1-nx}$ nach den steigenden Potenzen von x in Reihen entwickelt und diese Reihen in einander multiplicirt, so werden im Producte sämmtliche Coefficienten, wie man aus ihrer Formation ersieht, kleiner werden, als wenn man die Reihe für $\frac{1}{1-nx}$ zur $n$ten Potenz erhoben hätte. Da nun die Convergenz der Entwickelung von $(1-nx)^{-n}$ für $nx<1$ als bewiesen anerkannt ist, so ist um so mehr auch jene Reihe für $P^{(-n)}$ convergent, sobald nx numerisch kleiner als 1 ist.

Wenn wir jetzt den Coefficienten von x^i in der Entwickelung von $P^{(n)}$ mit $\overset{n}{C}_i$ bezeichnen, so dass

$$P^{(n)}=\prod_{i=0}^{i=n-1}(1+ix)=\sum_i \overset{n}{C}_i x^i \qquad (2)$$

ist, so können wir bemerken, dass für ein positives n $\overset{n}{C}_i$ verschwindet, sobald $i>n-1$ wird, und dass für $n=0$ nur der Coefficient $\overset{0}{C}_0=1$ übrig bleibt; ferner ist immer, welche ganze Zahl auch n sein mag, $\overset{n}{C}_0=1$. Wird nun die Gleichung (2) mit $1+nx$ multiplicirt, so erhält man

$$P^{(n+1)}=\sum_i \overset{n+1}{C}_i x^i=(1+nx)\sum_i \overset{n}{C}_i x^i,$$

woraus sich durch Vergleichung der entsprechenden Coefficienten folgende Relationen ergeben:

$$\left.\begin{array}{l} \overset{n+1}{C}_1=\overset{n}{C}_1+n, \\ \overset{n+1}{C}_2=\overset{n}{C}_2+n\overset{n}{C}_1, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \overset{n+1}{C}_i=\overset{n}{C}_i+n\overset{n}{C}_{i-1}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Durch Summation arithmetischer Reihen gelangt man nun vermittelst dieser Relationen nach und nach zu folgenden allgemeinen Ausdrücken, in denen der Kürze wegen $\frac{n(n-1)\ldots.(n-m+1)}{1.2\ldots m}=\binom{n}{m}$ gesetzt ist:

$$\overset{n}{C}_1=\binom{n}{2},$$

$$\overset{n}{C}_2 = -\binom{n}{3} + 3\binom{n+1}{4} = \binom{n}{3}\frac{3n-1}{4},$$

$$\overset{n}{C}_3 = \binom{n}{4} - 10\binom{n+1}{5} + 15\binom{n+2}{6} = \binom{n}{4}\frac{n^2-n}{2},$$

$$\overset{n}{C}_4 = -\binom{n}{5} + 25\binom{n+1}{6} - 105\binom{n+2}{7} + 105\binom{n+3}{8}$$

$$= \binom{n}{5}\frac{15n^3-30n^2+5n+2}{48},$$

u. s. f.

Es bietet sich also für die fraglichen Coefficienten die Form

$$\overset{n}{C}_i = \binom{n}{i+1}(-1)^{i+1} + \overset{i}{B}_1\binom{n+1}{i+2}(-1)^{i+2}\ldots$$

$$\ldots + \overset{i}{B}_\mu\binom{n+\mu}{i+\mu+1}(-1)^{i+\mu+1}\ldots + \overset{i}{B}_{i-1}\binom{n+i-1}{2i} \quad (4)$$

dar, wo die Grössen $\overset{i}{B}_1$, $\overset{i}{B}_2$, etc. vermöge der Formeln (3) durch folgende Relationen bestimmt sind:

$$\left.\begin{aligned}
\overset{i+1}{B}_1 &= 2\overset{i}{B}_1 + i + 2,\\
\overset{i+1}{B}_2 &= 3\overset{i}{B}_2 + (i+3)\overset{i}{B}_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\overset{i+1}{B}_\mu &= (\mu+1)\overset{i}{B}_\mu + (i+\mu+1)\overset{i}{B}_{\mu-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\overset{i+1}{B}_i &= \qquad\qquad (2i+1)\overset{i}{B}_{i-1}.
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Wenn man nämlich in der Formel $\overset{n+1}{C}_{i+1} = \overset{n}{C}_{i+1} + n\overset{n}{C}_i$ die Reihen (4) substituirt, so ist zu beachten, dass

$$\binom{n+\mu+1}{i+\mu+2} - \binom{n+\mu}{i+\mu+2} = \binom{n+\mu}{i+\mu+1}$$

und

$$n\binom{n+\mu}{i+\mu+1} = (i+\mu+2)\binom{n+\mu+1}{i+\mu+2} - (\mu+1)\binom{n+\mu}{i+\mu+1}.$$

Aus den Relationen (5) erhält man nach und nach:

$$\overset{i}{B}_1 = 2^{i+1} - (i+3),$$

$$\overset{i}{B}_2 = \frac{1}{1.2}\left\{3^{i+2} - \binom{2}{1}.(i+5).2^{i+1} + (i+4)(i+3) + 1\right\},$$

$$\overset{i}{B}_3=\frac{1}{1.2.3}\{4^{i+3}-\binom{3}{1}(i+7).3^{i+2}+\binom{3}{2}[(i+6)(i+5)+2]2^{i+1}$$
$$-[(i+5)(i+4)(i+3)+3(i+4)+1]\},$$

$$\overset{i}{B}_4=\frac{1}{1.2.3.4}\{5^{i+4}-\binom{4}{1}(i+9).4^{i+3}+\binom{4}{2}[(i+8)(i+7)+3]3^{i+2}$$
$$-\binom{4}{3}[(i+7)(i+6)(i+5)+6(i+6)+2]\,2^{i+1}$$
$$+[(i+6)(i+5)(i+4)(i+3)+6(i+5)(i+4)+4(i+4)+5]\},$$

u. s. f.

In diesen Formeln wurde der Coefficient des ersten Gliedes nach Berechnung aller übrigen Coefficienten aus der Bedingung $\overset{i}{B}_i=0$ hergeleitet, wobei es bemerkenswerth ist, dass in allen vier speciellen Fällen derselbe innerhalb der Klammern $=1$ sich ergab. Man kann sie überdiess noch an der Gleichung $\overset{i+1}{B^i}=3.5.7\ldots(2i+1)$ prüfen. Um, wenn es möglich ist, über das Bildungsgesetz der Grössen $\overset{i}{B}_1$, $\overset{i}{B}_2$, etc. etwas Allgemeines zu erfahren, wollen wir

$$\overset{i}{B}_\alpha=\frac{1}{1.2\ldots\alpha}\left\{\binom{\alpha}{0}\overset{\alpha}{A}_0(\alpha+1)^{i+\alpha}\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+(-1)^\mu\binom{\alpha}{\mu}\overset{\alpha}{A}_\mu(\alpha+\mu+1)^{i+\alpha-\mu}\ldots+(-1)^\alpha\binom{\alpha}{\alpha}\overset{\alpha}{A}_\alpha.1^i\right\}\quad(6)$$

setzen und den Zuwachs, den $\overset{\alpha}{A}_\mu$ erhält, wenn darin i in $i+1$ übergeht, durch $\Delta.\overset{\alpha}{A}_\mu$ bezeichnen. Substituirt man diesen Ausdruck für $\overset{i}{B}_\alpha$ und die analogen für $\overset{i+1}{B}_\alpha$ und $\overset{i}{B}_{\alpha-1}$ in der aus (5) gezogenen Gleichung:

$$\overset{i+1}{B}_\alpha=(\alpha+1)\overset{i}{B}_\alpha+(i+\alpha+1)\overset{i}{B}_{\alpha-1}$$

und ordnet nach den Grundzahlen derjenigen Potenzen, in deren Exponenten i vorkömmt, so ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}
-(\alpha+1)\,\Delta.\overset{\alpha}{A}_0=0,\\
\overset{\alpha}{A}_1-\alpha\,\Delta.\overset{\alpha}{A}_1=(i+\alpha+1)\overset{\alpha-1}{A}_0,\\
2\overset{\alpha}{A}_2-(\alpha-1)\,\Delta.\overset{\alpha}{A}_2=2(i+\alpha+1)\overset{\alpha-1}{A}_1,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mu\overset{\alpha}{A}_\mu-(\alpha-\mu+1)\,\Delta.\overset{\alpha}{A}_\mu=\mu(i+\alpha+1)\overset{\alpha-1}{A}_{\mu-1},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\alpha\overset{\alpha}{A}_\alpha-\Delta.\overset{\alpha}{A}_\alpha=\alpha(i+\alpha+1)\overset{\alpha-1}{A}_{\alpha-1};
\end{array}\right\}\quad(7)$$

aus denen nach und nach geschlossen wurde:

$$\overset{\alpha}{A}_0 = 1,$$

$$\overset{\alpha}{A}_1 = i + 2\alpha + 1,$$

$$\overset{\alpha}{A}_2 = (i+2\alpha)(i+2\alpha-1) + \alpha - 1,$$

$$\overset{\alpha}{A}_3 = (i+2\alpha-1)(i+2\alpha-2)(i+2\alpha-3) + (\alpha-2)[3(i+2\alpha-2)+1],$$

$$\overset{\alpha}{A}_4 = (i+2\alpha-2)(i+2\alpha-3)(i+2\alpha-4)(i+2\alpha-5) + (\alpha-3)[6(i+2\alpha-3)(i+2\alpha-4) + 4(i+2\alpha-4) + 3\alpha - 7],$$

$$\overset{\alpha}{A}_5 = (i+2\alpha-3)(i+2\alpha-4)(i+2\alpha-5)(i+2\alpha-6)(i+2\alpha-7) + (\alpha-4)[10(i+2\alpha-4)(i+2\alpha-5)(i+2\alpha-6) + 10(i+2\alpha-5)(i+2\alpha-6) + 5(3\alpha-10)(i+2\alpha-6) + 25\alpha - 94],$$

u. s. f.

Es erhellet sogleich, nach welchem Gesetz die ersten Glieder dieser Ausdrücke gebildet sind. In Betreff derjenigen Aggregate, die der Reihe nach mit $\alpha-1$, $\alpha-2$, $\alpha-3$, $\alpha-4$ multiplicirt sind, ist zu bemerken, dass die Coefficienten der ersten Glieder, nämlich 1, 3, 6, 10, eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung bilden und daher durch $\binom{2}{2}$, $\binom{3}{2}$, $\binom{4}{2}$, $\binom{5}{2}$ dargestellt werden können. Die Coefficienten der zweiten Glieder 1, 4, 10 bilden eine arithmetische Reihe dritter Ordnung und sind daher $\binom{3}{3}$, $\binom{4}{3}$, $\binom{5}{3}$ zu schreiben. Schwieriger wird die Betrachtung der Coefficienten der dritten Glieder, welche nun schon α enthalten; diese lassen sich so darstellen:

$$\binom{4}{4}[3(\alpha-4)+5], \quad \binom{5}{4}[3(\alpha-5)+5],$$

so dass $\binom{\mu}{\mu}[3(\alpha-\mu)+5]$ ihr allgemeiner Ausdruck ist.

Durch diese Induction werden wir darauf geführt, folgende Formel zu versuchen:

$$\overset{\alpha}{A}_\mu = 1.2\ldots\mu \left\{ \binom{i+2\alpha-\mu+2}{\mu} + (\alpha-\mu+1) \sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=\mu-2} \binom{i+2\alpha-\mu-\varepsilon+1}{\mu-\varepsilon-2} \frac{K_\varepsilon}{1.2\ldots(\varepsilon+2)} \right\}, \quad (8)$$

wo der zu bestimmende Coefficient K_ε eine Function von $\alpha-\mu$ bezeichnet, die sich nicht verändert, wenn α und μ zugleich in $\alpha-1$ und $\mu-1$ übergehen. Um nun die betreffende Formel aus

(7) hierauf anwenden zu können, muss man dieselbe nach dem unter dem Zeichen Σ in (8) enthaltenen binomischen Coefficienten ordnen, welche sämmtlich im Zähler ihres Ausdrucks $i+2\alpha-2\mu+4$ als letzten Factor haben. Thut man dieses, so ist man berechtigt, in der reducirten Formel (7) jeden besondern Factor eines die Zahl i implicirenden binomischen Coefficienten gleich Null zu setzen, woraus die zur Bestimmung von K_0, K_1, K_2,... nöthigen Bedingungen sich ergeben werden. — Man erhält nun zunächst, indem man (8) nach i differenziirt,

$$\Delta.\overset{\alpha}{A}_\mu=1.2..\mu\Big\{\binom{i+2\alpha-\mu+2}{\mu-1}$$
$$+(\alpha-\mu+1)\sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=\mu-3}\binom{i+2\alpha-\mu-\varepsilon+1}{\mu-\varepsilon-3}\frac{K_\varepsilon}{1.2...(\varepsilon+2)}\Big\}.$$

Da aber die unter dem Summenzeichen enthaltenen binomischen Coefficienten als letzten Factor ihres Zählers $i+2\alpha-2\mu+5$ haben, so müssen sie in Summen solcher verwandelt werden, wie sie in (8) vorkommen. Nun ist

$$\binom{i+2\alpha-\mu-\varepsilon+1}{\mu-\varepsilon-3}=\sum_{\theta=\varepsilon+1}^{\theta=\mu-2}\binom{i-2\alpha-\mu-\theta+1}{\mu-\theta-2}.$$

Da nun für ein bestimmtes θ die andere laufende Zahl ε von 0 bis $\theta-1$ geht, so ist jetzt

$$\Delta.\overset{\alpha}{A}_\mu=1.2...\mu\Big\{\binom{i+2\alpha-\mu+2}{\mu-1}$$
$$+(\alpha-\mu+1)\sum_{\theta=1}^{\theta=\mu-2}\binom{i+2\alpha-\mu-\theta+1}{\mu-\theta-2}\sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=\theta-1}\frac{K_\varepsilon}{1.2...(\varepsilon+2)}\Big\}.$$

Ferner bekömmt man aus (8)

$$(i+\alpha+1)\overset{\alpha-1}{A}_{\mu-1}=1.2...(\mu-1).\Big\{(i+\alpha+1)\binom{i+2\alpha-\mu+1}{\mu-1}$$
$$+(\alpha-\mu+1)\sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=\mu-3}(i+\alpha+1)\binom{i+2\alpha-\mu-\varepsilon}{\mu-\varepsilon-3}\frac{K_\varepsilon}{1.2...(\varepsilon+2)}\Big\}.$$

Hier ist nun

$$(i+\alpha+1)\binom{i+2\alpha-\mu+1}{\mu-1}=\mu\binom{i+2\alpha-\mu+2}{\mu}$$
$$-(\alpha-\mu+1)\left[\binom{i+2\alpha-\mu+2}{\mu-1}-\binom{i+2\alpha-\mu+1}{\mu-2}\right],$$

$$(i+\alpha+1)\binom{i+2\alpha-\mu-\varepsilon}{\mu-\varepsilon-3}=(\mu-\varepsilon-2)\binom{i+2\alpha-\mu-\varepsilon+1}{\mu-\varepsilon-2}$$
$$-(\alpha-\mu-\varepsilon)\binom{i+2\alpha-\mu-\varepsilon}{\mu-\varepsilon-3};$$

also ist

$$\mu(i+\alpha+1)\overset{\alpha-1}{A}_{\mu-1}=1.2\ldots\mu\left\{\mu\binom{i+2\alpha-\mu+2}{\mu}\right.$$
$$-(\alpha-\mu+1)\left[\binom{i+2\alpha-\mu+2}{\mu-1}-\binom{i+2\alpha-\mu+1}{\mu-2}\right.$$
$$-\sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=\mu-2}(\mu-\varepsilon-2)\binom{i+2\alpha-\mu-\varepsilon+1}{\mu-\varepsilon-2}\frac{K_\varepsilon}{1.2\ldots(\varepsilon+2)}$$
$$\left.\left.+\sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=\mu-2}(\alpha-\mu-\varepsilon+1)\binom{i+2\alpha-\mu-\varepsilon+1}{\mu-\varepsilon-2}\frac{K_{\varepsilon-1}}{1.2\ldots(\varepsilon+1)}\right]\right\}.$$

Nach diesen Vorbereitungen giebt die Substitution der Ausdrücke für $\overset{\alpha}{A}_\mu, \Delta.\overset{\alpha}{A}_\mu, \overset{\alpha-1}{A}_{\mu-1}$ in der Formel (7) folgende Gleichung:

$$\mu\overset{\alpha}{A}_\mu-(\alpha-\mu+1)\Delta.\overset{\alpha}{A}_\mu-\mu(i+\alpha+1)\overset{\alpha-1}{A}_{\mu-1}$$
$$=1.2\ldots\mu.(\alpha-\mu+1)\left\{\binom{i+2\alpha-\mu+1}{\mu-2}[K_0-1]\right.$$
$$+\sum_{\theta=1}^{\theta=\mu-2}\binom{i+2\alpha-\mu-\theta+1}{\mu-\theta-2}.\left[\frac{K_\theta}{1.2\ldots(\theta+1)}-\theta\frac{K_{\theta-1}}{1.2\ldots(\theta+1)}\right.$$
$$\left.\left.-(\alpha-\mu+1)\sum_{\varepsilon=\theta}^{\varepsilon=\theta-2}\frac{K_\varepsilon}{1.2\ldots(\varepsilon+2)}\right]\right\}=0. \qquad (9)$$

Setzt man hier die Factoren der einzelnen binomischen Coefficienten der Null gleich, so ergeben sich folgende Gleichungen, in denen der Kürze wegen $\alpha-\mu+1=\beta$ gesetzt ist:

$$\left.\begin{aligned}&K_0=1,\\&K_1=1.K_0,\\&K_2=2K_1+\beta.3K_0,\\&K_3=3K_2+\beta(4K_1+4.3K_0),\\&K_4=4K_3+\beta(5K_2+5.4K_1+5.4.3K_0),\\&K_5=5K_4+\beta(6K_3+6.5K_2+6.5.4K_1+6.5.4.3K_0),\end{aligned}\right\}(9^{bis})$$

u. s. f.

Führt man die Rechnung wirklich aus, so findet man

$$\begin{aligned}&K_0=1,\\&K_1=1,\\&K_2=3\beta+2,\\&K_3=25\beta+6,\\&K_4=15\beta^2+190\beta+24,\\&K_5=315\beta^2+1526\beta+120,\end{aligned}$$

u. s. f.

Wenn $H_n = \frac{K_n}{1.2.3\ldots n}$ gesetzt wird, so hat man zur Bestimmung der Grössen H in Function von β folgende Recursionsformel:

$$\left.\begin{array}{l} H_0 = 1,\ H_1 = 1, \\ H_{n+1} = H_n + (n+2)\beta\left(\frac{H_0}{1.2} + \frac{H_1}{2.3} \ldots + \frac{H_i}{(i+1)(i+2)} \ldots + \frac{H_{n-1}}{n(n+1)}\right) \end{array}\right\} \quad (10)$$

Die Entwickelung von H_n nach den steigenden Potenzen von β sei:

$$H_n = \overset{n}{b}_0 + \overset{n}{b}_1 \beta + \overset{n}{b}_2 \beta^2 \ldots + \overset{n}{b}_\mu \beta^\mu + \ldots. \quad (11)$$

Aus der Recursionsformel (10) folgt sogleich

$$\overset{n}{b}_0 = 1, \quad (12)$$

und wenn wir abkürzend

$$\varphi(n+1) - \varphi(n) = \Delta\varphi(n) \text{ und } \varphi(1) + \varphi(2) \ldots + \varphi(n) = \int\varphi(n)$$

setzen, wo dann $\int\varphi(0) = 0$ zu nehmen ist, so folgt aus (10) für $\mu > 0$ die Differenzengleichung:

$$\Delta\, \frac{\Delta \overset{n}{b}_\mu}{n+2} = \frac{\overset{n}{b}_{\mu-1}}{(n+1)(n+2)}, \quad (13)$$

in welcher $\overset{0}{b}_\mu = 0$, $\Delta\overset{0}{b}_\mu = 0$ zu nehmen ist, deren Integral somit durch die Gleichung

$$\overset{n}{b}_\mu = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \int \frac{\overset{n-1}{b}_{\mu-1}}{n(n+1)} - \int \frac{n+2}{2n} \overset{n-1}{b}_{\mu-1} \quad (14)$$

dargestellt ist. Vollzieht man die Integration für $\mu = 1$, so erhält man

$$\overset{n}{b}_1 = \frac{n(n+1)}{2} - \int \frac{1}{n}. \quad (15)$$

Für $\mu = 2$, $\mu = 3$ liefert die Integration ebenfalls:

$$\overset{n}{b}_2 = \binom{n+2}{3} - \binom{n+1}{2} \int \frac{1}{n} + \int \frac{1}{n} \int \frac{1}{n-1},$$

$$\overset{n}{b}_3 = \left\{\frac{1}{2}\binom{n+3}{4} + \frac{1}{2}\binom{n+2}{3}\right\} - \binom{n+2}{3} \int \frac{1}{n}$$
$$+ \binom{n+1}{2} \int \frac{1}{n} \int \frac{1}{n-1} - \int \frac{1}{n} \int \frac{1}{n-1} \int \frac{1}{n-2}.$$

Setzen wir nun der Abkürzung wegen

$$\int\frac{1}{n}=\overset{n}{S}_1,\ \int\frac{1}{n}\int\frac{1}{n-1}=\overset{n}{S}_2,\ \int\frac{1}{n}\int\frac{1}{n-1}\int\frac{1}{n-2}=\overset{n}{S}_3,\text{ u.s.f}$$

so dass

$$\left(1+\frac{z}{1}\right)\left(1+\frac{z}{2}\right)\left(1+\frac{z}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{z}{n}\right)$$
$$=1+\overset{n}{S}_1 z+\overset{n}{S}_2 z^2+\overset{n}{S}_3 z^3\ldots+\overset{n}{S}_n z^n$$

wird, und

$$\overset{n}{a}_0=1,\ \overset{n}{a}_1=\binom{n+1}{2},\overset{n}{a}_2=\binom{n+2}{3},\ \overset{n}{a}_3=\tfrac{1}{2}\binom{n+3}{4}+\tfrac{1}{3}\binom{n+2}{3},$$

so haben wir die Gleichungen

$$\overset{n}{b}_0=\overset{n}{a}_0\overset{n}{S}_0,$$
$$\overset{n}{b}_1=\overset{n}{a}_1\overset{n}{S}_0-\overset{n}{a}_0\overset{n}{S}_1,$$
$$\overset{n}{b}_2=\overset{n}{a}_2\overset{n}{S}_0-\overset{n}{a}_1\overset{n}{S}_1+\overset{n}{a}_0\overset{n}{S}_2,$$
$$\overset{n}{b}_3=\overset{n}{a}_3\overset{n}{S}_0-\overset{n}{a}_2\overset{n}{S}_1+\overset{n}{a}_1\overset{n}{S}_2-\overset{n}{a}_0\overset{n}{S}_3;$$

wesshalb die Vermuthung entsteht, es möchte überhaupt

$$\overset{n}{b}_\mu=\sum_{i=0}^{i=\mu}(-1)^{\mu-i}\overset{n}{a}_i\overset{n}{S}_{\mu-i},\tag{16}$$

wo $\overset{n}{a}_i$ eine ganze Function $(i+1)$ten Grades von n bezeichnet, die für $i>1$ durch $n(n+1)(n+2)$ theilbar ist, die allgemeine Form der Grössen $\overset{n}{b}_\mu$ sein. Um die Richtigkeit dieser Vermuthung zu prüfen, müssen wir nachsehen, ob die Gleichung (13), wenn bis zu einem gewissen Werthe von μ die Gleichung (16) verificirt worden ist, für den unmittelbar folgenden Werth von μ wiederum einen Ausdruck von der Form (16) als Aequivalent der Grösse $\overset{n}{b}_\mu$ gebe. Zu diesem Zwecke substituiren wir die Formel (16) in der Differenzengleichung (13) und ordnen das Ganze nach den transcendenten Functionen $\overset{n}{S}_{\mu-i}$. Da nun $\Delta\overset{n}{S}_{\mu-i}=\frac{1}{n+1}\overset{n}{S}_{\mu-i-1}$, und daher

$$\Delta.\overset{n}{a}_i\overset{n}{S}_{\mu-i}=\frac{\overset{n+1}{a_i}}{n+1}\overset{n}{S}_{\mu-i-1}+\Delta\overset{n}{a}_i.\overset{n}{S}_{\mu-i}$$

ist, so wird

$$\overset{n}{\Delta b_\mu} = \Sigma(-1)^{\mu-i}\left(\overset{n}{\Delta a_i} - \frac{\overset{n+1}{a_{i-1}}}{n+1}\right)\overset{n}{S}_{\mu-i},$$

und die Gleichung (13) erhält die Gestalt:

$$\Sigma(-1)^{\mu-i}\left\{\Delta\frac{\overset{n}{\Delta a_i} - \frac{1}{n+1}\overset{n+1}{a_{i-1}}}{n+2} - \frac{1}{n+1}\cdot\frac{\Delta\overset{n+1}{a_{i-1}} - \frac{1}{n+2}\overset{n+2}{a_{i-2}}}{n+3}\right\}\overset{n}{S}_{\mu-i}$$

$$= \Sigma(-1)^{\mu-i}\frac{\overset{n}{a_{i-1}}}{(n+1)(n+2)}\overset{n}{S}_{\mu-i}.$$

Da hier die entsprechenden Coefficienten der Functionen S gleich sein müssen, so folgt:

$$\Delta\frac{\overset{n}{\Delta a_i}}{n+2} = \Delta\frac{\overset{n+1}{a_{i-1}}}{(n+1)(n+2)} + \frac{\overset{n+1}{\Delta a_{i-1}}}{(n+1)(n+3)} + \frac{\overset{n}{a_{i-1}}}{(n+1)(n+2)}$$

$$- \frac{\overset{n+2}{a_{i-2}}}{(n+1)(n+2)(n+3)}. \quad (17)$$

Ueber die Anfangswerthe der Functionen $\overset{n}{a_i}$ und $\overset{n}{\Delta a_i}$ ist Folgendes zu bemerken. Da $\overset{0}{S}_\mu = 1$ oder 0 wird, jenachdem $\mu = 0$ oder > 0 ist, und da $\overset{1}{S}_\mu = 1$ oder 0 wird, jenachdem $\mu = 0$, 1 oder > 1 ist, so ist auch überhaupt $\overset{0}{b}_\mu = \overset{0}{a}_\mu$ und für $\mu > 0$ insbesondere $\overset{1}{b}_\mu = \overset{1}{a}_\mu - \overset{1}{a}_{\mu-1}$. Für $\mu > 0$ ist aber $\overset{0}{b}_\mu = \overset{1}{b}_\mu = 0$, dagegen ist $\overset{0}{b}_0 = 1$; folglich ist auch $\overset{0}{a}_0 = 1$ und, wenn $\mu > 0$ ist, $\overset{0}{a}_\mu = 0$, $\overset{1}{a}_\mu = \overset{1}{a}_{\mu-1} = \overset{1}{a}_0 = 1$; also ist für jedes ganze und positive (von Null verschiedene) μ

$$\overset{0}{a}_\mu = 0,\ \Delta\overset{0}{a}_\mu = 1.$$

Wenn also in der Gleichung (17) $i > 0$ ist, so hat die Function $\frac{\overset{n}{\Delta a_i}}{n+2}$ bei $n = 0$ den Anfangswerth $\frac{1}{2}$, denselben, den auch die Function $\frac{\overset{n+1}{a_{i-1}}}{(n+1)(n+2)}$ hat. Man darf daher als erstes Integral der Gleichung (17)

$$\frac{\overset{n}{\Delta a_i}}{n+2} - \frac{\overset{n+1}{a_{i-1}}}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \int\left(\frac{\overset{n}{\Delta a_{i-1}}}{n(n+2)} \ldots\right.$$

setzen, wo $\varphi(0)=0$ sein soll. Aus dieser Gleichung folgt

$$\Delta \overset{n}{a}_i = \frac{\overset{n+1}{a}_{i-1}}{n+1} + (n+2)\varphi(n);$$

und da $\overset{0}{a}_i$ verschwindet, so hat man als zweites Integral:

$$\overset{n}{a}_i = \int\left(\frac{\overset{n}{a}_{i-1}}{n} + (n+1)\varphi(n-1)\right). \qquad (19)$$

Nun denke man sich die ganze Function $\overset{n}{a}_i$ in Beziehung auf die in ihr enthaltene Variable n nach binomischen Coefficienten von der Form $\binom{n+m-1}{m}$ entwickelt, und setze daher

$$\overset{n}{a}_i = \sum_{m=3}^{m=i+1} \begin{bmatrix} i \\ m \end{bmatrix} \binom{n+m-1}{m}, \qquad (20)$$

wo $\begin{bmatrix} i \\ m \end{bmatrix}$ einen von n unabhängigen Factor bezeichnet. Da in den Gleichungen (18) und (19) die Grössen a_i, a_{i-1}, a_{i-2}, φ in linearer Form enthalten sind, so können wir untersuchen, welche Bestandtheile der Function $\overset{n}{a}_i$ ihre Entstehung irgend einem einzelnen in $\overset{n}{a}_{i-1}$ oder $\overset{n}{a}_{i-2}$ vorkommenden binomischen Coefficienten verdanken, und wenn dieses geschehen ist, durch eine auf alle Glieder von $\overset{n}{a}_{i-1}$ und $\overset{n}{a}_{i-2}$ ausgedehnte Summation den vollständigen Werth von $\overset{n}{a}_i$ berechnen, in welchem dann $\begin{bmatrix} i \\ m \end{bmatrix}$ als lineare und homogene Function der Factoren $\begin{bmatrix} i-1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} i-1 \\ 4 \end{bmatrix}$, ... $\begin{bmatrix} i-2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} i-2 \\ 4 \end{bmatrix}$, ... erscheinen wird. Die Berechnung kann unter anderm auf folgende Art geführt werden:

Es ist

$$\frac{\Delta \overset{n}{a}_{i-1}}{n(n+2)} + \frac{\overset{n-1}{a}_{i-1}}{n(n+1)}$$

$$= \frac{\overset{n}{a}_{i-1}}{n(n+1)} + \frac{\Delta \overset{n}{a}_{i-1}}{(n+1)(n+2)} - \frac{\Delta \overset{n-1}{a}_{i-1}}{n(n+1)}$$

$$+ \frac{\Delta \overset{n-1}{a}_{i-1} + \Delta^2 \overset{n-2}{a}_{i-1} + \Delta^3 \overset{n-3}{a}_{i-1} + \text{etc.}}{n(n+1)(n+2)}.$$

Wenn daher $\binom{n+m-1}{m}$ einen in $\overset{n}{a}_{i-1}$ vorkommenden binomischen Coefficienten bezeichnet, so entspringen aus demselben in $\Delta\varphi(n-1)$ die Glieder:

$$\frac{1}{(m-1)m}\binom{n+m-1}{m-2}+\frac{1}{(m-1)(m-2)}\binom{n+m-1}{m-3}$$

$$-\frac{1}{(m-2)(m-1)}\binom{n+m-2}{m-3}$$

$$+\sum_{\lambda=3}^{\lambda=m-1}\frac{1}{(\lambda-2)(\lambda-1)\lambda}\binom{n+\lambda-1}{\lambda-3}+\frac{\frac{1}{2}}{n}.$$

Durch Integration ergiebt sich als Bestandtheil von $\varphi(n)$ der Ausdruck

$$\frac{1}{(m-1)\,m}\binom{n+m}{m-1}+\frac{1}{(m-1)(m-2)}\binom{n+m-1}{m-3}$$

$$+\sum_{\lambda=3}^{\lambda=m-1}\frac{1}{(\lambda-2)(\lambda-1)\lambda}\binom{n+\lambda}{\lambda-2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{m-1}-\frac{1}{2}\int\frac{1}{m-3}$$

$$+\frac{1}{2}\overset{n}{S_1},$$

und hieraus als Bestandtheil von $(n+1)\varphi(n-1)+\frac{\overset{n}{a_{i-1}}}{n}$ das Aggregat

$$\frac{1}{m-1}\binom{n+m-1}{m-1}+\frac{1}{m-1}\binom{n+m-1}{m}+\frac{1}{m-1}\binom{n+m-2}{m-2}$$

$$+\sum_{\lambda=3}^{\lambda=m-1}\frac{1}{(\lambda-2)\lambda}\binom{n+\lambda-1}{\lambda-1}$$

$$+\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{m-1}-\frac{1}{2}\int\frac{1}{m-3}\right)(n+1)+\frac{n+1}{2}\overset{n-1}{S_1},$$

durch dessen Integration als Bestandtheil von $\overset{n}{a_i}$ sich ergiebt:

$$\frac{1}{m-1}\binom{n+m+1}{m+1}+\frac{1}{m-1}\binom{n+m-1}{m-1}$$

$$+\sum_{\lambda=3}^{\lambda=m-1}\frac{1}{(\lambda-2)\lambda}\binom{n+\lambda}{\lambda}+\left(-\frac{3}{4}-\frac{1}{m-1}-\frac{1}{2}\int\frac{1}{m-3}\right)\binom{n+2}{2}$$

$$-\frac{1}{2}\binom{n+1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{\frac{1}{2}}{m-1}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{m-2}+\frac{n(n+3)}{4}\overset{n}{S_1},\quad (21)$$

wo die binomischen Coefficienten mit Fleiss nicht auf die Form $\binom{n+\lambda-1}{\lambda}$, sondern auf die Form $\binom{n+\lambda}{\lambda}$ gebracht sind.

Auf ähnlichem Wege erhält man für den Bestandtheil von $\overset{n}{a_i}$, der aus dem beliebigen in $\overset{n}{a_{i-2}}$ vorkommenden binomischen Coefficienten $\binom{n+m-1}{m}$ herfliesst, den Ausdruck:

$$-\sum_{\lambda=3}^{\lambda=m}\frac{1}{(\lambda-2)\lambda}\binom{n+\lambda}{\lambda}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{m-2}\right)\binom{n+2}{2}$$
$$+\frac{1}{2}\binom{n+1}{1}-\frac{1}{2}\int\frac{1}{m}-\frac{n(n+3)}{4}\overset{n}{S}_1. \qquad (22)$$

Die Gleichung (20), wenn darin die Binomialcoefficienten auf die Form $\binom{n+k}{k}$ gebracht werden, verwandelt sich in

$$\overset{n}{a}_i=\left[{i \atop i+1}\right]\binom{n+i+1}{i+1}+\left(\left[{i \atop i}\right]-\left[{i \atop i+1}\right]\right)\binom{n+i}{i}+\cdots$$
$$+\left(\left[{i \atop k}\right]-\left[{i \atop k+1}\right]\right)\binom{n+k}{k}+\cdots$$
$$\cdots+\left(\left[{i \atop 3}\right]-\left[{i \atop 4}\right]\right)\binom{n+3}{3}-\left[{i \atop 3}\right]\binom{n+2}{2}.$$

Vergleicht man die von n unabhängigen Factoren in dieser Gleichung mit denen, welche sich in dem aus den Formeln (21) und (22) hergeleiteten Ausdrucke für $\overset{n}{a}_i$ ergeben, so erhält man folgende Gleichungen:

$$\left[{i \atop i+1}\right]=\frac{1}{i-1}\left[{i-1 \atop i}\right], \qquad (23)$$

$$\left[{i \atop i}\right]-\left[{i \atop i+1}\right]=\frac{1}{i-2}\left[{i-1 \atop i-1}\right], \qquad (24)$$

$$\left[{i \atop k}\right]-\left[{i \atop k+1}\right]=\frac{1}{k-2}\left[{i-1 \atop k-1}\right]+\frac{1}{k(k-2)}\Big\{(k-1)\left[{i-1 \atop k+1}\right]$$
$$+\left[{i-1 \atop k+2}\right]\cdots+\left[{i-1 \atop i}\right]-\left[{i-2 \atop k}\right]-\left[{i-2 \atop k+1}\right]\cdots-\left[{i-2 \atop i-1}\right]\Big\}, \qquad (25)$$

wofür k der Reihe nach $i-1,\ i-2, \ldots 4,\ 3$ zu setzen ist,

$$-\left[{i \atop 3}\right]=-\sum_{m=3}^{m=i}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{m-1}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{m-3}\right)\left[{i-1 \atop m}\right]$$
$$+\sum_{m=3}^{m=i-1}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{m-2}\right)\left[{i-2 \atop m}\right]+\frac{1}{2}\left[{i-1 \atop 3}\right] \qquad (26)$$

$$0=-\frac{1}{2}\sum_{m=3}^{m=i}\left[{i-1 \atop m}\right]+\frac{1}{2}\sum_{m=3}^{m=i-1}\left[{i-2 \atop m}\right], \qquad (27)$$

$$0=\sum_{m=3}^{m=i}\left(\frac{1}{2}-\frac{\frac{1}{2}}{m-1}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{m-2}\right)\left[{i-1 \atop m}\right]$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{m=3}^{m=i-1}\int\frac{1}{m}\cdot\left[{i-2 \atop m}\right], \qquad (28)$$

im Ganzen drei Gleichungen mehr als zur Bestimmung der-

Factoren $\begin{bmatrix} i \\ i+1 \end{bmatrix}, \ldots \begin{bmatrix} i \\ 3 \end{bmatrix}$ erfordert werden. Soll daher die Formel (16) sich halten können, so müssen die Gleichungen (26), (27) (28) als nothwendige Folgen der übrigen Gleichungen (23), (24), (25) sich nachweisen lassen. Vorher aber wollen wir die durch die Gleichung (25) festgesetzten Relationen möglichst vereinfachen. Wird nämlich der Kürze wegen [für $k=4, 5, .., .i$]

$$(k-2)\begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix} - (k-2)\begin{bmatrix} i \\ k+1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i-1 \\ k-1 \end{bmatrix} = \psi(i,k)$$

und im Besondern

$$(i-1)\begin{bmatrix} i \\ i+1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i-1 \\ i \end{bmatrix} = \psi(i,i+1), \begin{bmatrix} i \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i \\ 4 \end{bmatrix} = \psi(i,3)$$

gesetzt, so verwandelt sich die Gleichung (25) in

$$\psi(i,k) = \frac{1}{k}\{\psi(i-1,k+1) + \psi(i-1,\ k+2) \ldots + \psi(i-1,i)\} \quad (25^{bis})$$

und die Gleichungen (23) und (24) in

$$\psi(i,\ i+1) = 0,\ \psi(i,\ i) = 0;$$

also verschwinden in obiger Summe sogleich die zwei letzten Glieder $\psi(i-1,\ i)$ und $\psi(i-1,\ i-1)$; folglich werden auch $\psi(i, i-1)$ und $\psi(i,\ i-2)$ verschwinden. Wenn aber dem so ist, so müssen auch $\psi(i-1,\ i-2)$ und $\psi(i-1,\ i-3)$ verschwinden; folglich verschwinden wegen (25bis) auch $\psi(i,\ i-3)$ und $\psi(i,\ i-4)$. Setzt man dieses Verfahren weit genug fort, so folgt überhaupt, dass $\psi(i, k)$ verschwindet, welche der Zahlen $3, 4, \ldots i+1$ man auch für k substituiren mag. Wir haben also statt der Gleichungen (23), (24), (25) folgende einfacheren Relationen:

$$\left.\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} i \\ i+1 \end{bmatrix} = \frac{1}{i-1}\begin{bmatrix} i-1 \\ i \end{bmatrix}, \\
&\begin{bmatrix} i \\ i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i \\ i+1 \end{bmatrix} = \frac{1}{i-2}\begin{bmatrix} i-1 \\ i-1 \end{bmatrix}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i \\ k+1 \end{bmatrix} = \frac{1}{k-2}\begin{bmatrix} i-1 \\ k-1 \end{bmatrix}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\begin{bmatrix} i \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} i-1 \\ 3 \end{bmatrix}, \\
&\begin{bmatrix} i \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i \\ 4 \end{bmatrix} = 0;
\end{aligned}\right\} \quad (29)$$

aus denen sich durch Addition sogleich die Formel

$$\left[{i \atop k}\right] = \frac{1}{k-2}\left[{i-1 \atop k-1}\right] + \frac{1}{k-1}\left[{i-1 \atop k}\right] + \frac{1}{k}\left[{i-1 \atop k+1}\right]$$
$$\ldots + \frac{1}{i-1}\left[{i-1 \atop i}\right] \qquad (30)$$

ergiebt. Jetzt sind wir im Stande, die Richtigkeit der Gleichungen (26), (27) und (28) zu prüfen. Wenn wir nämlich in der vorliegenden Gleichung (30) für k nach und nach 3, 4, 5,.... i, $i+1$ setzen und dann addiren, so erhalten wir

$$\sum_{k=3}^{k=i+1}\left[{i \atop k}\right] = \sum_{k=3}^{k=i}\left[{i-1 \atop k}\right] = \left[{2 \atop 3}\right] = 1, \qquad (31)$$

wodurch die Gleichung (27) verificirt ist. In der Gleichung (28) lassen wir i in $i+1$ übergehen und multipliciren mit 2, so ergiebt sich:

$$\sum_{m=3}^{m=i+1}\left(1 + \int\frac{1}{m-2} - \frac{1}{m-1}\right)\left[{i \atop m}\right] = \sum_{m=3}^{m=i}\int\frac{1}{m}\cdot\left[{i-1 \atop m}\right].$$

Wenn wir nun hierin für $\left[{i \atop m}\right]$ den aus (30) sich ergebenden Werth substituiren, so erhält die Grösse $\frac{1}{k-1}\left[{i-1 \atop k}\right]$ als Factor die Summe

$$\sum_{m=3}^{m=k+1}\left(1 + \int\frac{1}{m-2} - \frac{1}{m-1}\right),$$

deren Werth $=(k-1)\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\ldots + \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k}\right)$ ist. Die linke Seite obiger Gleichung wird daher

$$\sum_{k=3}^{k=i}\int\frac{1}{k}\cdot\left[{i-1 \atop k}\right],$$

und ist somit mit der rechten Seite identisch. Hiedurch ist die Richtigkeit der Gleichung (28) bewiesen. Um endlich noch die Gleichung (26) zu verificiren, addiren wir zu derselben die Gleichung (28) und erhalten:

$$-\left[{i \atop 3}\right] = \frac{1}{2}\left[{i-1 \atop 3}\right] - \sum_{m=3}^{m=i}\left(\frac{1}{4} + \frac{\frac{3}{2}}{m-1} - \frac{\frac{1}{2}}{m-2}\right)\left[{i-1 \atop m}\right]$$
$$+ \sum_{m=3}^{m=i-1}\left(\frac{1}{4} - \frac{\frac{1}{2}}{m-1} - \frac{\frac{1}{2}}{m}\right)\left[{i-2 \atop m}\right]$$

Wenn wir nun hiezu noch die Gleichungen

$$\left[{i \atop 3}\right] = \sum_{m=3}^{m=i}\frac{1}{m-1}\left[{i-1 \atop m}\right],\ 0 = \tfrac{1}{4}\Sigma\left[{i-1 \atop m}\right] - \tfrac{1}{4}\Sigma\left[{i-2 \atop m}\right]$$

und

$$0 = -\tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} i-1 \\ 3 \end{bmatrix} + \tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m-1}\begin{bmatrix} i-2 \\ m \end{bmatrix}$$

addiren, so ergiebt sich mit Weglassung des Factors $\frac{1}{2}$:

$$0 = \Sigma\left(\frac{1}{m-2} - \frac{1}{m-1}\right)\begin{bmatrix} i-1 \\ m \end{bmatrix} - \Sigma\frac{1}{m}\begin{bmatrix} i-2 \\ m \end{bmatrix},$$

oder auch

$$0 = \begin{bmatrix} i-1 \\ 3 \end{bmatrix} - \sum_{k=2}^{k=i-} \frac{1}{k}\left(\begin{bmatrix} i-1 \\ k+1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i-1 \\ k+2 \end{bmatrix}\right)$$
$$- \sum_{k=3}^{k=i-1} \frac{1}{k}\begin{bmatrix} i-2 \\ k \end{bmatrix},$$

oder, da wegen (29)

$$\begin{bmatrix} i-1 \\ k+1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i-1 \\ k+2 \end{bmatrix} = \frac{1}{k-1}\begin{bmatrix} i-2 \\ k \end{bmatrix}$$

und überdiess

$$\frac{1}{k(k-1)} + \frac{1}{k} = \frac{1}{k-1}$$

ist, so ist

$$0 = \begin{bmatrix} i-1 \\ 3 \end{bmatrix} - \Sigma\frac{1}{k-1}\begin{bmatrix} i-2 \\ k \end{bmatrix},$$

welche Gleichung mit (30) übereinstimmt. Somit sind alle drei überzähligen Gleichungen (26), (27) und (28) nothwendige Folgen der übrigen, diesen unmittelbar vorhergehenden Gleichungen. Von nun an tritt die Gleichung (16) sammt allen ihren Consequenzen in volle Kraft.

Um einen independenten Ausdruck für die Grösse $\begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}$ zu bekommen, geben wir der allgemeinen Gleichung in (29) die Gestalt:

$$\Pi(k-2).\begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix} - \Pi(k-3).\begin{bmatrix} i-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{k-1}\left\{\Pi(k-1).\begin{bmatrix} i \\ k+1 \end{bmatrix}\right\}. \qquad (32)$$

Integrirt man diese Gleichung unter der Annahme, dass der Unterschied $i-k$ constant sei, so ergiebt sich:

$$\Pi(k-2).\begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix} = \frac{\Pi 2.\begin{bmatrix} i-k+3 \\ 4 \end{bmatrix}}{2} + \frac{\Pi 3.\begin{bmatrix} i-k+4 \\ 5 \end{bmatrix}}{3} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{\Pi(k-1).\begin{bmatrix} i \\ k+1 \end{bmatrix}}{k-1}. \qquad (33)$$

Für $k=i+1$ ist diese Formel nicht anwendbar. Es ist aber

$$\Pi(i-1).\begin{bmatrix} i \\ i+1 \end{bmatrix} = \Pi(i-2).\begin{bmatrix} i-1 \\ i \end{bmatrix} = \Pi 1.\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 1;$$

folglich

$$\Pi(i-2).\begin{bmatrix} i \\ i \end{bmatrix} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdots + \frac{1}{i-1} = \overset{i-2}{T_1},$$

$$\Pi(i-3).\begin{bmatrix} i \\ i-1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\overset{2}{T_1} + \frac{1}{3}\overset{3}{T_1} + \frac{1}{4}\overset{4}{T_1} \cdots + \frac{1}{i-2}\overset{i-2}{T_1} = \overset{i-3}{T_2}.$$

u. s. f,

Wenn überhaupt

$$\overset{n}{T}_{m+1} = \frac{1}{2}\overset{2}{T}_m + \frac{1}{3}\overset{3}{T}_m + \frac{1}{4}\overset{4}{T}_m \cdots + \frac{1}{n+1}\overset{n+1}{T}_m \text{ und } \overset{n}{T}_0 = 1$$

gesetzt wird, so ist

$$\begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix} = \frac{1}{\Pi(k-2)}\overset{k-2}{T}_{i-k+1}. \qquad (34)$$

Die Gleichung (20) kann nunmehr durch

$$\overset{n}{a_i} = \sum_{m=3}^{m=i+1} \frac{1}{\Pi(m-2)} \overset{m-2}{T}_{i-m+1} \binom{n+m-1}{m}$$

$$= \sum_{m=4}^{m=i+1} \frac{1}{\Pi(m-2)} \overset{m-3}{T}_{i-m+1} \binom{n+m}{m} - \overset{1}{T}_{i-2}\binom{n+2}{2} \qquad (35)$$

ersetzt werden.

Die Gleichungen (30) und (31) enthalten zwei die Functionen T betreffende Sätze, die ich hier noch einmal beweisen und mit zwei andern vermehren will. Aus der Definition der Functionen T ergiebt sich nämlich unmittelber die Gleichung

$$\overset{\lambda}{T}_{n-\lambda} = \overset{\lambda-1}{T}_{n-\lambda} + \frac{1}{\lambda+1}\overset{\lambda+1}{T}_{n-\lambda-1}.$$

Dividirt man diese Gleichung durch $\Pi\lambda$, so entsteht:

$$\frac{\overset{\lambda}{T}_{n-\lambda}}{\Pi\lambda} - \frac{\overset{\lambda+1}{T}_{n-\lambda-1}}{\Pi(\lambda+1)} = \frac{\overset{\lambda-1}{T}_{n-\lambda}}{\Pi\lambda},$$

wofür, wenn $\lambda = n$ wird,

$$\frac{\overset{n}{T}_0}{\Pi n} = \frac{\overset{n-1}{T}_0}{\Pi n}$$

zu setzen ist. Wenn man nun diese Gleichung von $\lambda = m$ bis $\lambda = n$ integrirt, so erhält man

$$\frac{\overset{m}{T}_{n-m}}{\Pi m} = \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} \frac{\overset{\lambda-1}{T}_{n-\lambda}}{\Pi \lambda}, \qquad \text{(I)}$$

was der Gleichung (30) entspricht. Der kleinste Werth, den hier m haben kann, ist $m=1$. Integrirt man diese Gleichung von $m=1$ bis $m=n$, so erhält man

$$\sum_{m=1}^{m=n} \frac{\overset{m}{T}_{n-m}}{\Pi m} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \lambda \frac{\overset{\lambda-1}{T}_{n-\lambda}}{\Pi \lambda} = \sum_{m=1}^{m=n-1} \frac{\overset{m}{T}_{n-1-m}}{\Pi m}$$

Also ändert sich der Werth der Summe $\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{1}{\Pi\lambda} \overset{\lambda}{T}_{n-\lambda}$ nicht, wenn auch darin $n-1$ für n gesetzt wird; folglich behält diese Summe immer denselben Werth, welche ganze positive Zahl für n auch substituirt wird. Nun wird für $n=1$ der Werth dieser Summe $\frac{1}{\Pi 1} \overset{1}{T}_0 = 1$; folglich ist überhaupt für jeden ganzen positiven Werth von n mit Einschluss der Null:

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} \frac{\overset{\lambda}{T}_{n-\lambda}}{\Pi \lambda} = 1. \qquad \text{(II)}$$

Dieses stimmt überein mit der Formel (31). Zwei neue Formeln, welche gelten, wenn a, m, n ganze und positive Zahlen sind, sind folgende:

$$\sum_{\lambda=a}^{\lambda=a+m} \frac{\overset{\lambda}{T}_n \overset{\lambda-1}{T}_{a+m-\lambda}}{\Pi \lambda} = \sum_{\lambda=a}^{\lambda=a+n} \frac{\overset{\lambda}{T}_m \overset{\lambda-1}{T}_{a+n-\lambda}}{\Pi \lambda}, \qquad \text{(III)}$$

welche zeigt, dass der vorliegende Ausdruck seinen Werth nicht ändert, wenn darin m und n vertauscht werden; und

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m} \frac{\overset{\lambda}{T}_n \overset{\lambda-1}{T}_{m-\lambda}}{\Pi \lambda} = \overset{1}{T}_{m+n-1}, \qquad \text{(IV)}$$

welche Formel zeigt, dass der Ausdruck links seinen Werth nicht ändert, wenn $m+n$ constant bleibt. Um die Formel (III) zu verificiren, setze ich auf der rechten Seite derselben

$$\frac{1}{\lambda} \overset{\lambda}{T}_m = \overset{\lambda-1}{T}_{m+1} - \overset{\lambda-2}{T}_{m+1},$$

ordne nach den Functionen $\overset{\lambda}{T}_{m+1}$, setze dann

$$\overset{\lambda}{T}_{a+n-1-\lambda}-\frac{1}{\lambda+1}\overset{\lambda+1}{T}_{a+n-2-\lambda}=\overset{\lambda-1}{T}_{a+n-1-\lambda}$$

und schaffe den einzigen negativen Term auf die linke Seite hinüber; auf diese Weise erhalte ich

$$\sum_{\lambda=a-1}^{\lambda=a+m}\frac{1}{\Pi\lambda}\cdot\overset{\lambda}{T}_n\overset{\lambda-1}{T}_{a+m-\lambda}=\sum_{\lambda=a-1}^{\lambda=a-1+n}\frac{1}{\Pi\lambda}\cdot\overset{\lambda}{T}_{m+1}\overset{\lambda-1}{T}_{a+n-1-\lambda}.$$

Diese Gleichung, die sich von (III) nur dadurch unterscheidet, dass a um 1 kleiner und m um 1 grösser geworden ist, ist mit jener zugleich gesetzt. Wenn daher eine Formel von der Form (III) wahr ist, so sind alle andern Formeln von derselben Form, in denen die Zahlen $a+m$ und n dieselben Werthe haben, auch wahr. Wenn wir aber in (III) respective $a+m$, 0, n für a, m, n setzen, so verwandelt sich jene Formel in

$$\frac{1}{\Pi(a+m)}\cdot\overset{a+m}{T}_n=\sum_{\lambda=a+m}^{\lambda=a+m+n}\frac{1}{\Pi\lambda}\overset{\lambda-1}{T}_{a+m+n-\lambda},$$

was mit (I) übereinstimmt, wenn dort $a+m+n$, $a+m$ respective für n, m gesetzt wird. Hiedurch ist die Richtigkeit der Formel (III) bewiesen. — Was nun die Formel (IV) betrifft, so leuchtet ihre Richtigkeit für $m=1$ sogleich ein. Wenn $m>1$ ist, so lässt sich auf ähnliche Weise wie vorhin zunächst zeigen, dass

$$\sum_{\lambda=2}^{\lambda=m}\frac{1}{\Pi\lambda}\overset{\lambda}{T}_n\overset{\lambda-1}{T}_{m-\lambda}=\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m-1}\frac{1}{\Pi\lambda}\overset{\lambda}{T}_{n+1}\overset{\lambda-1}{T}_{m-1-\lambda}$$

ist, wo die rechte Seite von der linken sich nur dadurch unterscheidet, dass n um 1 grösser und m um 1 kleiner geworden ist. Folglich bleibt der Ausdruck zugleich mit $m+n$ constant. Setzt man aber darin für m, n respective 1, $m+n-1$, so verwandelt er sich in $\overset{1}{T}_{m+n-1}$.

Mittelst der Gleichungen (4), (6), (8), (11), (16), (35) ist nun die Summe $\overset{n}{C}_i$ aller $i$fachen Producte, welche ohne Wiederholungen aus den Elementen 1, 2, 3, 4, ... $n-1$ gebildet werden können, wie auch die Summe $\overset{-n}{C}_i$ aller $i$fachen Producte, welche mit Wiederholungen aus den Elementen 1, 2, 3, ... n gebildet werden können, zwar als eine rationale ganze Function von n, vom $2i$ten Grade, aber in Beziehung auf i unter der Form einer sechsfachen Summe dargestellt, welche die transcendenten Functionen S und T implicirt. Indessen könnte K_ε oder H_ε, das in der gegebenen Entwickelung als dreifache Summe erscheint, unter der Voraussetzung, dass der absolute Werth von β kleiner als 1 sei, auf eine zweifache Summe zurückgebracht werden; denn aus der Natur der Gleichung (16) erhellt sogleich, dass H_ε das Product der beiden Reihen

$$1 - \overset{\varepsilon}{S}_1 \beta + \overset{\varepsilon}{S}_2 \beta^2 - \overset{\varepsilon}{S}_3 \beta^3 + \text{etc.},$$

$$1 + \overset{\varepsilon}{a}_1 + \beta + \overset{\varepsilon}{a}_2 \beta^2 + \overset{\varepsilon}{a}_3 \beta^3 + \text{etc.}$$

ist, von denen die erste dem Producte $\left(1-\frac{\beta}{1}\right)\left(1-\frac{\beta}{2}\right)\left(1-\frac{\beta}{3}\right) \ldots \left(1-\frac{\beta}{\varepsilon}\right)$ gleich ist. Da nun H_ε in Beziehung auf β vom Grade $\frac{\varepsilon}{2}$ oder $\frac{\varepsilon-1}{2}$ ist, je nachdem ε gerade oder ungerade ist, also jedenfalls den Grad ε des so eben genannten Products nicht erreicht, so kann die andere Reihe unter die Form

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\varepsilon} (-1)^{\lambda-1} \binom{\varepsilon}{\lambda} \frac{H_\varepsilon(\beta=\lambda)}{1-\frac{\beta}{\lambda}}$$

gebracht werden, aus welcher sogleich erhellt, dass diese Reihe

$$1 + \overset{\varepsilon}{a}_1 \beta + \overset{\varepsilon}{a}_2 \beta^2 + \overset{\varepsilon}{a}_3 \beta^3 + \text{etc. in inf.}$$

für $\beta < 1$ convergirt. Durch Vertauschung der Folge der Summationen erhält aber dieselbe Reihe die Gestalt

$$1 + \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{1}{\Pi(r-1)} \binom{\varepsilon+r}{r+1} \beta^r \left(\sum_{\lambda=}^{\lambda=\infty} \overset{r-1}{T}_\lambda \beta^\lambda \right), \qquad \text{(A)}$$

aus welcher bei dem gänzlichen Mangel negativer Glieder mit Nothwendigkeit folgt, dass auch die Reihe

$$1 + \overset{m}{T}_1 x + \overset{m}{T}_2 x^2 + \overset{m}{T}_3 x^3 + \text{etc. in inf.} \qquad \text{(a)}$$

convergirt, sobald x absolut kleiner als 1 ist, ein Ergebniss, von dem ein directer Beweis noch zu wünschen ist. Denn folgender Versuch führt nicht zum Ziele.

Die Zahl der in dem Aggregat T_i enthaltenen $i$fachen Producte beträgt $\frac{m\,(m+2i-1)\,(m+2i-2)\ldots(m+i+1)}{1.2.3\ldots.i}$, und der Werth des grössten Products ist $\frac{1}{2^i}$; folglich ist $\overset{m}{T}_i$ kleiner als $\frac{m\,(m+2i-1)\ldots(m+i+1)}{1.2\ldots.i} \cdot \frac{1}{2^i}$. Eine Reihe aber, die diesen Ausdruck zum Coefficienten der Potenz x^i hätte, würde convergiren, sobald $x < \frac{1}{2}$ wäre. Um so mehr wird also obige Reihe convergiren, wenn $x < \frac{1}{2}$ ist. — Die Sache ist jedoch leichter als es anfangs schien. Aus der Formel (II) folgt nämlich $\overset{m}{T}_i < \Pi m$. Also ist die Reihe (a) für $x < 1$ convergent, und ihr Werth kleiner als $\frac{\Pi m}{1-x}$.

Wenn man den Ausdruck (1) für $P^{(-n)}$ in Partialbrüche zerlegt, so erhält man

$$P^{(-n)} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} (-1)^{n-\lambda} \frac{\lambda^n}{\Pi\lambda . \Pi(n-\lambda)} \cdot \frac{1}{1-\lambda x}. \qquad (36)$$

Denkt man sich nun diese Partialbrüche in geometrische Reihen nach den steigenden Potenzen von x entwickelt, so ergiebt sich sogleich

$$\overset{-n}{C_i} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} (-1)^{n-\lambda} \frac{\lambda^{n+i}}{\Pi\lambda . \Pi(n-\lambda)}, \qquad (37)$$

wo die Summe rechts bekanntlich verschwindet, wenn für $n+i$ ein positiver und ganzer Exponent, der kleiner ist als n, gesetzt wird.

Bei dieser Gelegenheit möge erwähnt werden, dass die Summe

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} (-1)^{\lambda-1} \binom{n}{\lambda} \frac{1}{\lambda^i}$$

gleich ist der Summe aller $i$fachen Producte mit Wiederholungen, die aus den Elementen $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{n}$ gebildet werden können, ein Satz, der übrigens, wenn dieses Aggregat mit $\overset{n}{U_i}$ bezeichnet wird, leicht mittelst der Relation

$$\overset{n+1}{U_i} = \overset{n}{U_i} + \frac{1}{n+1} \overset{n+1}{U_{i-1}}$$

verificirt werden kann. Wenn i ohne Ende wächst, so nähert sich $\overset{n}{U_i}$ ohne Aufhören der Gränze n. — Die Sache kann noch allgemeiner gemacht werden. Es bezeichne $\overset{n}{V_i}$ die Summe aller $i$fachen Producte mit Wiederholungen, die aus den Elementen $\frac{1}{a+1}, \frac{1}{a+2}, \ldots \frac{1}{a+n}$ gebildet werden können, oder mit andern Worten, es sei

$$\frac{1}{\left(1-\frac{x}{a+1}\right)\left(1-\frac{x}{a+2}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{a+n}\right)}$$
$$= 1 + \overset{n}{V_1} x + \overset{n}{V_2} x^2 + \overset{n}{V_3} x^3 + \text{etc.},$$

so ist

$$\overset{n}{V_i} = \binom{a+n}{n} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} (-1)^{\lambda-1} \binom{n}{\lambda} \frac{\lambda}{(a+\lambda)^{i+1}}.$$

Aus dieser Gleichung folgt nun:

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n}(-1)^{\lambda}\binom{n}{\lambda}\frac{1}{(a+\lambda)^i}$$
$$=\frac{1}{a^i}\cdot\frac{1+\overset{n}{V}_1 a+\overset{n}{V}_2 a^2\ldots+\overset{n}{V}_{i-1}a^{i-1}}{\left(1+\frac{a}{1}\right)\left(1+\frac{a}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{a}{n}\right)},$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}(-1)^{\lambda-1}\binom{n}{\lambda}\frac{1}{(a+\lambda)^i}$$
$$=\frac{\overset{n}{V}_i+\overset{n}{V}_{i+1}a+\overset{n}{V}_{i+2}a^2+\ldots}{\left(1+\frac{a}{1}\right)\left(1+\frac{a}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{a}{n}\right)}.$$

Die Reihe (a) ist einer Verwandlung fähig, aus der man so gleich sieht, dass sie für $x<1$ convergirt. Es ist nämlich

$$\overset{n}{T}_m=\sum_{i=0}^{i=m}\frac{(-1)^i}{\Pi i}\overset{n+i+1}{U}_{m-i}=n\sum_{i=0}^{i=m}\frac{(-1)^i}{\Pi i}\frac{1}{n+i}\overset{n+i}{U}_{m-i}. \qquad \text{(V)}$$

Hieraus ergiebt sich durch Vertauschung der Folge der Summationen und indem man für die Reihen, welche U enthalten, ihre endlichen Werthe setzt:

$$\sum_{m=0}^{m=\infty}\overset{n}{T}_m x^m=\frac{1}{\left(1-\frac{x}{1}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)\ldots\left(1-\frac{x}{n}\right)\left(1-\frac{x}{n+1}\right)}$$
$$\times\left\{1-\frac{\frac{1}{\Pi 1}x}{1-\frac{x}{n+2}}+\frac{\frac{1}{\Pi 2}x^2}{\left(1-\frac{x}{n+2}\right)\left(1-\frac{x}{n+3}\right)}-\frac{\frac{1}{\Pi 3}x^3}{\left(1-\frac{x}{n+2}\right)\left(1-\frac{x}{n+3}\right)\left(1-\frac{x}{n+4}\right)}+\ldots\right\}$$
$$=\frac{1}{\left(1-\frac{x}{1}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)\ldots\left(1-\frac{x}{n}\right)}$$
$$\times\left\{1-\frac{\frac{n}{n+1}\frac{1}{\Pi 1}x}{1-\frac{x}{n+1}}+\frac{\frac{n}{n+2}\frac{1}{\Pi 2}x^2}{\left(1-\frac{x}{n+1}\right)\left(1-\frac{x}{n+2}\right)}-\text{etc. in inf.}\right\} \qquad \text{(VI)}$$

Wenn man den ersten der beiden hier gegebenen Ausdrücke in der Formel (A) substituirt und die Folge der Summationen

umkehrt, so erhält man unter Berücksichtigung der Relation $\sum_{r=1}^{r=\lambda}(-1)^{\lambda-r}\binom{\lambda-1}{r-1}\binom{\varepsilon+r}{r+1}=\binom{\varepsilon+1}{\lambda+1}$ als Ersatz der Gleichungen (11), (16), (35) folgende endliche Formel:

$$H_\varepsilon=\left(1-\frac{\beta}{1}\right)\left(1-\frac{\beta}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{\beta}{\varepsilon}\right)$$
$$+\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\varepsilon}\binom{\varepsilon+1}{\lambda+1}\frac{1}{\Pi(\lambda-1)}\beta^\lambda\left(1-\frac{\beta}{\lambda+1}\right)\left(1-\frac{\beta}{\lambda+2}\right)\cdots\left(\;-\frac{\beta}{\varepsilon}\right). \quad (38)$$

XXXIX.

Allgemeine Lehrsätze über Systeme von Kräften und ihrer Momente. Nach Chasles in Liouville's Journal. Mai et Juin 1847.

Von dem

Herrn Doctor J. Dienger,

Lehrer an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

---

1) Zwei Systeme von Kräften, die in beliebiger Anzahl vorhanden sein mögen, heissen aequivalent, wenn man ein System auf das andere, durch Zusammensetzung oder Zerlegung der Kräfte, zurückführen kann; oder, was das Nämliche ist, wenn die Kräfte beider Systeme, parallel mit sich selbst in einem Punkte angebracht, dort die gleiche Resultante geben und dadurch das nämliche resultirende Kräftepaar (couple) hervorbringen.

2) 1. Lehrsatz. Wenn man zwei beliebige Systeme von Kräften hat und multiplicirt jede Kraft des ersten Systems mit jeder des zweiten und mit dem Cosinus des Winkels der Richtungen beider Kräfte, so hat die Summe aller dieser Produkte in Bezug auf die genannten zwei Systeme den nämlichen Werth, als die Summe der ähnlichen Produkte in Bezug auf zwei Systeme von Kräften, die den ersten zwei aequivalent sind.

Seien $a, a', \ldots$ die Kräfte des einen, $b, b', \ldots$ die des andern der zwei Systeme; $A, A', \ldots$; $B, B', \ldots$ die Kräfte der aequivalenten Systeme; bezeichnen wir den Winkel der Richtungen der Kräfte a, b mit (a, b), so muss

$$\Sigma\Sigma ab\cos(a,b)=\Sigma\Sigma AB\cos(A,B)$$

sein, wo das eine Zeichen sich auf alle Kräfte b, B, das andere auf die a, A erstreckt. Betrachten wir zunächst das Glied $\Sigma ab\cos(a,b)$, wenn das Σ-Zeichen sich bloss auf die b erstreckt, so ist offenbar

$$\Sigma ab\cos(a,b)$$
$$=a[b\cos(a,b)+b'\cos(a,b')+b''\cos(a,b'')+\ldots.];$$

d. h. dieses Glied ist $=a$, multiplizirt mit der Summe der Projektionen aller Kräfte b auf a. Nun ist aber das System der Kräfte B mit dem der b aequivalent, somit ist

$$\Sigma b\cos(a,b)=\Sigma B\cos(a,B),$$

also auch

$$a\Sigma b\cos(a,b)=a\Sigma B\cos(a,B).$$

Ganz eben so findet sich:

$$B\Sigma a\cos(a,B)=B\Sigma A\cos(A,B).$$

Hieraus aber folgt leicht

$$\Sigma ab\cos(a,b)=\Sigma\Sigma aB\cos(a,B),$$
$$\Sigma\Sigma aB\cos(a,B)=\Sigma\Sigma AB\cos(A,B);$$

woraus endlich

$$\Sigma\Sigma ab\cos(a,b)=\Sigma\Sigma AB\cos(A,B),$$

was den zu beweisenden Lehrsatz ausspricht.

Anmerkung. Um die Gleichung $\Sigma b\cos(a,b)=\Sigma B\cos(a,B)$ zu beweisen, darf man sich die Kräfte b parallel mit sich selbst in einen Punkt der Richtung der Kraft a versetzt denken, und wird sie dort in eine einzige Kraft zusammensetzen können, deren Projektion auf a gleich $\Sigma b\cos(a,b)$ ist; sei diese Kraft $=\beta$, so ist also $\beta\cos(a,\beta)=\Sigma b\cos(a,b)$. Verfährt man eben so mit den Kräften B, so muss man die gleiche Resultante β erhalten, und es ist folglich auch $\beta\cos(a,\beta)=\Sigma B\cos(a,B)$, woraus nun die Gleichung folgt.

3) Nehmen wir an, es haben die Kräfte a, a',.... eine einzige Resultante A; die Kräfte b, b',.... eine einzige Resultante B; so wird man die Kräfte A, B statt der zwei Systeme A, A',....; B, B',.... setzen können, und also aus Lehrsatz I. (§. 2.) erhalten:

$$AB\cos(A,B)=\Sigma\Sigma ab\cos(a,b).$$

4) Seien ferner die Kräfte b, b',.... durchaus die nämlichen wie a, a',...., so ist $A=B$, $(A,B)=0$ und es zerfällt $\Sigma\Sigma ab\cos(a,b)$ in Σa^2 und $2\Sigma\Sigma aa'\cos(a,a')$; folglich ist

$$A^2=\Sigma a^2+2\Sigma\Sigma aa'\cos(a,a'),$$

d. h. wenn mehrere Kräfte eine einzige Resultante haben, so ist

das Quadrat derselben gleich der Summe der Quadrate der einzelnen Kräfte, vermehrt um das Doppelte der Summe der Produkte dieser Kräfte, jedes einzelne Produkt gebildet aus zwei verschiedenen Kräften, multiplizirt mit dem Cosinus des Winkels ihrer Richtungen; oder in Zeichen:

$$A^2 = a^2 + a'^2 + a''^2 + a'''^2 + \dots \\ + 2aa' \cos(a, a') + 2aa'' \cos(a, a'') + 2aa''' \cos(a, a''') + \dots \\ + 2a'a'' \cos(a', a'') + 2a'a''' \cos(a', a''') + \dots \\ + 2a''a''' \cos(a'', a''') + \dots$$

5) II. Lehrsatz. Wenn man zwei Systeme von Kräftepaaren hat, und das Produkt des Momentes jedes Paars des ersten Systems mit dem Momente jedes Paars des zweiten Systems und mit dem Cosinus des Winkels der Ebenen beider Systeme bildet, so ist die Summe dieser Produkte von gleichem Werthe mit der Summe von ähnlichen Produkten in Bezug auf zwei aequivalente Systeme von Kräftepaaren.

Um Kräftepaare zusammenzusetzen oder zu zerlegen, errichtet man bekanntlich auf ihren Ebenen Senkrechte, gleich den Momenten der resp. Paare, betrachtet diese Senkrechten als Kräfte und setzt sie dann zusammen oder zerlegt sie. Diese Betrachtungen, verbunden mit Lehrsatz I., führen unmittelbar zu Lehrsatz II.

6) Ein System von Paaren m, m',.... kann immer zu einem einzigen Paare M, ein anderes System n, n',.... zu einem einzigen N zusammengesetzt werden; demnach ist, nach §. 5., analog §. 3.:

$$MN \cos(M, N) = \Sigma \Sigma mn \cos(m, n).$$

7) Sind m, m',.... identisch das Nämliche wie n, n',...., so ergiebt sich, wie §. 4.:

$$M^2 = \Sigma m^2 + 2\Sigma\Sigma mm' \cos(m, m').$$

8) Da das Moment einer Kraft in Bezug auf einen festen Punkt nichts Anderes ist als das Moment eines Kräftepaares, dessen Hebelarm die Senkrechte von jenem Punkte auf die Kraft ist und dessen beide Kräfte einzeln gleich der gegebenen Kraft sind, so folgt aus Lehrsatz II.:

III. Lehrsatz. Man habe zwei beliebige Systeme von Kräften, bilde die Momente der Kräfte des ersten Systems in Bezug auf einen festen Punkt, die Momente der Kräfte des zweiten Systems in Bezug auf einen andern festen Punkt, multiplizire jedes Moment des ersten Systems mit jedem des zweiten und mit dem Cosinus des Winkels der Ebenen der betreffenden zwei Momente: so behält die Summe aller dieser Produkte den nämlichen Werth, wenn man die zwei Systeme von Kräften durch zwei aequivalente Systeme ersetzt, und die Momente in Bezug auf die nämlichen festen resp. Punkte nimmt.

Alle Kräfte des ersten Systems können durch zwei Kräfte ersetzt werden, von denen die eine durch den ersten festen Punkt

geht. Das Moment der zweiten ist aequivalent den Momenten des ganzen Systems und bildet das resultirende Moment oder das Hauptmoment desselben. Es ist gleich der Summe der Projektionen aller Momente der Kräfte auf seine Ebene, welche letztere diejenige Ebene ist, für welche die Summe der Orthogonalprojektionen aller Momente ein Maximum ist. Sei M dieses Hauptmoment der Momente m, m',.... des ersten Systems, ebenso N das Hauptmoment der Momente n, n',.... des zweiten Systems; so ist

$$MN\cos(M,N) = \Sigma\Sigma mn\cos(m,n).$$

Sind die zwei Systeme identisch, so ergiebt sich:

$$M^2 = \Sigma m^2 + 2\Sigma\Sigma mm'\cos(m,m').$$

9) Es wirke ein System von n Kräften a; a',.... auf einen Körper, oder mehrere mit einander verbundene Körper, und man bringe in irgend einem Punkte n Paare gerade entgegengesetzt wirkender Kräfte an, von denen jedes Paar gleich und parallel einer der Kräfte a, a',.... ist; so kann man sich bekanntlich statt der n gegebenen Kräfte, in verschiedenen Punkten wirkend, dieselben n Kräfte an dem einen Punkte wirkend denken, verbunden mit n Kräftepaaren, deren resp. Momente (Intensitäten) gleich sind dem Momente jeder der n Kräfte in Bezug auf den angenommenen Punkt. Zwischen den n Kräften wird Gleichgewicht sein, wenn die Resultante derselben, sowie das resultirende Paar, Null ist, d. h. nach §. 4. und §. 7., wenn

$$\Sigma a^2 + 2\Sigma\Sigma aa'\cos(a,a') = 0,$$
$$\Sigma m^2 + 2\Sigma\Sigma mm'\cos(mm') = 0;$$

wo m, m',.... die Momente der Paare ausdrücken.

Diese beiden Gleichungen ersetzen die bekannten sechs Gleichungen des Gleichgewichts. Denn seien a_x, a_y, a_z die drei Komposanten von a, parallel mit drei auf einander senkrecht stehenden Koordinatenaxen, und zerlegt man eben so die Kräfte a',...., so ist offenbar die erste dieser zwei Gleichungen übereinstimmend mit

$$(a_x + a_x' + ...)^2 + (a_y + a_y' + ...)^2 + (a_z + a_z' + ...)^2 = 0,$$

d. h. mit

$$a_x + a_x' + ... = 0,\ a_y + a_y' + ... = 0,\ a_z + a_z' + ... = 0.$$

Ersetzt man eben so das Paar m durch seine drei Projektionen auf die drei Koordinatenebenen, m_x, m_y, m_z, so ist die zweite Gleichung übereinstimmend mit

$$(m_x + m_x' + ...)^2 + (m_y + m_y' + ...)^2 + (m_z + m_z' + ...)^2 = 0,$$

d. h. mit

$$m_x + m_x' + ... = 0,\ m_y + m_y' + ... = 0,\ m_z + m_z' + ... = 0;$$

welches die bekannten sechs Gleichungen des Gleichgewichts sind.

10) IV. **Lehrsatz.** Man habe zwei Systeme von Kräften, nehme das Moment einer jeden Kraft des ersten Systems in Bezug auf einen festen Punkt, multiplizire jedes dieser Momente mit jeder Kraft des zweiten Systems und mit dem Sinus des Winkels, den die Richtung der Kraft mit der Ebene des Momentes macht; so wird die Summe aller dieser Produkte den gleichen Werth behalten, wenn man die zwei Systeme von Kräften durch zwei ihnen resp. aequivalente ersetzt.

Seien a, a',.... die Kräfte des ersten Systems; m, m',.... ihre Momente in Bezug auf einen festen Punkt; b, b',.... die Kräfte des zweiten Systems. Seien ferner A, A',.... die Kräfte des dem ersten aequivalenten Systems; M, M',.... ihre Momente in Bezug auf denselben festen Punkt; B, B',.... die Kräfte des dem zweiten aequivalenten Systems: so muss

$$\Sigma\Sigma bm \sin(b,m) = \Sigma\Sigma BM \sin(B,M)$$

sein. Denn man ziehe durch den festen Punkt Gerade, welche Kräfte μ, μ',....; μ_1, μ_1',.... vorstellen, gleich den Momenten m, m',.... und M, M',...., und senkrecht sind auf den Ebenen dieser Momente, so werden diese Kräfte zwei aequivalente Systeme darstellen. Demnach hat man nach Lehrsatz I.:

$$\Sigma\Sigma b\mu \cos(b,\mu) = \Sigma\Sigma B\mu_1 \cos(B,\mu_1).$$

Aber es ist $\mu = m$, $\cos(b,\mu) = \sin(b,m)$; $\mu_1 = M$, $\cos(B,\mu_1) = \sin(B,M)$, woraus nun der Lehrsatz folgt.

11) Das Vorzeichen eines jeden Gliedes der Summe $\Sigma\Sigma bm \sin(b,m)$ hängt von dem Winkel ab, den die Richtung von b mit der Axe des Moments m (d. h. mit der Senkrechten auf der Ebene des Momentes) macht; die Richtung dieser Axe, über oder unter der Ebene des Moments, hängt von der Richtung der Kraft a ab. Denkt man sich diese Ebene unter dem Auge, so wird die Axe nach dem obern Theile des Himmels gerichtet sein, wenn die Kraft a nach einer bestimmten Richtung hin zu drehen sucht; dagegen nach dem untern Theile des Himmelgewölbes, wenn sie in entgegengesetzter Richtung zu drehen strebt. Man kann aber das Vorzeichen noch auf eine direktere Art bestimmen.

Denken wir uns nämlich zuerst die Axe des Moments m nach oben gerichtet, so wird $\sin(b,m)$ das $+$ oder $-$ Zeichen haben, je nachdem b, welche Kraft ihren Angriffspunkt in der Ebene des Moments haben möge, über oder unter derselben ist. Im erstern Falle wird ein Auge, das an dem einen Ende der Kraft b sich befindet und nach dem Angriffspunkte hinsieht, die Kraft a nach einer bestimmten Richtung hin zu drehen suchen sehen; im andern Falle in entgegengesetzter Richtung. (Im einen Falle z. B. wie die Zeiger einer Uhr, im andern entgegengesetzt.) Das Zeichen von $bm \sin(b,m)$ wird also bestimmt nach dem Sinne, in welchem ein Auge, das sich am Ende der Kraft b befindet und nach ihrem Angriffspunkte hinsieht, die Kraft a drehen sieht. Man überzeugt sich leicht, dass es eben so ist, wenn die Axe des Moments unter der Ebene des Momentes ist. Wir sagen also: Das Glied $bm \sin(b,m)$ hat das Zeichen $+$ oder $-$, je nachdem die Kraft a, gesehen von dem Ende der Kraft b (nach ihrem Angriffspunkte hin), in einem bestimmten Sinne zu drehen sucht (z. B. in dem Sinne

der Bewegung der Zeiger eines zugleich angesehenen Zifferblattes einer Uhr), oder im entgegengesetzten Sinne.

12) Das Volumen eines Tetraeders, welches zu entgegengesetzten Kanten die Geraden a, b, deren kürzeste Entfernung r ist, hat, ist gleich $\frac{abr \sin(a,b)}{6}$.

Es ist zuerst leicht einzusehen, dass, wenn man eine Kante eines Tetraeders in ihrer eigenen Richtung sich bewegen lässt, dadurch das Volumen desselben nicht geändert wird. Diess vorausgesetzt, lässt sich nun der Lehrsatz in folgender Art beweisen. Seien in Taf. V. Fig. 1. $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ die zwei entgegengesetzten Kanten. Durch α lege man eine Ebene, senkrecht auf $\beta\beta'$, von der wir voraussetzen, sie gehe durch den Anfangspunkt β (da man im andern Falle $\beta\beta'$ in seiner Richtung fortbewegen kann). Sei $\alpha\alpha''$ die Projektion von $\alpha\alpha'$ auf diese Ebene, βp eine Senkrechte von β auf $\alpha\alpha''$; diese Senkrechte ist gleich der kürzesten Entfernung r der beiden Kanten. Das Tetraeder, welches wir betrachten, ist seinem Volumen nach gleich dem über den Kanten $\beta\beta'$ und $\alpha\alpha''$ (als entgegengetzten Kanten), weil beide Tetraeder die drei Spitzen β, β', α gemeinschaftlich haben und die Spitzen α', α'' auf einer Linie liegen, die parallel ist zur Ebene der Punkte β, β', α. Nun hat das letzte Tetraeder zum Volumen:

$$\frac{\alpha\alpha''.\beta p}{2}\cdot\frac{\beta\beta'}{3}=\tfrac{1}{6}\alpha\alpha''.\beta\beta'.r=\tfrac{1}{6}\alpha\alpha'.\cos\alpha'\alpha\alpha''.\beta\beta'.r=\tfrac{1}{6}abr\sin(a,b),$$

wenn $\alpha\alpha'=a$, $\beta\beta'=b$. Dieser Ausdruck ist also auch das Volumen des in Frage stehenden Tetraeders, was den Lehrsatz beweist.

13) Das Tetraeder, welches über zwei Kräften, als entgegengesetzte Kanten desselben betrachtet, errichtet wird, hat ein Volumen gleich dem sechsten Theile des Produktes einer der Kräfte mit dem Momente der andern, in Bezug auf die erste genommen.

Denn das Tetraeder über $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ ist $\frac{\alpha\alpha'.\beta\beta'.r.\sin(\alpha\alpha',\beta\beta')}{6}$. Nun versteht man unter dem Momente der Kraft $\alpha\alpha'$ in Bezug auf die Kraft $\beta\beta'$ das Moment der Komponente dieser Kraft in einer auf $\beta\beta'$ senkrechten Ebene, genommen in Bezug auf den Punkt, wo diese Ebene die $\beta\beta'$ trifft. Dasselbe ist also $\alpha\alpha''.\beta p = \alpha\alpha''.r=\alpha\alpha'.r.\sin(\alpha\alpha',\beta\beta')$, was nun den Satz beweist.

Das Moment der Kraft $\alpha\alpha'$ in Bezug auf $\beta\beta'$ ist $\alpha\alpha''.\beta p$, gleich der doppelten Fläche des Dreiecks $\alpha\beta\alpha''$. Dieses Dreieck selbst ist die Projektion eines Dreiecks, dessen Grundlinie $\alpha\alpha'$ ist und dessen Spitze in $\beta\beta'$ sich befindet. Das Doppelte dieses Dreiecks aber ist das Moment der Kraft $\alpha\alpha'$ in Bezug auf jenen Punkt in $\beta\beta'$. Man kann also auch sagen:

Das Moment einer Kraft in Bezug auf eine Gerade ist die Projektion des Momentes der Kraft in Bezug auf einen Punkt der Geraden, wenn die Projektion auf eine Ebene geschieht, welche senkrecht auf der gegebenen Geraden steht.

14) V. Lehrsatz. Man habe zwei Systeme von Kräften, bilde über jeder Kraft des ersten Systems in Verbindung mit

je einer des zweiten, als entgegengesetzten Kanten, Tetraeder, so wird die Summe der Inhalte aller dieser Tetraeder unverändert bleiben, wenn man statt der zwei betrachteten Systeme zwei ihnen resp. aequivalente wählt.

Bezeichnen wir die Systeme, wie in §. 2., so ist

$$\Sigma\Sigma \text{ Tetr. } (a,b) = \Sigma\Sigma \text{ Tetr. } (A,B),$$

worin jedes Glied das Zeichen + oder − hat, je nachdem die eine Kraft, gesehen von dem Ende der andern, in einem bestimmten oder dem entgegengesetzten Sinne zu drehen strebt.

Beachtet man das in §. 13. Gesagte, so ist der Beweis ganz der gleiche, wie in §. 2. Denn es ist, wenn das Zeichen Σ sich bloss auf b bezieht,

$$\begin{aligned}\Sigma\text{Tetr. } (a,b) &= \frac{a}{6}\Sigma \text{ (der Momente von } b, b', \ldots \text{ in Bezug auf } a) \\ &= \frac{a}{6}\Sigma \text{ (,, \quad ,, \quad ,, } B, B', \ldots \text{ ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,,)} \\ &= \Sigma\text{Tetr. } (a,B).\end{aligned}$$

Eben so

$$\Sigma\text{Tetr.}(a,B) = \Sigma\text{Tetr.}(A,B),$$

wenn das Zeichen Σ sich auf a, A bezieht. Also

$$\Sigma\Sigma \text{ Tetr.}(a,b) = \Sigma\Sigma \text{ Tetr.}(a,B) = \Sigma\Sigma \text{ Tetr.}(A,B).$$

Was die Regel der Vorzeichen anbelangt, so ist zu merken, dass man in

$$\Sigma \text{ (der Momente von } b,\ b', \ldots \text{ in Bezug auf } a)$$

den einzelnen Gliedern das + oder − Zeichen geben muss, je nachdem die betreffende Kraft, gesehen vom Endpunkte von a aus, in einem bestimmten oder dem entgegengesetzten Sinne zu drehen strebt (§. 10.).

15) Gesetzt b, b',.... seien identisch die nämlichen wie a, a',.... und eben so B, B',.... wie A, A',...., so schliesst man:

Man habe zwei aequivalente Systeme von Kräften, so ist die Summe der Tetraeder, die man auf je zwei Kräften des ersten Systems, als entgegengesetzte Kanten betrachtet, bilden kann, gleich der Summe der Tetraeder, die man auf ähnliche Weise mit den Kräften des zweiten Systemes zu bilden im Stande ist.

Begreiflicher Weise gilt Alles, was von zwei aequivalenten Systemen gesagt ist, von zwei Systemen, die sich gegenseitig das Gleichgewicht halten.

16) Daraus folgt:

Wie man auch immer die Kräfte eines Systems von Kräften durch zwei Kräfte ersetze, so ist immer das Tetraeder über diesen zwei Kräften von gleichem Volumen.

17) Sind diese zwei Kräfte in einer Ebene, bilden also ein Paar oder reduziren sich auf eine einzige, so ist dieses Volumen Null. Also:

Die geometrische Bedingung, dass ein System von Kräften eine einzige Resultante habe oder sich auf ein Paar (couple) reduzire, ist, dass die Summe der Inhalte der Tetraeder, die man auf je zwei Kräften des Systems entgegengesetzter Kanten errichten kann, Null sei.

18) Wenn Kräfte mit einander im Gleichgewichte sind und man theilt sie in zwei Gruppen, so sind die Kräfte der einen Gruppe im Gleichgewichte mit denen der andern. Also nach §. 15.:

Wenn Kräfte mit einander im Gleichgewichte sind, so ist die Summe der Tetraeder, die man über mehreren derselben dadurch bilden kann, dass man je zwei als entgegengesetzte Kanten betrachtet, gleich der Summe der Tetraeder, die man auf gleiche Weise über den übrigen Kräften bilden kann.

19) Man schliesst hieraus:

Wenn vier Kräfte im Gleichgewichte sind, so ist das Volumen des Tetraeders, das auf die genannte Art über zweien derselben errichtet wird, gleich dem Volumen des Tetraeders über den andern zwei.

20) VI. Lehrsatz. Wenn zwei aequivalente Systeme von Kräften an demselben festen Körper angebracht sind und man giebt diesem Körper eine unendlich kleine Bewegung, bildet sodann das Produkt einer jeden Kraft mit dem Wege, den ihr Angriffspunkt im Sinne der Richtung der Kraft durchlaufen hat, so ist die Summe aller dieser Produkte für das eine System gleich der Summe derselben für das andere System.

Sei mm' der Weg des Angriffspunktes m von a, so ist $a.mm'.\cos(a,mm')$ das Glied in Bezug auf diese Kraft, das in $\Sigma a.mm'.\cos(a,mm')$ eintritt. Man muss also beweisen, dass diese Summe unverändert bleibt, wenn man $a, a',....$ durch ein aequivalentes System ersetzt.

Jede unendlich kleine Bewegung eines freien festen Körpers kann als aus zwei gleichzeitigen Bewegungen entstanden gedacht werden, von denen die eine eine Umdrehungsbewegung um eine bestimmte Gerade, die andere eine fortschreitende Bewegung ist. Seien $m\mu$, $m\mu'$ die zwei Komposanten der Bewegung von m, so ist $m\mu$ für jeden Punkt des Körpers verschieden, $m\mu'$ für alle gleich; ferner ist bekanntlich

$$mm'.\cos(a,mm') = m\mu\cos(a,m\mu) + m\mu'\cos(a,m\mu'),$$

woraus folgt:

$$\Sigma a.mm'.\cos(a,mm') = \Sigma a.m\mu.\cos(a,m\mu) + m\mu'.\Sigma a.\cos(a,m\mu').$$

Da $\Sigma a.\cos(a,m\mu')$ ungeändert bleibt, wenn $a, a',....$ durch ein aequivalentes System ersetzt wird, indem dieses Glied nur die

Summe der Projektionen von a, a',.... auf $m\mu'$ ausdrückt, so hat man diese Unveränderlichkeit nur von dem Gliede $\Sigma a.m\mu.\cos(a,m\mu)$ zu beweisen.

$m\mu$ ist der Weg von m, hervorgebracht durch eine Umdrehung um eine bestimmte Gerade. Sei nun r die Senkrechte von m auf diese Gerade, θ die Drehung, so ist $m\mu = r.\theta$. Nehmen wir an, eine Kraft, ausgedrückt durch θ, wirke nach jener Geraden, so ist ihr Moment in Bezug auf m gleich $r\theta$; also ist $a.m\mu.\cos(a,m\mu)$

$= a \times$ (dem Moment von θ in Bezug auf m) $\times \cos(a,m\mu)$,

$= a \times$ (der Projektion dieses Momentes auf eine Ebene, senkrecht auf a),

$= a \times$ (dem Moment der Kraft θ in Bezug auf a) (§. 13.)

$= 6$ Tetr. (a,θ).

Demnach

$$\Sigma a.m\mu.\cos(a,m\mu) = 6\Sigma \text{ Tetr. } (a,\theta).$$

Das letzte Glied ändert sich nicht, wenn man a, a',.... durch ein aequivalentes System ersetzt (§. 15.), indem, wenn a, a',....; A, A',.... aequivalent sind, es auch θ, a, a',....; θ, A, A',.... sein werden, und die Summen $\Sigma\Sigma$ Tetr. (a,a'), $\Sigma\Sigma$ Tetr. (A,A') ohnehin gleich sind; also ist diess auch für das erste der Fall was den Satz beweist.

21) Man kann auch sagen:

a.(Moment von θ in Bezug auf a)

$= \theta$.(Moment von a in Bezug auf θ),

was aus §. 13. unmittelbar folgt; und da die Summe der Momente von a, a',.... in Bezug auf eine Gerade θ konstant bleibt für jedes mit diesem aequivalente System, so folgt das so eben Bewiesene auch aus dieser Betrachtung.

22) Wenn die Kräfte a, a',.... im Gleichgewichte stehen, so kann man sie durch zwei gleiche und geradezu entgegengesetzte Kräfte ersetzen, woraus folgt, dass alsdann

$$\Sigma a.mm'.\cos(a,mm') = 0$$

ist. Diess ist das bekannte Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.

XL.

Ueber die Transformation der unabhängigen Veränderlichen in vielfachen Differentialen und Integralen.

Von dem
Herrn Doctor J. Dienger,
Lehrer an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

Seien $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ n unabhängige Veränderliche, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ n andere unabhängige Veränderliche, verbunden mit den ersten durch die n Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, \ldots x_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)=0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots x_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)=0, \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots x_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)=0; \end{array}\right\} \quad (1)$$

welche, der Kürze wegen, durch $f_1=0$, $f_2=0, \ldots f_n=0$ dargestellt werden mögen.

Man stellt nun die Aufgabe, aus dem bekannten Differential $\frac{\partial^n S}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}$, wo S eine Funktion von $x_1, x_2, \ldots x_n$ ist, das Differential $\frac{\partial^n S}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2 \ldots \partial \alpha_n}$ abzuleiten, worin $x_1, x_2, \ldots x_n$ durch ihre Werthe in $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, wie man sie aus (1) ableitet, ausgedrückt werden.

Sei

$$\frac{\partial^n S}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n} = U,$$

so ist U, der Annahme nach, eine bekannte Funktion von $x_1, x_2, \ldots \ldots x_n$. Nun ist:

$$\frac{\partial^n S}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n} = \frac{\partial}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial^{n-1} S}{\partial x_2 \partial x_3 \ldots \ldots \partial x_n} = \frac{\partial V}{\partial x_1},$$

wenn $\frac{\partial^{n-1}S}{\partial x_2 \partial x_3 \ldots \partial x_n} = V = \int U \partial x_1$ gesetzt wird. Um die Grösse $\frac{\partial V}{\partial x_1}$ zu erhalten, muss man aber in V bloss x_1 als veränderlich ansehen, und alle andern Grössen x_2, $x_3, \ldots x_n$ als konstant betrachten. Unter dieser Voraussetzung enthalten die Gleichungen (1) $n+1$ Veränderliche x_1, α_1, $\alpha_2, \ldots \alpha_n$. Obwohl nämlich x_2, $x_3, \ldots x_n$ auch Funktionen der Veränderlichen α_1, $\alpha_2, \ldots \alpha_n$ sind, so müssen diese Funktionen nun so beschaffen sein, dass sie sich nicht ändern, wenn α_1, $\alpha_2, \ldots \alpha_n$ dergestalt sich ändern, wie es die Aenderungsart von x_1 verlangt, d. h. mit anderen Worten, die einer Aenderung der Grösse x_1 korrespondirenden Aenderungen der $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ müssen so beschaffen sein, dass dadurch keine Aenderung in den Werthen von $x_2, \ldots x_n$ vor sich geht. Da die Anzahl der Gleichungen (1) n ist, so kann man also jetzt eine der $n+1$ Veränderlichen x_1, $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ als die unabhängige Veränderliche betrachten, z. B. α_1, und die andern n, also x_1, $\alpha_2, \ldots \alpha_n$, vermöge der Gleichungen (1) durch diese ausdrücken, so dass z. B. x_1 als blosse Funktion von α_1 erscheint. Demnach ist, nach bekannten Sätzen:

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1},$$

und es handelt sich bloss um die Bestimmung von $\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}$. Nun folgt aber, unter den so eben gemachten Voraussetzungen aus (1)

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_2}\frac{\partial \alpha_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_3}\frac{\partial \alpha_3}{\partial \alpha_1} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_n}\frac{\partial \alpha_n}{\partial \alpha_1} = -\frac{\partial f_1}{\partial \alpha_1},$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial f_n}{\partial \alpha_2}\frac{\partial \alpha_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial f_n}{\partial \alpha_3}\frac{\partial \alpha_3}{\partial \alpha_1} + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial \alpha_n}\frac{\partial \alpha_n}{\partial \alpha_1} = -\frac{\partial f_n}{\partial \alpha_1};$$

aus welchen Gleichungen sich ergiebt

$$\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} = -\frac{M_1}{N_1}.$$

Beachtet man aber das, was in Klügels Wörterbuche, Supplemente, Art. Elimination, hinsichtlich der Bestimmung einer Grösse aus n linearen Gleichungen gesagt ist, so wird man leicht einsehen, dass N_1 der gemeinschaftliche Nenner ist, der den Grössen k_1, $k_2, \ldots k_n$ zukommt, wenn sie aus folgenden Gleichungen bestimmt werden:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}k_1 + \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_2}k_2 + \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_3}k_3 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_n}k_n = 1,$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1}k_1 + \frac{\partial f_2}{\partial \alpha_2}k_2 + \frac{\partial f_2}{\partial \alpha_3}k_3 + \ldots + \frac{\partial f_2}{\partial \alpha_n}k_n = 1,$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial f_n}{\partial x_1}k_1 + \frac{\partial f_n}{\partial \alpha_2}k_2 + \frac{\partial f_n}{\partial \alpha_3}k_3 + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial \alpha_n}k_n = 1;$$

während M_1 der gemeinschaftliche Nenner der Grössen $k_1, \dots k_n$ sein würde, wenn sie bestimmt würden aus:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial f_1}{\partial \alpha_1} k_1 + \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_2} k_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_n} k_n = 1, \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial \alpha_1} k_1 + \frac{\partial f_n}{\partial \alpha_2} k_2 + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial \alpha_n} k_n = 1.\end{array}\right\} \quad (2)$$

Demnach hat man

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial^n S}{\partial \alpha_1 \partial x_2 \partial x_3 \dots \partial x_n} = \frac{\partial^n S}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} \times \left(-\frac{M_1}{N_1}\right) = -\frac{M_1 U}{N_1}. \quad (3)$$

In dieser Gleichung muss man in $-\frac{M_1 U}{N_1}$ sich x_1 durch $\alpha_1, \dots \alpha_n$, und sodann $\alpha_2, \dots \alpha_n$ durch $\alpha_1, x_2, \dots x_n$ ausgedrückt denken, was durch die Gleichungen (1) ermöglicht ist. Sonach enthält die Grösse $-\frac{M_1 U}{N_1}$ jetzt die n unabhängigen Veränderlichen $\alpha_1, x_2, x_3, \dots x_n$.

Nun ist

$$\frac{\partial^n S}{\partial \alpha_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} = \frac{\partial}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial^{n-1} S}{\partial \alpha_1 \partial x_3 \dots \partial x_n} = \frac{\partial V_1}{\partial x_2},$$

wenn

$$\frac{\partial^{n-1} S}{\partial \alpha_1 \partial x_3 \dots \partial x_n} = V_1 = \int -\frac{M_1 U}{N_1} \partial x_2$$

gesetzt wird.

Jetzt hat man also bloss x_2 als veränderlich anzusehen, während $\alpha_1, x_3, \dots x_n$ als konstant zu betrachten sind. Demnach enthalten die Gleichungen (1) jetzt die $n+1$ Veränderlichen $x_1, x_2, \alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_n$ und man kann n derselben als Funktionen einer von ihnen, z. B. α_2, betrachten. Daher ist

$$\frac{\partial V_1}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2}.$$

Durch die gleichen Betrachtungen, wie so eben, ergiebt sich:

$$\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2} = -\frac{M_2}{N_2},$$

worin N_2 der gemeinschaftliche Nenner der Grössen $k_1, \dots k_n$ ist, wenn sie bestimmt werden aus:

$$\begin{array}{l}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} k_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} k_2 + \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_3} k_3 + \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_4} k_4 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_n} k_n = 1, \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} k_1 + \frac{\partial f_n}{\partial x_2} k_2 + \frac{\partial f_n}{\partial \alpha_3} k_3 + \frac{\partial f_n}{\partial \alpha_4} k_4 + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial \alpha_n} k_n = 1;\end{array}$$

M_2 die analoge Grösse, bestimmt aus:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}k_1+\frac{\partial f_1}{\partial \alpha_2}k_2+\frac{\partial f_1}{\partial \alpha_3}k_3+\ldots+\frac{\partial f_1}{\partial \alpha_n}k_n=1,$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial f_n}{\partial x_1}k_1+\frac{\partial f_n}{\partial \alpha_2}k_2+\frac{\partial f_n}{\partial \alpha_3}k_3+\ldots+\frac{\partial f_n}{\partial \alpha_n}k_n=1.$$

Daraus folgt zunächst offenbar

$$M_2=N_1,$$

und sodann

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_2}=\frac{\partial^n S}{\partial \alpha_1\,\partial \alpha_2\,\partial x_3\ldots\partial x_n}=\frac{\partial^n S}{\partial \alpha_1\,\partial x_2\,\partial x_3\ldots\partial x_n}\cdot\left(-\frac{M_2}{N_2}\right)$$
$$=(-1)^2.\frac{M_1}{N_1}\frac{M_2}{N_2}U=(-1)^2\frac{M_1}{N_2}U,$$

in welcher Gleichung x_1, x_2 durch α_1, $\alpha_2,\ldots\alpha_n$ und sodann $\alpha_3,\ldots\alpha_n$ durch α_1, α_2, $x_3,\ldots x_n$ ausgedrückt gedacht werden müssen.

Wie man so weiter gehen kann, liegt klar vor, dessgleichen auch, dass immer ein Faktor des Zählers und Nenners sich auf heben; so dass man endlich erhält:

$$\frac{\partial^n S}{\partial \alpha_1\,\partial \alpha_2\ldots\partial \alpha_n}=(-1)^n\frac{M_1}{N_n}U, \tag{4}$$

in welcher Gleichung x_1, $x_2,\ldots x_n$ durch α_1, $\alpha_2,\ldots\alpha_n$ auszudrücken sind. Zugleich ist N_n der gemeinschaftliche Nenner von $k_1,\ldots k_n$, bestimmt aus:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial f_1}{\partial x_1}k_1+\frac{\partial f_1}{\partial x_2}k_2+\ldots+\frac{\partial f_1}{\partial x_n}k_n=1,\\&\frac{\partial f_2}{\partial x_1}k_1+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}k_2+\ldots+\frac{\partial f_2}{\partial x_n}k_n=1,\\&\vdots\\&\frac{\partial f_n}{\partial x_1}k_1+\frac{\partial f_n}{\partial x_2}k_2+\ldots+\frac{\partial f_n}{\partial x_n}k_n=1.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Ist demnach

$$\frac{\partial^n S}{\partial x_1\,\partial x_2\ldots\partial x_n}=U, \tag{6}$$

wo U eine bekannte Funktion von x_1, $x_2,\ldots x_n$ ist, so ist

$$\frac{\partial^n S}{\partial \alpha_1\,\partial \alpha_2\ldots\partial \alpha_n}=(-1)^n\frac{M}{N}U, \tag{7}$$

wenn α_1, $\alpha_2,\ldots\alpha_n$ neue unabhängige Veränderliche sind, die mit den ersten durch die Gleichungen (1) verbunden sind; wenn fer-

ner M, N die gemeinschaftlichen Nenner der Werthe von $k_1, \ldots k_n$ sind, wenn diese resp. aus den Gleichungen (2) und (5) bestimmt werden, und wenn man endlich in der zweiten Seite der Gleichung (7) die Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ durch $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ ausdrückt.

Unter gleichen Voraussetzungen folgt aus (6) und (7):

$$\iiint \cdots \int U \partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n = (-1)^n \iiint \cdots \int \frac{MU}{N} \partial \alpha_1 \partial \alpha_2 \ldots \partial \alpha_n. \quad (8)$$

Die Gränzen der Integrale nach $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ bestimmen sich nach denen der Integrale nach $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Hätten die Gleichungen (1) die Form:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = f_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n), \\ x_2 = f_2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n), \\ \vdots \\ x_n = f_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n); \end{array}\right\} \quad (9)$$

so wäre offenbar $N = 1$ in (7) und (8).

Es liegt nicht in unserer Absicht, Anwendungen des aufgestellten Satzes hier zu machen; dieselben sind ohnehin äusserst zahlreich. Wir wollten nur versuchen, den Satz selbst strenge zu begründen, da er höchst wichtig ist, und seine Begründung z. B. in den uns vorliegenden Vorlesungen von Moigno nicht über allen Einwürfen zu stehen scheint. Nur eine einzige Anwendung wollen wir auf die Umbildung des Integrals

$$\iiint \partial x \partial y \partial z,$$

das bekanntlich einen körperlichen Rauminhalt ausdrückt, machen, wenn x, y, z durch die Polarkoordinaten

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi\cos\psi, \quad z = r\sin\varphi\sin\psi$$

ausgedrückt werden. Hier ist $\alpha_1 = r$, $\alpha_2 = \varphi$, $\alpha_3 = \psi$; also sind die Gleichungen (2):

$$\begin{array}{l} \cos\varphi . k_1 - r\sin\varphi . k_2 = 1, \\ \sin\varphi\cos\psi . k_1 + r\cos\varphi\cos\psi . k_2 - r\sin\varphi\sin\psi . k_3 = 1, \\ \sin\varphi\sin\psi . k_1 + r\cos\varphi\sin\psi . k_2 + r\sin\varphi\cos\psi . k_3 = 1; \end{array}$$

woraus $M = r^2 \sin\varphi$ folgt; da $N = 1$ ist, so ist also:

$$\iiint \partial x \partial y \partial z = \iiint r^2 \sin\varphi \partial r \partial\varphi \partial\psi,$$

$$\iiint F(x, y, z) \partial x \partial y \partial z$$

$$= \iiint F(r\cos\varphi, r\sin\varphi\cos\psi, r\sin\varphi\sin\psi) r^2 \sin\varphi \partial r \partial\varphi \partial\psi,$$

wie bekannt.

XLI.

Ueber die Bedingungen, welche $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ erfüllen müssen, damit $\varphi(x,y)+i\psi(x,y)=F(x+iy)$.

Von dem
Herrn Doctor J. Dienger,
Lehrer an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

Sei $f(x,y)$ eine Funktion der beiden Grössen x, y, die wir als von einander unabhängig betrachten wollen, welche der Bedingung

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

identisch entspricht, so ist

$$f(x,y)=F(x+y),$$

ein Satz, der an und für sich klar ist.

Seien nun U, V zwei Funktionen der beiden unabhängigen Veränderlichen x, y, welche identisch folgenden Gleichungen genügen:

$$\frac{\partial V}{\partial x}=-\frac{\partial U}{\partial y},\quad \frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial y}; \qquad (1)$$

so ist

$$U+iV=F(x+iy).$$

Denn es ist immer

$$U+iV=\varphi(x,y),$$

also

$$\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}+i\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}.$$

Multiplizirt man die erste dieser Gleichungen mit i, subtrahirt sodann die zweite und beachtet die Gleichungen (1), so ergiebt sich:

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial.(iy)};$$

woraus folgt:

$$\varphi=F(x+iy),$$

also:

$$U+iV=F(x+iy). \qquad (2)$$

Umgekehrt aber auch, wenn die Gleichung (2) Statt hat, so findet auch (1) Statt. Denn aus (2) folgt:

$$\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial V}{\partial x}=F'(x+iy),$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}+i\frac{\partial V}{\partial y}=iF'(x+iy).$$

Demnach:

$$i\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial y}+i\frac{\partial V}{\partial y},$$

welche Gleichung die (1) nach sich zieht.

Man hat also folgenden Satz:

„Damit

$$\varphi(x,y)+i\psi(x,y)=F(x+iy),$$

ist nothwendig und hinreichend, dass identisch:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\varphi(x\,,\,y)}{\partial x}&=\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial y},\\ \frac{\partial\psi(x\,,\,y)}{\partial x}&=-\frac{\partial\varphi(x\,,\,y)}{\partial y}.\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

Und umgekehrt, wenn

$$F(x+iy)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y),$$

so finden die Gleichungen (3) Statt.“

XLII.

Ueber einige arithmetische Sätze.

Von dem
Herrn Professor Dr. O. Schlömilch
an der Universität zu Jena.

Dividirt man eine ganze positive Zahl m durch eine andere n, so sind der dabei herauskommende ganze Quotient (die grösste unter $\frac{m}{n}$ liegende ganze Zahl) und der Rest offenbar Funktionen von m und n. Die Form der letzteren war bisher nicht bekannt, und erst Herr Dr. Eisenstein hat dieselbe angegeben. Der genannte scharfsinnige Mathematiker stellt nämlich im 27sten Bande des Crelle'schen Journales S. 281. u. A. folgende Theoreme auf: für $\frac{m}{n}=q+\frac{r}{n}$ ist

$$q=\frac{m}{n}-\tfrac{1}{2}+\frac{1}{2n}\Sigma\sin\frac{2km\pi}{n}\cot\frac{k\pi}{n},$$

$$r=\tfrac{1}{2}[n-\Sigma\sin\frac{2km\pi}{n}\cot\frac{k\pi}{n}];$$

wobei sich beide Summenzeichen auf die Werthe $k=1, 2, 3, \ldots, n-1$ beziehen. Da aber kein Beweis zu den obigen Formeln gegeben worden ist, so halte ich es nicht für überflüssig, einen solchen mitzutheilen, der noch ausserdem die Eigenthümlichkeit besitzt, eine Anwendung der Integralrechnung auf höhere Arithmetik darzubieten *).

Setzt man in dem bekannten Integrale

$$\int_0^\infty \frac{z^{\mu-1}\partial z}{1-z}=\pi\cot\mu\pi,\quad 1>\mu>0;$$

---

*) Diess ist übrigens nichts Neues, denn schon bereits seit längerer Zeit hat Herr Prof. Lejeune-Dirichlet dergleichen Anwendungen gezeigt, die, wie alle Arbeiten dieses Geometers, eine bewundernswerthe Feinheit beurkunden.

wovon sich ein strenger Beweis in Thl. II. S. 299. und Thl. III. S. 283. findet, $z=x^n$ und $\mu=\frac{k}{n}$, so wird für $k<n$

$$\int_0^\infty \frac{x^{k-1}dx}{1-x^n}=\frac{\pi}{n}\cot\frac{k\pi}{n},$$

und nach beiderseitiger Multiplikation mit

$$\frac{1}{2\pi}\sin\frac{2km\pi}{n}$$

erhält man hieraus

$$\frac{1}{2n}\sin\frac{2km\pi}{n}\cot\frac{k\pi}{n}=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{dx}{1-x^n}x^{k-1}\sin\frac{2km\pi}{n}.$$

Für $k=1, 2, 3, \ldots n-1$ und durch Summirung aller so entstehenden Gleichungen findet man noch

$$\frac{1}{2n}\Sigma\sin\frac{2km\pi}{n}\cot\frac{k\pi}{n}=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{dx}{1-x^n}X,$$

wobei X die Summe der Reihe

$$\sin\frac{2m\pi}{n}+x\sin\frac{4m\pi}{n}+x^2\sin\frac{6m\pi}{n}+\ldots+x^{n-2}\sin\frac{(2n-2)m\pi}{n}$$

bezeichnet. Diese Summe ist aber leicht zu finden. Denn setzt man in der Gleichung

$$\frac{1-u^n}{1-u}=1+u+u^2+\ldots+u^{n-1}$$

$u=\varrho(\cos\omega+\sqrt{-1}\sin\omega)$, so findet man durch Vergleichung der imaginären Partieen

$$\varrho\sin\omega+\varrho^2\sin2\omega+\varrho^3\sin3\omega+\ldots+\varrho^{n-1}\sin(n-1)\omega$$

$$=\frac{\varrho\sin\omega}{1-2\varrho\cos\omega+\varrho^2}+\frac{\varrho\sin(n-1)\omega-\sin n\omega}{1-2\varrho\cos\omega+\varrho^2}\varrho^n,$$

und für $\varrho=x$, $\omega=\frac{2m\pi}{n}$ ergiebt sich hieraus nach Division mit x und unter der Bemerkung, dass $\sin(n-1)\frac{2m\pi}{n}=-\sin\frac{2m\pi}{n}$ ist,

$$X=\frac{1-x^n}{1-2x\cos\frac{2m\pi}{n}+x^2}\sin\frac{2m\pi}{n};$$

und mithin wird nach dem Vorigen

$$\frac{1}{2n}\Sigma\sin\frac{2km\pi}{n}\cot\frac{k\pi}{n}=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\frac{dx}{1-2x\cos\frac{2m\pi}{n}+x^2}\sin\frac{2m\pi}{n}.$$

Bevor wir weiter gehen, sind noch einige Bemerkungen nöthig, welche zeigen, dass das Integral auf der rechten Seite verschiedene Formen annehmen kann. Da aus $\frac{m}{n}=q+\frac{r}{n}$ folgt $\frac{2m\pi}{n}=2q\pi+\frac{2r\pi}{n}$, und q immer eine ganze Zahl ist, so kann man die vorige Gleichung zunächst in folgender Gestalt darstellen:

$$\frac{1}{2n}\Sigma\sin\frac{2km\pi}{n}\cot\frac{k\pi}{n}=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\frac{dx}{1-2x\cos\frac{2r\pi}{n}+x^2}\sin\frac{2r\pi}{n}.$$

Da ferner $r<n$, so ist $2r<2n$, und mithin $\frac{2r\pi}{n}<2\pi$; es sind daher hinsichtlich des Bogens $\frac{2r\pi}{n}$ vier Fälle möglich, jenachdem derselbe im ersten, zweiten, dritten oder vierten Quadranten liegt. Diesen vier Fällen entsprechen die vier Suppositionen

$$\frac{2r\pi}{n}=\varphi_1,\ \pi-\varphi_2,\ \pi+\varphi_3,\ 2\pi-\varphi_4;$$

wo jeder der vier Bögen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ enthalten ist. Das Integral

$$R=\int_0^\infty\frac{dx}{1-2x\cos\frac{2r\pi}{n}+x^2}\sin\frac{2r\pi}{n}$$

nimmt demgemäss die vier Formen

$$\int_0^\infty\frac{\sin\varphi_1 dx}{1-2x\cos\varphi_1+x^2},$$
$$\int_0^\infty\frac{\sin\varphi_2 dx}{1+2x\cos\varphi_2+x^2},$$
$$-\int_0^\infty\frac{\sin\varphi_3 dx}{1+2x\cos\varphi_3+x^2},$$
$$-\int_0^\infty\frac{\sin\varphi_4 dx}{1-2x\cos\varphi_4+x^2}$$

an. Nun ist überhaupt

$$\int\frac{\sin\varphi dx}{1-2x\cos\varphi+x^2}=\operatorname{Arctan}\frac{x-\cos\varphi}{\sin\varphi}+\text{Const},$$

folglich

$$\int_0^\infty \frac{\sin\varphi dx}{1-2x\cos\varphi+x^2} = \text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\cot\varphi$$
$$= \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\tan\varphi\right),$$

und da für $\frac{\pi}{2} > \varphi > 0$, $\text{Arctantan}\,\varphi = \varphi$ ist *):

$$\int_0^\infty \frac{\sin\varphi dx}{1-2x\cos\varphi+x^2} = \pi - \varphi,$$

und ebenso leicht findet man

$$\int_0^\infty \frac{\sin\varphi dx}{1+2x\cos\varphi+x^2} = \varphi.$$

Benutzt man diess für die verschiedenen Formen von R, so erhält dieses Integral die vier Formen

$$R = \pi - \varphi_1,\ \varphi_2,\ -\varphi_3,\ -\pi+\varphi_4.$$

Nun war aber im ersten Falle $\varphi_1 = \frac{2r\pi}{n}$, im zweiten $\varphi_2 = \pi - \frac{2r\pi}{n}$, im dritten $\varphi_3 = \frac{2r\pi}{n} - \pi$ und im vierten $\varphi_4 = 2\pi - \frac{2r\pi}{n}$, und wenn man diese Werthe substituirt, so vereinigen sich die verschiedenen Formen von R zu der einzigen

$$R = \pi - \frac{2r\pi}{n},$$

und vermöge der Rolle, die das Integral R früher spielte, ist jetzt

$$\frac{1}{2n}\Sigma \sin\frac{2km\pi}{n}\cot\frac{k\pi}{n} = \tfrac{1}{2} - \frac{r}{n}.$$

Hieraus folgt unmittelbar

$$r = \tfrac{1}{2}\left[n - \Sigma\sin\frac{2km\pi}{n}\cot\frac{k\pi}{n}\right],$$

---

*) Dass die Funktionen $\text{Arctantan}\,\varphi$ und φ nur für $\frac{\pi}{2} > \varphi > 0$ aber sonst nicht identisch sind, ist leicht zu sehen. So ist z. B.

$$\text{Arctantan}(\pi+\varphi) = \text{Arctan}(-\tan\varphi)$$
$$= -\text{Arctan}\,\varphi = -\varphi,$$

und diess ist nicht einerlei mit $\pi+\varphi$. Um daher den Satz $\text{Arctantan}\,\varphi = \varphi$ anwenden zu können, muss man sich erst versichern, dass φ im ersten Quadranten liegt, und diese Nothwendigkeit führte oben die Unterscheidung der vier Fälle hinsichtlich $\frac{2r\pi}{n}$ herbei.

d. h. das zweite Theorem von Eisenstein; aus der Bemerkung, dass $\frac{m}{n}=q+\frac{r}{n}$, also $q=\frac{m}{n}-\frac{r}{n}$ war, ergiebt sich nun auch das erste:

$$q=\frac{m}{n}-\tfrac{1}{2}+\frac{1}{2n}\Sigma\sin\frac{2km\pi}{n}\cot\frac{k\pi}{n},$$

wobei immer $k=1,2,3,\ldots n-1$ ist.

XLIII.

Bemerkungen über die niedere Feldmesskunst, insbesondere über den allgemeineren Gebrauch des Rückwärtseinschneidens.

Von dem
Herrn Vermessungs-Revisor Nernst
zu Bessin auf der Insel Rügen.

Es ist, bei Detail-Vermessungen, die Lage eines durch Rückwärts-Einschneiden gefundenen Punktes leichter, schneller und sicherer zu cartiren, als ein auf irgend eine andere Weise im Freien bestimmter Punkt.

Bei Detail-Vermessungen ist es an sich schon vortheilhaft und zweckmässig, auch im nördlichen Deutschland wohl fast ohne Ausnahme ausführbar, durch die ganze aufzunehmende Flur wenigstens eine Hauptlinie zu legen. Man bezeichne darin alle 100, oder, wenn ein sehr zerschnittenes Terrain vorliegt, alle 50 Ruthen durch ein Signal, *A*, *B*, *C*, u. s. w. Auf dem Papier trage man die Hauptlinie auch auf und errichte in jedem Signalpunkte darauf genau eine Senkrechte.

Wenn man nun einen Punkt x (Taf. V. Fig. 2.) im Freien durch die möglichst kleinste Mühwaltung, nämlich durch Messung der beiden Winkel α und β, bei nur einmaliger Aufstellung des Instrumentes, also durch Rückwärtseinschneiden, bestimmt hat, so kann man auch auf dem Papier durch die denkbar einfachste Ver-

richtung die Lage des Punktes genau finden, und zwar durch nur zwei Abmessungen mit dem Zirkel. Nach dem Maassstabe, der der neuen Carte zum Grunde gelegt werden soll, und wonach hier AB und BC 100 Ruthen Entfernung haben, braucht man nur $CC' = \cot\beta$ und $AA' = \cot\alpha$ zu machen, an $A'C'$ ein Lineal zu legen, daran ein rechtwinkliges Dreieck, und dasselbe so weit hinzuschieben, dass die Schärfe desselben durch B geht, so ist x der gesuchte Punkt.

Für die Cotangenten sind aber bekanntlich schon gute Tabellen vorhanden, man braucht nur die Decimalstellen derselben entsprechend zu ändern.

Hält man den Gebrauch eines guten rechtwinkligen Dreiecks hier für noch nicht delicat genug, so braucht man nur auf dem Papiere ein für allemal eine Parallele mit AC, in dem Abstande gleich AC zu ziehen, und dann jedesmal $DE = CC' - AA'$ zu machen; es geht dann BxE rechtwinklig durch die Linie $A'xC'$ und der Punkt x ist durch zwei rechtwinklig sich schneidende Linien bestimmt.

Es giebt noch mehrere elegante, bisher noch nicht bekannt gewesene Constructionen des Punktes x. Taf. V. Fig. 3. enthält die Andeutung einer Construction, wobei zugleich Controle der Richtigkeit der Construction gegeben ist, in so fern der Punkt x durch drei sich schneidende Linien auf dem Papier gefunden wird. Die Leser dieses Archives erlassen mir gewiss gern den Beweis dieser an sich so sehr nahe liegenden Sätze.

Es ist für die Entwickelung der höheren Vermessungskunst gewiss schon vieles geleistet, verhältnissmässig weniger, scheint es, für die niedere. Diese berührt aber vielfach das innerste Leben des wichtigsten aller Gewerbe: der Landwirthschaft. Nach unserer, auf viele Erfahrung gestützten Ansicht muss die Praxis der niederen Feldmesskunst hiernach eine andere Gestalt gewinnen, da die so schöne Operation des Rückwärtseinschneidens eine bei weitem grössere, ja vielleicht eine ausschliessende Anwendung erlangen dürfte, auch besonders auf die Bestimmung der näheren Punkte des Details ganz allgemein würde ausgedehnt werden können. Bei Landesvermessungen ist es im Grunde so wesentlich nicht, wie viel Stunden die Bestimmung eines Punktes kostet. Bei der Aufnahme von Feldmarken aber, gegen die Remuneration von $1\frac{1}{3}$ Sgr. pro Morgen, wobei Tausende von Punkten festgelegt werden, die das Mein und Dein für die Zukunft documentiren sollen, ist die Ersparung von Zeit und Kraft von grösserer Wichtigkeit, um so mehr, als das, was durch die Methode gewonnen wird, wieder zur Erreichung einer grösseren Genauigkeit und Sicherheit durch bessere Instrumente u. s. w. verwendet werden kann. Bei der Aufnahme sehr vieler, sich auch nahe liegender Punkte wird sich übrigens der Gebrauch guter Sextanten hier empfehlen.

Dass es nicht nöthig ist, dass die Signale in der Hauptlinie, wonach man rückwärts einschneidet, gleich weit und 100 Ruthen von einander entfernt sind, erhellet leicht; man muss es nur so und kann es leicht so einrichten, dass man doch durch die Multiplication mit nur einer Ziffer die Länge der entsprechenden

Senkrechten findet. Lägen z. B. A, B, C, D, E und F in einer geraden Linie, wären 100 Ruthen von einander entfernt, und man könnte in irgend einem zu bestimmenden Punkte etwa B, D und E nicht sehen, so wären die entsprechenden Senkrechten für $A = 2.100 \cot g\,\alpha$ und für $F = 3.100 \cot g\,\beta$ lang.

Auch in grösserer Allgemeinheit, wenn A, B und C nicht in gerader Linie liegen und ungleich weit von einander entfernt sind, *aber wenn nur recht viele* Punkte cartirt und nicht mit Zahlen, sondern durch Zeichnung auf dem Papiere hergestellt werden sollen, ist die Methode von ausnehmender Wichtigkeit. Denn, wenn nämlich die Lage dreier Kirchthürme durch höhere Landvermessung gefunden wäre, und es sollte möglichst schnell und genau die ganze, vielleicht meilenweite Umgegend aufgenommen werden, so verlohnt es sich der Mühe von den Entfernungen AB, BC und AC tausendtheilige Maassstäbe zu entwerfen, wonach und womit man dann die vorhandenen Cotangenten-Tabellen auch hier ohne weiteres, ganz analog den beiden obigen Fällen, anwenden kann.

Von praktischer Wichtigkeit ist bei Detail-Vermessungen, dass man in der Ferne, nämlich von den aufzunehmenden Punkten aus, die Nummer oder die Identität der Signale A, B, C u. s. w. in der Hauptlinie genau erkennen kann. Man befestige also z. B. auf den Signalen kleine roth und weisse Flaggen, binde bei den ungeraden Nummern, also bei A, C, E u. s. w. das Rothe, bei den geraden das Weisse oben, und markire dann ausserdem noch nebenbei die je dritten Signale durch ein zweites Zeichen, z. B. ein Strohbündel, so kann man nie darin irren und also richtig die Signale wählen, welche die günstigsten Winkel gewähren. Bei Vernachlässigung der rechten Handgriffe ist schon oft eine gute Methode verkannt worden. Winkel unter 20° müssen bei genauen Detail-Vermessungen am besten ein für allemal ausgeschlossen werden, man kann sie auch sehr gut entbehren.

Nachschrift des Herausgebers.

Wenn auch die obigen Bemerkungen, was vielleicht mancher Leser vermissen wird, und wie man allerdings auch, wenn vorzugsweise von der niedern Feldmesskunst die Rede ist, wohl erwarten dürfte, keine rein-geometrische Auflösung der sogenannten Pothenot'schen Aufgabe über das Rückwärtseinschneiden durch blosse Construction (also namentlich auch ohne unmittelbaren Gebrauch des sogenannten verjüngten oder tausendtheiligen Maassstabes) enthalten, so verdienen dieselben doch gewiss alle Beachtung und weitere sorgfältige Prüfung, weil sie von einem Manne herrühren, welcher mit langjähriger vielfacher und höchst vielseitiger praktischer Erfahrung, namentlich auch im Bereiche der niedern Feldmesskunst, anerkannt sehr tüchtige theoretische mathematische Kenntnisse verbindet. Ich möchte daher wohl wünschen, dass die im Obigen niedergelegten Bemerkungen, namentlich von solchen, die ihrem Berufe nach sich viel mit der Ausführung praktischer Arbeiten zu beschäftigen haben, sorgfältig geprüft werden möchten, indem ich überzeugt bin, dass namentlich die bisher grösstentheils höchst handwerksmässig betriebene, und zum Theil noch ganz auf dem Standpunkte der

für ihre Zeit übrigens gar nicht zu verachtenden alten deutschen Feldmesser **Schwenter**, **Penther**, **Zollmann** u. s. w. stehende niedere Feldmesskunst noch mancher Vervollkommnungen nicht bloss bedarf, sondern auch fähig ist. Uebrigens halte ich mich für verpflichtet, zu bemerken, dass dieser Aufsatz schon seit dem 24. März d. J. in meinen Händen ist, und nur zufällige Umstände seinen Abdruck bis jetzt verzögert haben.

XLIV.

Untersuchungen über die Seiten und Winkel sphärischer Dreiecke, insbesondere in Bezug auf ihre Differentiale.

Dargestellt von dem

Herrn Dr. J. Ph. Wolfers,

astronomischem Rechner an der Königlichen Sternwarte zu Berlin.

§. 1. In jedem sphärischen Dreiecke ABC (Taf. V. Fig. 4.) hat man bekanntlich folgende Gleichungen:

$$\text{I)}\quad \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

$$\text{II)}\quad \sin a \sin B = \sin b \sin A,$$

$$^{*})\quad \sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A,$$

$$\text{III)}\quad \sin A \operatorname{cotg} B = \operatorname{cotg} b \sin c - \cos c \cos A,$$

$$^{**})\quad \sin A \cos b = \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a,$$

$$\text{IV)}\quad \cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a.$$

Die Gleichung (I) dient dazu, um die dritte Seite zu bestimmen, wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind. Sie ist symmetrisch und lässt sich sogleich dreifach hinschreiben, je nachdem man a, b oder c als die gesuchte Seite ansieht. Die Gleichung (II) dient dazu, um entweder eine Seite zu bestimmen, wenn eine zweite und zwei Winkel, oder einen Winkel, wenn zwei Seiten und ein Winkel gegeben sind. Hierbei sollen aber im ersten Falle die gegebenen Winkel nicht an der Seite liegen und im zweiten die Seiten den gegebenen Winkel nicht einschliessen. Mit andern Worten, es sollen die zwei Seiten und Winkel einander gegenüberliegen. Die Form dieser Gleichung ist zwar

sehr einfach, aber keineswegs symmetrisch in Bezug auf eine der darin enthaltenen vier Grössen, und sie lässt sich dreifach hinschreiben. Die Gleichung (*) und die Gleichung (**) ist nicht geeignet, um für sich betrachtet aus drei gegebenen Grössen eine vierte abzuleiten, indem in jeder fünf Stücke des Dreiecks enthalten sind. Beide Formeln, von denen sich jede sechsfach hinschreiben lässt, dienen aber sowohl zu manchen analytischen Umformungen, als auch im Verein mit den Gleichungen, welche wir mit Zahlen bezeichnet haben, um zwei gesuchte Stücke des Dreiecks auf einmal zu bestimmen.

Die Gleichung (III) lässt sich sechsfach hinschreiben und kann dazu dienen, wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel (b, c und A) gegeben sind, einen der beiden andern Winkel zu bestimmen. Sie ist ebenfalls nicht symmetrisch, weder in Bezug auf eine Seite, noch auf einen Winkel. Die Gleichung (IV) ist wieder symmetrisch in Bezug auf einen Winkel, und sie dient dazu, den dritten Winkel zu bestimmen, wenn die gegenüberliegende Seite nebst den beiden andern Winkeln gegeben sind. Diese Betrachtungen haben wir vorangeschickt, um uns darauf beziehen zu können, unsere Aufgabe soll aber nicht sein, aus drei gegebenen Stücken des Dreiecks die andern herzuleiten, sondern vielmehr die Differentiale der sechs Grössen mit einander zu vergleichen.

§. 2. Die Gleichung (I) ist symmetrisch in Bezug auf a, daher wird auch das Differential von a symmetrisch ausfallen. Differentiiren wir diese Gleichung, so erhalten wir unmittelbar

$$\alpha)\quad \sin a da = [\sin b \cos c - \cos b \sin c \cos A]\, db$$
$$+ [\sin c \cos b - \cos c \sin b \cos A]\, dc + \sin b \sin c \sin A dA;$$

also mit Benutzung von (*) und (II):

$$1)\quad da = \cos C db + \cos B dc + \sin c \sin B dA.$$

Diese Gleichung ist durchaus symmetrisch, da sie unverändert bleibt, wenn man b mit c und also auch B mit C vertauscht, und $\sin c \sin B = \sin b \sin C$ ist. Die Gleichung (I) wird sich daher auch sogleich dreifach hinschreiben lassen, je nachdem man da, db oder dc als unbekannt, oder vielmehr a, b oder c als abhängig veränderlich ansieht. Das zweite Differential von a wird ebenfalls durch einen symmetrischen Ausdruck dargestellt werden können. Differentiiren wir daher die Gleichung (α) noch einmal, so erhalten wir unmittelbar

$$\beta)\quad \sin a dda + \cos a da^2 = [\cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A]\, db^2$$
$$+ [\cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A]\, dc^2$$
$$- 2 [\sin b \sin c + \cos b \cos c \cos A]\, dbdc$$
$$+ 2 \sin b \sin c \cos A dA db$$
$$+ 2 \sin b \cos c \sin A dA dc$$
$$+ \sin b \sin c \cos A dA^2,$$

und da nach (I)

$$\cos a\, da^2 = \cos a \cos C^2 db^2 + \cos a \cos B^2 dc^2 + 2\cos a \cos B \cos C db dc$$
$$+ 2\cos a \sin B \cos C \sin c dA db + 2\cos a \sin c \sin B \cos B dA dc$$
$$+ \cos a \sin c^2 \sin B^2 dA^2,$$

mit Hülfe der Gleichung (I)

$$\gamma)\ \sin a dda = \cos a \sin C^2 db^2 + \cos a \sin B^2 dc^2$$
$$- 2[\sin b \sin c + \cos b \cos c \cos A + \cos a \cos B \cos C] db dc$$
$$+ 2\sin c[\cos b \sin A - \cos a \sin B \cos C] dA db$$
$$+ 2[\sin b \cos c \sin A - \cos a \sin c \operatorname{cin} B \cos B] dA dc$$
$$+ \sin c[\sin b \cos A - \cos a \sin c \sin B^2] dA^2.$$

Aber nach (I)

$$\sin b \sin c + \cos b \cos c \cos A + \cos a \cos B \cos C$$
$$= \sin b \sin c + \cos a \cos A - \sin b \sin c \cos A^2 + \cos a \cos B \cos C$$
$$= \sin b \sin c \sin A^2 + \cos a^2 \sin B \sin C \quad \text{(IV)}$$
$$= \sin B \sin C \sin a^2 + \cos a^2 \sin B \sin C \quad \text{(II)}$$
$$= \sin B \sin C.$$

Ferner

$$\cos b \sin A - \cos a \sin B \cos C = \cos B \sin C \quad (^{**}),$$
$$\sin b \cos c \sin A - \cos a \sin c \sin B \cos B$$
$$= \sin B \sin a \cos c - \cos a \sin c \sin B \cos B \quad \text{(II)}$$
$$= \sin b \sin B \cos C. \quad (^*)$$

Endlich

$$\sin b \cos A - \cos a \sin c \sin B^2 = \sin b \cos A - \sin b \sin C \cos a \sin B \quad \text{(II)}$$
$$= - \sin b \cos B \cos C. \quad \text{(IV)}$$

Substituirt man die eben gefundenen Werthe in die Gleichung (γ) und dividirt hierauf mit $\sin a$; so erhält man

$$2)\quad dda = \sin C^2 \operatorname{cotg} a db^2 + \sin B^2 \operatorname{cotg} a dc^2 - \frac{2\sin B \sin C}{\sin a} db dc$$
$$+ 2\sin A \cos B dA db + 2\sin A \cos C dA dc - \frac{\sin b \sin c \cos B \cos C}{\sin a} dA^2.$$

§. 3. Um die Gleichung (II) bequemer zu differentiiren, nehmen wir die Logarithmen beider Glieder, setzen also

$$\log \sin a + \log \sin B = \log \sin b + \log \sin A,$$

woraus unmittelbar durch Differentiation folgt:

$$3)\quad \operatorname{cotg} a da + \operatorname{cotg} B dB = \operatorname{cotg} b db + \operatorname{cotg} A dA.$$

Es ist gleichgültig, in Bezug auf welche der beiden Seiten oder Winkel man diese Gleichung auflösen will; das Resultat fällt nicht symmetrisch aus. Wir stellen daher auch nicht die Differentialgleichung zweiter Ordnung dar, theils weil nicht hervorgeht, welche drei Grössen man als urvariabel ansehen soll, theils weil das Differential zweiter Ordnung von einer Seite oder einem Winkel sich nur durch einen weitläufigen Ausdruck darstellen lässt. Um hiervon eine Andeutung zu geben, bemerken wir, dass z. B.

$$4)\ dda = \frac{\cos b^2 - \cos a^2}{\cos a^2 \sin b^2} db^2 + \frac{\cos A^2 - \cos a^2}{\cos a^2 \sin A^2} dA^2 - \frac{\cos B^2 - \cos a^2}{\cos a^2 \sin B^2} dB^2$$

$$+ \frac{2 \operatorname{cotg} b \operatorname{cotg} A}{\cos a^2} db dA - \frac{2 \operatorname{cotg} b \operatorname{cotg} B}{\cos a^2} db dB - \frac{2 \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B}{\cos a^2} dA dB$$

folgt.

§. 4. Wir gehen nun zur Gleichung (III) über, haben also

$$\sin A \operatorname{cotg} B = \operatorname{cotg} b \sin c - \cos c \cos A$$

zu differentiiren, und erhalten unmittelbar

$$\cos A \operatorname{cotg} B dA - \frac{\sin A}{\sin B^2} dB = -\frac{\sin c}{\sin b^2} db + \operatorname{cotg} b \cos c dc$$

$$+ \sin c \cos A dc + \cos c \sin A dA$$

oder

$$\delta)\ \frac{\sin A}{\sin B^2} dB = \frac{\cos A \cos B - \cos c \sin A \sin B}{\sin B} dA + \frac{\sin c}{\sin b^2} db$$

$$- \frac{\cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A}{\sin b} dc.$$

Da aber

$$\frac{\sin A}{\sin B^2} = \frac{\sin a}{\sin b \sin B} \text{ und } \frac{\sin c}{\sin b^2} = \frac{\sin C}{\sin b \sin B} \quad (II),$$

$$\cos A \cos B - \sin A \sin B \cos c = -\cos C \quad (IV)$$

und

$$\cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A = \cos a \quad (I);$$

so erhalten wir:

$$5)\ \sin a dB = \sin C db - \cos a \sin B dc - \sin b \cos C dA.$$

Diese Differentialgleichung erster Ordnung habe ich gar nicht allgemein weiter differentiirt, unten werden wir aber bei einem Beispiele Gelegenheit erhalten, das Differential zweiter Ordnung einer bestimmten Seite herzuleiten.

§. 5. Differentiiren wir die Gleichung (IV)

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a,$$

so erhalten wir unmittelbar

$$\varepsilon)\quad \sin A dA = -[\sin B \cos C + \cos B \sin C \cos a]dB$$
$$-[\cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a]dC + \sin B \sin C \sin a da,$$

also mit Benutzung der Gleichungen (**) und (II)

$$6)\quad dA = -\cos c dB - \cos b dC + \sin b \sin C da.$$

Da $\sin b \sin C = \sin c \sin B$ ist, so kann man b mit c und B mit C vertauschen, ohne dass die Gleichung eine andere wird. Um nun das zweite Differential von A, in Bezug auf B, C und a als Urvariabele zu erhalten, differentiiren wir die Gleichung (ε) noch einmal und erhalten so unmittelbar

$$\zeta)\quad \sin A ddA + \cos A dA^2 = -[\cos B \cos C - \sin B \sin C \cos a]dB^2$$
$$-[\cos B \cos C - \sin B \sin C \cos a]dC^2$$
$$+2[\sin B \sin C - \cos B \cos C \cos a]dBdC$$
$$+2\cos B \sin C \sin a dBda$$
$$+2\sin B \cos C \sin a dCda$$
$$+\sin B \sin C \cos a da^2.$$

Da aber nach (6)

$$\cos A dA^2 = \cos A \cos c^2 dB^2 + \cos A \cos b^2 dC^2$$
$$+2\cos A \cos b \cos c dBdC$$
$$-2\cos A \cos c \sin b \sin C dBda$$
$$-2\cos A \cos b \sin b \sin C dCda$$
$$+\cos A \sin b^2 \sin C^2 da^2;$$

so erhalten wir, wenn wir diesen Werth in (ζ) substituiren, weil

$$\cos B \cos C - \sin B \sin C \cos a + \cos A \cos c^2$$
$$= -\cos A + \cos A \cos c^2 \text{ (IV)} = -\cos A \sin c^2,$$

$$\cos B \cos C - \sin B \sin C \cos a + \cos A \cos b^2 = -\cos A \sin b^2, \text{ (IV)}$$

$$\sin B \sin C - \cos B \cos C \cos a - \cos A \cos b \cos c$$
$$= \sin B \sin C - \sin B \sin C \cos a^2 + \cos A \cos a - \cos A \cos b \cos c \text{ (IV)}$$
$$= \sin B \sin C \sin a^2 + \cos A^2 \sin b \sin c \text{ (I)}$$
$$= \sin b \sin c, \text{ (II)}$$

$$\cos B \sin C \sin a + \cos A \cos c \sin B \sin C = \sin C \cos b \sin c \text{ (*)}$$
$$= \sin a \sin A \cos b \text{ (II)}$$

$$\sin B \cos C \sin a + \cos A \cos b \sin b \sin C$$
$$= \sin B[\sin a \cos C + \sin c \cos b \cos A] \quad \text{(II)}$$
$$= \sin B \cos c \sin b \ (*) = \sin A \cos c \sin a, \quad \text{(II)}$$

endlich

$$\sin B \sin C \cos a - \cos A \sin b^2 \sin C^2$$
$$= \sin C \sin B\, [\cos a - \sin b \sin c \cos A] \quad \text{(II)}$$
$$= \sin C \sin B \cos b \cos c; \quad \text{(I)}$$

7) $$ddA = \operatorname{cotg} A \sin c^2 dB^2 + \operatorname{cotg} A \sin b^2 dC^2 + \frac{2 \sin b \sin c}{\sin A} dBdC$$
$$+ 2 \sin a \cos b dBda + 2 \sin a \cos c dCda + \frac{\cos b \cos c \sin B \sin C}{\sin A} da^2.$$

§. 6. Um die bisher entwickelten Differentialgleichungen bei einem Beispiele in Anwendung zu bringen, wählen wir nach dem Berliner astronomischen Jahrbuche den Saturns-Ring aus. Nach den in dem dortigen Anhang aufgeführten Angaben ist die Lage des Ringes gegen die Ekliptik gegeben. Dort ist sie nach Bessel für 1800 aufgeführt, und um sie für eine unserer Zeit näher liegende Epoche anzugeben, setzen wir für 1840:

den aufsteigenden Knoten des Saturns-Ringes auf der beweglichen Ebene der Ekliptik $= 167^\circ 24' 7'',4 + 46'',462\, t$,

Neigung gegen dieselbe $= 28^\circ 10' 30'',7 - 0'',350\ t$,

Schiefe der Ekliptik $= 23^\circ 27' 36'',5 - 0'',457\ t$;

wo t, in Jahren ausgedrückt, von 1840 an gerechnet wird. Wir wollen die Lage des Ringes gegen den Aequator bestimmen. Setzen wir in Taf. V. Fig. 5.:

$$N = 167^\circ 24' 7'',4 = a,$$
$$i = 28\ 10\ 30,7 = C,$$
$$\varepsilon = 23\ 27\ 36,5 = B;$$

so ist die Aufgabe $N' = c$, $\omega = b$ und $i' = 180^\circ - A$ durch Reihen zu bestimmen. Für $t = 0$, also 1840, erhalten wir sogleich, mittelst der in §. 1. aufgestellten Gleichungen:

$$N' = 124^\circ 52' 25'',2;$$
$$i' = 7\ 12\ 40,2;$$
$$\omega = 43\ 46\ 3,6;$$

und nach dem Taylorschen Satze für ein unbestimmtes t

$$(N') = N' + t \cdot \frac{dN'}{dt} + \tfrac{1}{2} t^2 \frac{ddN'}{dt^2},$$

$$(i') = i' + t \cdot \frac{di'}{dt} + \tfrac{1}{2}t^2 \frac{ddi'}{dt^2},$$

$$(\omega) = \omega + t \cdot \frac{d\omega}{dt} + \tfrac{1}{2}t^2 \frac{dd\omega}{dt^2}.$$

Wir müssen also die Werthe der in diesen drei Gleichungen enthaltenen Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung, ausgedrückt durch $\frac{dN}{dt} = +46'',462$; $\frac{di}{dt} = -0'',350$ und $\frac{d\varepsilon}{dt} = -0'',457$, bestimmen.

§. 7. Um $\frac{dN'}{dt}$ und $\frac{d\omega}{dt}$ zu bestimmen, wenden wir die aus (III) abgeleiteten und (5) entsprechenden Gleichungen:

$$db = \frac{\sin B \cos c}{\sin A} da + \frac{\sin c}{\sin A} dB + \sin b \operatorname{cotg} A dC$$

und

$$dc = \frac{\sin C \cos b}{\sin A} da + \frac{\sin b}{\sin A} dC + \sin c \operatorname{cotg} A dB$$

an. Zur Bestimmung von $\frac{di'}{dt}$ wenden wir die aus (IV) erhaltene Gleichung (6)

$$dA = -\cos c dB - \cos b dC + \sin b \sin C da$$

an. Da nun $A = 180^0 - i'$, so wird $dA = -di'$, $\cos A = -\cos i'$, $\sin A = \sin i'$ und $\operatorname{cotg} A = -\operatorname{cotg} i'$; also

$$\eta)\quad d\omega = \frac{\sin\varepsilon \cos N'}{\sin i'} dN + \frac{\sin N'}{\sin i'} d\varepsilon - \sin\omega \operatorname{cotg} i' di,$$

$$\theta)\quad dN' = \frac{\sin i \cos\omega}{\sin i'} dN + \frac{\sin\omega}{\sin i'} d\varepsilon - \sin N' \operatorname{cotg} i' di,$$

$$\varkappa)\quad di' = \cos N' d\varepsilon + \cos\omega di - \sin\omega \sin i dN.$$

Wendet man die Zahlenwerthe (§. 6.) an, so erhält man

$$\frac{d\omega}{dt} = -85'',327,\quad \frac{dN'}{dt} = +127'',243 \text{ und } \frac{di'}{dt} = -15'',168.$$

Um nun auch die Differentialquotienten zweiter Ordnung zu bestimmen, differentiiren wir die beiden Gleichungen (η) und (θ) noch einmal, und erhalten so:

$$\lambda)\quad dd\omega = \frac{\cos\varepsilon . \cos N'}{\sin i'} d\varepsilon dN - \frac{\sin\varepsilon \sin N'}{\sin i'} dN' dN$$

$$- \frac{\sin\varepsilon \cos N' \operatorname{cotg} i'}{\sin i'} di' dN + \frac{\cos N'}{\sin i'} dN' d\varepsilon$$

$$- \frac{\sin N' \operatorname{cotg} i'}{\sin i'} di' d\varepsilon - \cos\omega \operatorname{cotg} i' d\omega di + \frac{\sin\omega}{\sin i'^2} di' di,$$

$$\mu)\quad ddN' = \frac{\cos i \cos \omega}{\cos i'} di dN - \frac{\sin i \sin \omega}{\sin i'} d\omega dN - \frac{\sin i \cos\omega \operatorname{cotg} i'}{\sin i'} di' dN$$
$$+ \frac{\cos \omega}{\sin i'} d\omega d\varepsilon - \frac{\sin \omega \operatorname{cotg} i'}{\sin i'} di' d\varepsilon - \cos N' \operatorname{cotg} i' dN' di$$
$$+ \frac{\sin N'}{\sin i'^2} di' di;$$

und zur Bestimmung von ddi' nach (7)

$$\nu)\quad ddi' = \operatorname{cotg} i' \sin N'^2 d\varepsilon^2 + \operatorname{cotg} i' \sin \omega^2 di^2 - \frac{2 \sin \omega \sin N'}{\sin i'} di d\varepsilon$$
$$- 2 \sin N \cos \omega d\varepsilon dN - 2 \sin N \cos N' di dN$$
$$- \frac{\cos \omega \cos N' \sin \varepsilon \sin i}{\sin i'} dN^2.$$

Wegen der geringen Grösse der Werthe von $d\varepsilon$ und di hat man keinesweges nöthig, die Glieder in den drei gefundenen Gleichungen zu benutzen, welche eines dieser beiden Differentiale zum Factor haben; das Endresultat wird dadurch gar nicht oder ganz unbedeutend afficirt. Ausserdem ist zu bemerken, dass man jedes Glied mit 206264″,8 dividiren muss, weil jedes die Differentialquotienten in zwei Dimensionen enthält und der eine von jedem in Theilen des Radius ausgedrückt werden muss. Wir wollen hier, der Vollständigkeit wegen, die erhaltenen Zahlenwerthe alle darstellen und erhalten daher:

$$\frac{dd\omega}{dt^2} = +0{,}00043 - 0{,}07458 - 0{,}04897 + 0{,}00128 - 0{,}00174$$
$$+ 0{,}00083 + 0{,}00113 = -0'',12162$$

$$\text{und } \tfrac{1}{2} \frac{dd\omega}{dt^2} = -0'',06081;$$

$$\frac{ddN'}{dt^2} = -0{,}00040 + 0{,}05001 + 0{,}07335 + 0{,}00109 - 0{,}00146$$
$$- 0{,}00098 + 0{,}00134 = +0'',12295$$

$$\text{und } \tfrac{1}{2} \frac{ddN'}{dt^2} = +0'',06148;$$

$$\frac{ddi'}{dt^2} = +0{,}00001 + 0 - 0{,}00007 + 0{,}00003 - 0{,}00002 + 0{,}00647$$
$$= +0'',00642 \text{ und } \tfrac{1}{2} \frac{ddi'}{dt^2} = +0'',00321.$$

Wir erhalten demnach nach §. 6.

$$(N') = 124^\circ 52' 25'',2 + 127'',243 . t + 0'',06148 . t^2,$$
$$(i') = 7\ 12\ 40,2 - 15,168 . t + 0,00321 . t^2,$$
$$(\omega) = 43\ 46\ 3,6 - 85,327 . t - 0,06081 . t^2.$$

Offenbar würden die zweiten Differentialquotienten fast unverän-

dert geblieben sein, wenn man in den beiden ersten Formeln nur je zwei, in der dritten nur das eine beträchtliche Glied allein berechnet hätte. Noch mehr würde eine solche Beschränkung rathsam sein, wenn man auch die dritte Potenz von t benutzen, also die Differentialquotienten dritter Ordnung berechnen wollte, was wir aber hier unterlassen. Statt dessen wollen wir im folgenden Paragraphen zeigen, wie man auch das Hauptglied der Nutation anbringen kann.

§. 8. Bezeichnet ☊ den aufsteigenden Knoten der Mondsbahn, so ist das Glied der Nutation, welches N hinzuzufügen ist, $= -16'',783 \sin ☊$ und das ε hinzuzufügende $= +8'',977 \cos ☊$. Wir haben daher, mit Bezug auf die Nutation:

$$dN' = -\frac{\sin i \cos \omega}{\sin i'} 16'',783 \sin ☊ - \sin N' \operatorname{cotg} i' \, 8'',977 \cos ☊,$$

$$di' = \cos N' . 8'',977 \cos ☊ + \sin \omega \sin i . 16'',783 \sin ☊,$$

$$d\omega = \frac{\sin N'}{\sin i'} 8'',977 \cos ☊ - \frac{\sin \varepsilon \cos N'}{\sin i'} 16,783 \sin ☊;$$

oder, wenn man mit obigen Werthen die Rechnung anstellt,

$$\xi) \quad dN' = -58'',207 \cos ☊ - 45'',589 \sin ☊$$
$$= +73'',93 \sin (☊ + 231^\circ 56',0),$$

$$\pi) \quad di' = -5,133 \cos ☊ + 5,482 \sin ☊$$
$$= -7,51 \sin (☊ + 136^\circ 53',0),$$

$$\varrho) \quad d\omega = +58,670 \cos ☊ + 30,434 \sin ☊$$
$$= +66,09 \sin (☊ + 62^\circ 35,1).$$

Diese Werthe müssen den obigen Ausdrücken für (N'), (i') und (ω) hinzugefügt werden, um auch die Nutation anzubringen.

§. 9. Zum Schluss dieser Betrachtungen stellen wir die verschiedenen Gleichungen, welche wir bisher untersucht haben, übersichtlich zusammen:

$$\text{I)} \quad \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

$$da = \cos C db + \cos B dc + \sin c \sin B dA,$$

$$dda = \sin C^2 \operatorname{cotg} a db^2 + \sin B^2 \operatorname{cotg} a dc^2 - \frac{2 \sin B \sin C}{\sin a} db dc$$
$$+ 2 \sin A \cos B dA db$$
$$+ 2 \sin A \cos C dA dc - \frac{\sin b \sin c \cos B \cos C}{\sin a} dA^2.$$

II) $\sin a \sin B = \sin b \sin A$,

$$\operatorname{cotg} a da + \operatorname{cotg} B dB = \operatorname{cotg} b db + \operatorname{cotg} A dA,$$

$$dda = \frac{\cos b^2 - \cos a^2}{\cos a^2 \sin b^2} db^2 + \frac{\cos A^2 - \cos a^2}{\cos a^2 \sin A^2} dA^2$$

$$- \frac{\cos B^2 - \cos a^2}{\cos a^2 \sin B^2} dB^2 + \frac{2 \operatorname{cotg} b \operatorname{cotg} A}{\cos a^2} db dA$$

$$- \frac{2 \operatorname{cotg} b \operatorname{cotg} B}{\cos a^2} db dB - \frac{2 \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B}{\cos a^2} dA dB.$$

*) $\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A$.

III) $\sin A \operatorname{cotg} B = \operatorname{cotg} b \sin c - \cos c \cos A$,

$$\sin a dB = \sin C db - \cos a \sin B dc - \sin b \cos C dA.$$

**) $\sin A \cos b = \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a$.

IV) $\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$,

$$dA = -\cos c dB - \cos b dC + \sin b \sin C da,$$

$$ddA = \operatorname{cotg} A \sin c^2 dB^2 + \operatorname{cotg} A \sin b^2 dC^2 + \frac{2 \sin b \sin c}{\sin A} dB dC$$

$$+ 2 \sin a \cos b dB da + 2 \sin a \cos c dC da$$

$$+ \frac{\cos b \cos c \sin B \sin C}{\sin A} da^2.$$

XLV.

Allgemeine Transformationsformeln für gewisse Integrale.

Von dem

Herrn Professor Dr. O. Schlömilch

an der Universität zu Jena.

In einem meiner früheren Aufsätze habe ich gezeigt, dass sich die Werthe vieler Integrale von der Form

$$\int_0^\infty \varphi(x) dx$$

durch Zerlegung des Integrationsintervalles in andere und kleinere Intervalle bestimmen lassen, indem man setzt

$$\int_0^\infty \varphi(x)\,dx = \int_0^\alpha \varphi(x)\,dx + \int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx + \int_\beta^\gamma \varphi(x)\,dx + \ldots.$$
$$(\alpha < \beta < \gamma < \delta \ldots.)$$

und jedes einzelne Integral einer passenden Transformation unterwirft. In neuerer Zeit liess mich ein Blick auf mehrere gelegentlich entwickelte Reihensummirungen erkennen, dass sich jene Methode auf Integrale von sehr allgemeiner Form anwenden lässt und dabei zu äusserst fruchtbaren Reduktionsformeln führt, die eine Menge mehr oder weniger bekannter Resultate als ganz spezielle Fälle in sich enthalten.

Den nöthigen Apparat verschaffen wir uns auf folgende Weise. In der bekannten Gleichung

$$\left.\begin{aligned} l\sin x = lx + l\left(1-\frac{x}{\pi}\right) + l\left(1+\frac{x}{\pi}\right) \\ + l\left(1-\frac{x}{2\pi}\right) + l\left(1+\frac{x}{2\pi}\right) + \ldots. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

sei $x = y + r\sqrt{-1}$; an die Stelle von $\sin x$ tritt dann

$$\frac{e^r + e^{-r}}{2}\sin y + \sqrt{-1}\,\frac{e^r - e^{-r}}{2}\cos y,$$

und wenn man jetzt die nach der Formel

$$l(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = \tfrac{1}{2}l(\alpha^2 + \beta^2) + \sqrt{-1}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{\beta}{\alpha}$$

leicht entwickelbaren imaginären Partieen von (1) mit einander vergleicht, so ergiebt sich auf der Stelle:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Arctan}\left(\frac{e^r - e^{-r}}{e^r + e^{-r}}\cot y\right) \\ = \mathrm{Arctan}\,\frac{r}{y} - \mathrm{Arctan}\,\frac{r}{\pi - y} + \mathrm{Arctan}\,\frac{r}{\pi + y} - \ldots. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Durch Differenziation nach y findet man hieraus, wenn

$$s = \frac{e^r - e^{-r}}{e^r + e^{-r}} \quad (3)$$

zur Abkürzung gesetzt wird:

$$\left.\begin{aligned} \frac{s}{s^2\cos^2 y + \sin^2 y} = \frac{r}{r^2 + y^2} + \frac{r}{r^2 + (\pi - y)^2} \\ + \frac{r}{r^2 + (\pi + y)^2} + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Differenzirt man dagegen die Gleichung (2) nach r und bezeichnet wie folgt:

$$s' = \frac{ds}{dr} = \left(\frac{2}{e^r + e^{-r}}\right)^2, \tag{5}$$

so erhält man nicht minder leicht

$$\left.\begin{aligned} \frac{s' \tan y}{s^2 + \tan^2 y} = \frac{y}{r^2 + y^2} - \frac{\pi - y}{r^2 + (\pi - y)^2} \\ + \frac{\pi + y}{r^2 + (\pi + y)^2} - \dots \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Ganz ähnliche Transformationen sind auf die Gleichung

$$l\left(\frac{1 + \cos x}{2}\right)$$

$$= 2l(1 - \frac{x}{\pi}) + 2l(1 + \frac{x}{\pi}) + 2l(1 - \frac{x}{3\pi}) + 2l(1 + \frac{x}{3\pi}) + \dots$$

anwendbar; für $x = y + r\sqrt{-1}$ und durch Vergleichung der imaginären Partieen beiderseits ergiebt sich nämlich

$$\text{Arctan}\left(\frac{e^r - e^{-r}}{e^r + 2 + e^{-r}} \tan y\right)$$

$$= 2\,\text{Arctan}\frac{r}{\pi - y} - 2\,\text{Arctan}\frac{r}{\pi + y} + 2\,\text{Arctan}\frac{r}{3\pi - y} - \dots$$

Addirt man diese Gleichung zu der unter No. (2) verzeichneten und wendet dabei auf der linken Seite die Formel

$$\text{Arctan}\,\alpha + \text{Arctan}\,\beta = \text{Arctan}\frac{\alpha + \beta}{1 - \alpha\beta}, \quad (\alpha\beta < 1)$$

an, so gelangt man ohne Schwierigkeit zu der Gleichung:

$$\begin{aligned} \text{Arctan}\left(\frac{e^r - e^{-r}}{2 \sin y}\right) = \text{Arctan}\frac{r}{y} + \text{Arctan}\frac{r}{\pi - y} \\ - \text{Arctan}\frac{r}{\pi + y} - \text{Arctan}\frac{r}{2\pi - y} \\ + \text{Arctan}\frac{r}{2\pi + y} + \text{Arctan}\frac{r}{3\pi - y} \\ - \dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

wobei das Vorzeichen von Paar zu Paar wechselt. Setzt man zur Abkürzung

$$p = \tfrac{1}{2}(e^r - e^{-r}) \tag{7}$$

und differenzirt jene Gleichung nach y, so wird

$$\left.\begin{aligned}&\frac{p\cos y}{p^2+\sin^2 y}\\ &=\frac{r}{r^2+y^2}-\frac{r}{r^2+(\pi-y)^2}-\frac{r}{r^2+(\pi+y)^2}\\ &+\frac{r}{r^2+(2\pi-y)^2}+\frac{r}{r^2+(2\pi+y)^2}\\ &-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

Durch Differenziation der obigen Gleichung nach r, wobei man

$$q=\tfrac{1}{2}(e^r+e^{-r})\quad(9)$$

setzen kann, ergiebt sich dagegen nicht minder leicht:

$$\left.\begin{aligned}\frac{q\sin y}{q^2-\cos^2 y}&=\frac{y}{r^2+y^2}+\frac{\pi-y}{r^2+(\pi-y)^2}\\ &-\frac{\pi+y}{r^2+(\pi+y)^2}-\frac{2\pi-y}{r^2+(2\pi-y)^2}\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

Die so eben entwickelten Summenformeln (4), (6), (8) und (10) führen nun zu eben so viel Transformationen bestimmter Integrale. In kurzer, aber wohl genügender Andeutung ist der dazu nöthige Calcül folgender.

I. Wir betrachten zunächst das Integral

$$\int_0^\infty \frac{r dx}{r^2+x^2}F(\tan^2 x),$$

worin F eine ganz beliebige Funktion bezeichnet. Zerlegt man dasselbe nach dem Schema

$$\int_0^\infty X dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} X dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} X dx+\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} X dx+\ldots.$$

in eine unendliche Menge anderer Integrale, die sich sämmtlich auf das Integrationsintervall $\frac{\pi}{2}$ beziehen, so lässt sich leicht eine sehr fruchtbare Transformation vornehmen, welche allen jenen Integralen die gleichen Integrationsgränzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ verschafft. Man setze nämlich im ersten Integrale $x=y$, im zweiten $x=\pi-y$, im dritten $x=\pi+y$, im vierten $x=2\pi-y$ u. s. f., so erhält man ohne alle Schwierigkeit:

$$\int_0^\infty \frac{rdx}{r^2+x^2} F(\tan^2 x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{rdy}{r^2+y^2} F(\tan^2 y)$$

$$+\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{rdy}{r^2+(\pi-y)^2} F(\tan^2 y) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{rdy}{r^2+(\pi+y)^2} F(\tan^2 y) + \ldots.$$

Wendet man auf der rechten Seite den bekannten Satz

$$\int_a^b udy + \int_a^b vdy + \int_a^b wdy + \ldots. = \int_a^b (u+v+w+\ldots.)dy$$

an, so übersieht man auf der Stelle, dass man die Gleichung aufstellen kann:

$$\int_0^\infty \frac{rdx}{r^2+x^2} F(\tan^2 x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} YF(\tan^2 y)dy,$$

worin Y die Summe der unendlichen Reihe

$$\frac{r}{r^2+y^2} + \frac{r}{r^2+(\pi-y)^2} + \frac{r}{r^2+(\pi+y)^2} + \ldots.$$

bezeichnet. Da wir aber diese Summe vermöge der Gleichung (4) bereits kennen, so ergiebt sich jetzt

$$\int_0^\infty \frac{rdx}{r^2+x^2} F(\tan^2 x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{s}{s^2+\tan^2 y} \cdot \frac{dy}{\cos^2 y} F(\tan^2 y),$$

und einfacher für $\tan y = z$:

$$\int_0^\infty \frac{rdx}{r^2+x^2} F(\tan^2 x) = \int_0^\infty \frac{sdz}{s^2+z^2} F(z^2). \qquad (11)$$

Die Fruchtbarkeit und der Nutzen dieser Formel werden gleich einleuchten, wenn man berücksichtigt, dass die linke Seiten goniometrische und algebraische Ausdrücke zugleich, die rechte Seite aber nur die letzteren enthält, dass sich mithin der Werth des nach z genommenen Integrales in vielen Fällen ohne Schwierigkeit bestimmen lassen wird.

II. Behandelt man auf ganz dieselbe Weise das Integral

$$\int_0^\infty \frac{xdx}{r^2+x^2} F(\tan^2 x) f(\tan x),$$

worin $f(u)$ eine Funktion bezeichnet, welche die Eigenschaft $f(-u) = -f(u)$ besitzt, also mit $\tan x$ gleichzeitig ihr Vorzeichen wechselt, so findet man

$$\int_0^\infty \frac{xdx}{r^2+x^2} F(\tan^2 x) f(\tan x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} YF(\tan^2 y) f(\tan y)dy,$$

wobei F die Summe der Reihe

$$\frac{y}{r^2+y^2}-\frac{\pi-y}{r^2+(\pi-y)^2}+\frac{\pi+y}{r^2+(\pi+y)^2}-\ldots.$$

bedeutet. Da nach No. (6) diese Summe bekannt ist, so folgt jetzt

$$\int_0^\infty \frac{xdx}{r^2+x^2}F(\tan^2 x)f(\tan x)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{s'\tan y}{s^2+\tan^2 y}F(\tan^2 y)f(\tan y)\,dy,$$

und für $\tan y=z$, also $y=\text{Arctan}\,z$:

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty \frac{xdx}{r^2+x^2}F(\tan^2 x)f(\tan x)\\ &=\int_0^\infty \frac{s'zdz}{(1+z^2)(s^2+z^2)}F(z^2)f(z).\end{aligned}\right\}(12)$$

III. Geht man von dem Integrale

$$\int_0^\infty \frac{rdx}{r^2+x^2}F(\sin^2 x)f(\cos x)$$

aus, so verwandelt sich dasselbe nach der bisherigen Methode und unter Berücksichtigung der Formel (6) in

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{p\cos y}{p^2+\sin^2 y}F(\sin^2 y)f(\cos y)dy,$$

und für $\sin y=z$, also $\cos y dy=dz$, wird jetzt

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty \frac{rdx}{r^2+x^2}F(\sin^2 x)f(\cos x)\\ &=\int_0^1 \frac{pdz}{p^2+z^2}F(z^2)f(\sqrt{1-z^2})\end{aligned}\right\}(13)$$

wobei immer $f(u)$ die Eigenschaft $f(-u)=-f(u)$ besitzen muss.

IV. Wendet man endlich dieselbe Methode auf das Integral

$$\int_0^\infty \frac{xdx}{r^2+x^2}F(\cos^2 x)f(\sin x)$$

an und nimmt auf die Formel (10) Rücksicht, so geht dasselbe zunächst in

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{q\sin y}{q^2-\cos^2 y}F(\cos^2 y)f(\sin y)\,dy$$

über, und mittelst der Substitution $\cos y = z$ ergiebt sich jetzt:

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty \frac{x\,dx}{r^2+x^2} F(\cos^2 x) f(\sin x)\\ &=\int_0^1 \frac{q\,dz}{q^2-z^2} F(z^2) f(\sqrt{1-z^2}).\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Um die Leichtigkeit zu zeigen, mit welcher die Formeln (11), (12), (13), (14) zur Kenntniss bestimmter Integrale führen, wollen wir ein paar Beispiele entwickeln. Setzt man in No. (11)

$$F(z^2) = \frac{1}{1+z^2},$$

so geht das nach z genommene Integral in

$$\frac{s}{1-s^2}\int_0^\infty \left(\frac{1}{s^2+z^2} - \frac{1}{1+z^2}\right) dz = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{1+s}$$

über. Ferner ist $F(\tan^2 x) = \cos^2 x$, und folglich

$$\int_0^\infty \frac{r\cos^2 x}{r^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{1+s},$$

wofür man auch schreiben kann

$$\int_0^\infty \frac{r(1+\cos 2x)}{r^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{1+s};$$

der Werth des ersten Integrales links ist aber

$$\int_0^\infty \frac{r\,dx}{r^2+x^2} = \frac{\pi}{2},$$

und durch Transposition desselben wird jetzt

$$\int_0^\infty \frac{r\cos 2x}{r^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,\frac{1-s}{1+s} = \frac{\pi}{2} e^{-2r},$$

wie man vermöge des Werthes von s leicht findet. Für $x = \frac{1}{2}bz$, $r = \frac{1}{2}ab$, wo nun b eine positive, von Null verschiedene Grösse sein muss, findet man hieraus noch

$$\int_0^\infty \frac{a\cos bz}{a^2+z^2}\,dz = \frac{\pi}{2} e^{-ab},$$

wie man schon aus anderen Untersuchungen weiss.

Nimmt man in der Gleichung (13)

$$F(z^2) = \frac{1}{1+z^2}, \quad f(z) = z,$$

wodurch die Bedingung $f(-z) = -f(z)$ erfüllt ist, so wird

$$\int_0^\infty \frac{x\sin x\cos x}{r^2+x^2}dx=\int_0^\infty \frac{s'z^2dz}{(1+z^2)^2(s^2+z^2)},$$

und daraus erhält man sehr leicht

$$\int_0^\infty \frac{x\sin 2x}{r^2+x^2}dx=\frac{\pi}{2}e^{-2r},$$

oder für $x=\frac{1}{2}bz$, $r=\frac{1}{2}ab$:

$$\int_0^\infty \frac{z\sin bz}{a^2+z^2}dz=\frac{\pi}{2}e^{-ab}.$$

Die Gleichung (12) giebt ferner für $F(z^2)=1$, $f(z)=z$:

$$\int_0^\infty \frac{x\tan x}{r^2+x^2}dx=\frac{\pi}{e^{2r}+1},$$

und für $F(z^2)=1$, $f(z)=\frac{1}{z}$:

$$\int_0^\infty \frac{x\cot x}{r^2+x^2}dx=\frac{\pi}{e^{2r}-1},$$

woraus für $x=bz$, $r=ab$ folgt:

$$\int_0^\infty \frac{z\tan bz}{a^2+z^2}dz=\frac{\pi}{e^{2ab}+1},$$

$$\int_0^\infty \frac{z\cot bz}{a^2+z^2}dz=\frac{\pi}{e^{2ab}-1}.$$

Nimmt man nur etwas allgemeinere Formen für die willkührlichen, in unseren Transformationstheoremen vorkommenden Funktionen, so gelangt man mit der grössten Leichtigkeit zu neuen Resultaten von oft sehr eleganter Gestalt. So z. B. sei in No. (11)

$$F(z^2)=l(1+k^2z^2),$$

so ist

$$\int_0^\infty \frac{rl(1+k^2\tan^2 x)}{r^2+x^2}dx=\int_0^\infty \frac{sdz}{s^2+z^2}l(1+k^2z^2).$$

Den Werth des Integrales rechts findet man sehr rasch auf folgende Weise. Sei

$$\varphi(k)=\int_0^\infty \frac{sdz}{s^2+z^2}l(1+k^2z^2),$$

so folgt durch partielle Differenziation nach k

$$\frac{d\varphi(k)}{dk}=\int_0^\infty \frac{sdz}{s^2+z^2}\cdot\frac{2kz^2}{1+k^2z^2},$$

und der Werth des Integrales rechts ist

$$\frac{\pi s}{1+ks},$$

wie man durch die gewöhnlichen Mittel findet. Es folgt jetzt

$$\varphi(k)=\int\frac{\pi s}{1+ks}dk=\pi l(1+ks)+\text{Const}.$$

Da aber nach der ursprünglichen Bedeutung von $\varphi(k)$ die Beziehung $\varphi(0)=0$ statt findet, so ergiebt sich Const. $=0$ und $\varphi(k)=\pi l(1+ks)$; mithin

$$\int_0^\infty\frac{rl(1+k^2\tan^2x)}{r^2+x^2}dx=\pi l(1+k\frac{e^r-e^{-r}}{e^r+e^{-r}}).$$

Eine ganz analoge Gleichung ergiebt sich aus dem Theoreme (11) für

$$F(z^2)=l(1+\frac{k^2}{z^2})$$

unter Anwendung desselben Verfahrens. Man findet nämlich

$$\int_0^\infty\frac{rl(1+k^2\cot^2x)}{r^2+x^2}dx=\pi l(1+k\frac{e^r+e^{-r}}{e^r-e^{-r}}).$$

Beide Formeln lassen sich unter der sehr eleganten Gestalt darstellen *):

$$\int_0^\infty\frac{rl(1+k^2\tan^2x)}{r^2+x^2}dx=\pi l(1+k\,\text{tghp}\,r),$$

$$\int_0^\infty\frac{rl(1+k^2\cot^2x)}{r^2+x^2}dx=\pi l(1+k\,\text{cthp}\,r).$$

---

*) Bekanntlich hat Herr Prof. Gudermann für die Ausdrücke

$$\frac{e^r+e^{-r}}{2},\quad\frac{e^r-e^{-r}}{2},\quad\frac{e^r-e^{-r}}{e^r+e^{-r}},\quad\frac{e^r+e^{-r}}{e^r-e^{-r}}$$

die Bezeichnungen Cos r, Sin r, Tan r, Cot r eingeführt, die, so passend sie auch sind, sich nur leider nicht gut im Drucke ausnehmen. Vielleicht empfiehlt sich in dieser Hinsicht die Bezeichnung

cshp r, snhp r, tghp r, cthp r,

was sich eben so gut schreibt als drucken lässt. Der Bezeichnung sin, cos, tan, cot gegenüber dienen dann immer drei Buchstaben den goniometrischen und vier den hyperbolischen Funktionen. Auch schliesst sich diess gut an die Jacobi'she Bezeichnung der umgekehrten elliptischen Funktionen [$x=\sin\text{am}(u)$ wenn $u=F(x,c)$] an.

Für $x=bz$, $r=ab$ ergeben sich hieraus die etwas allgemeineren Gleichungen

$$\int_0^\infty \frac{al(1+k^2\tan^2 bz)}{a^2+z^2}dz=\pi l[1+k\,\text{tghp}\,(ab)],$$

$$\int_0^\infty \frac{al(1+k^2\cot^2 bz)}{a^2+z^2}dz=\pi l[1+k\,\text{cthp}\,(ab)].$$

Nimmt man z. B. $k=1$, so erhält man sogleich

$$\int_0^\infty \frac{al\cos^2 bz}{a^2+z^2}dz=\pi l\left(\frac{1+e^{-2ab}}{2}\right),$$

$$\int_0^\infty \frac{al\sin^2 bz}{a^2+z^2}dz=\pi l\left(\frac{1-e^{-2ab}}{2}\right);$$

wie auf anderem Wege Bidone in den Miscell. Taur. gefunden hat. Man darf hier aber nicht $2l\cos bz$ für $l\cos^2 bz$ schreiben wollen, da diese Funktionen nur für positive $\cos bz$, also nur von $z=-\frac{\pi}{2b}$ bis $z=\frac{\pi}{2b}$ identisch sind; eben so wenig darf man $l\sin^2 bz$ durch $2l\sin bz$ ersetzen, da beide Funktionen nur von $z=0$ bis $z=\frac{\pi}{b}$ zusammenfallen.

XLVI.

Bemerkungen über einige bestimmte Integrale.

Von

Herrn Wilhelm Mösta,

Lehramts-Candidaten zu Cassel.

1.

Zur Entwickelung der bestimmten Integrale

$$\int_0^\infty \cos ax\frac{r\partial x}{r^2+x^2} \text{ und } \int_0^\infty \sin ax\frac{x\partial x}{r^2+x^2},$$

welche zuerst von **Laplace** gegeben wurden, hat man verschiedene Wege eingeschlagen, von denen wohl der als der einfachste bezeichnet werden kann, auf welchem man das bekannte Theorem von **Fourier** zu Hülfe nimmt *).

Weniger Methoden der Herleitung der Werthe von den obigen der Form nach sehr ähnlichen Integralen

$$\int_0^\infty \cos ax \frac{r\partial x}{r^2-x^2} \text{ und } \int_0^\infty \sin ax \frac{x\partial x}{r^2-x^2},$$

welche zuerst der italienische Geometer **Bidone** gefunden hat, sind bekannt geworden und unter den bekannten keine, welche, was Kürze und Einfachheit angeht, der obigen zur Seite gesetzt werden könnte. Vielleicht wird deshalb die folgende Art, zur Kenntniss dieser bestimmten Integrale zu gelangen, die sich durch ihre Kürze und dadurch, dass sie bloss das bekannte Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\partial x = \frac{\pi}{2}$$

als bekannt voraussetzt, empfiehlt, hier nicht am unrichtigen Platze stehen.

Betrachten wir das Integral $\int_0^\infty \cos ax \frac{r\partial x}{r^2-x^2}$, so erhellet leicht, dass selbiges durch Zerlegen des Nenners unter folgende Form gebracht werden kann:

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty \cos ax \frac{r\partial x}{r^2-x^2} &= \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \cos ax \left\{\frac{1}{r+x}+\frac{1}{r-x}\right\}\partial x\\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\cos ax}{r+x}\partial x + \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\cos ax}{r-x}\partial x.\end{aligned}\right\}\quad (1)$$

Führen wir jetzt im ersten Integrale auf der rechten Seite eine neue Veränderliche $\varphi = r+x$ ein, wodurch $\partial\varphi = \partial r$ und die Gränzen ∞ und 0 resp. in ∞ und r übergehen, so ergibt sich

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{r+x}\partial x = \int_r^\infty \frac{\cos a(\varphi-r)}{\varphi}\partial\varphi. \qquad (2)$$

Ebenso ist, wenn wir $\psi = r-x$ setzen,

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{r-x}\partial x = -\int_r^{-\infty} \frac{\cos a(r-\psi)}{\psi}\partial\psi. \qquad (3)$$

Nun ist nach einem bekannten Satze aus der Theorie der bestimmten Integrale

$$\int_r^\infty \frac{\cos a(\varphi-r)}{\varphi}\partial\varphi = \int_0^\infty \frac{\cos a(\varphi-r)}{\varphi}\partial\varphi - \int_0^r \frac{\cos a(\varphi-r)}{\varphi}\partial\varphi$$

---

*) Supplemente zu Klügels mathematischem Wörterbuche. Thl. I. S. 281. — Schlömilch, Beiträge zur Theorie bestimmter Integrale. S. 39.

und

$$\int_r^{-\infty}\frac{\cos a(r-\psi)}{\psi}\partial\psi=\int_0^{-\infty}\frac{\cos a(r-\psi)}{\psi}\partial\psi+\int_r^0\frac{\cos a(r-\psi)}{\psi}\partial\psi.$$

Durch Vertauschen von ψ mit $-\psi$ wird aber

$$\int_0^{-\infty}\frac{\cos a(r-\psi)}{\psi}\partial\psi=\int_0^{\infty}\frac{\cos a(r+\psi)}{\psi}\partial\psi.$$

Daher wird, wenn wir das Zeichen ψ in φ umsetzen, was bekanntlich erlaubt ist:

$$\int_r^{-x}\frac{\cos a(r-\psi)}{\psi}\partial\psi=\int_0^{\infty}\frac{\cos a(r+\varphi)}{\varphi}\partial\varphi+\int_r^0\frac{\cos a(r-\varphi)}{\varphi}\partial\varphi.$$

Wir erhalten jetzt durch Addition der Gleichungen (2) und (3):

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^{\infty}\frac{\cos ax}{r+x}\partial x+\int_0^{\infty}\frac{\cos ax}{r-x}\partial x\\
&=\int_r^{\infty}\frac{\cos a(\varphi-r)}{\varphi}\partial\varphi-\int_r^{-\infty}\frac{\cos a(r-\psi)}{\psi}\partial\psi\\
&=\int_0^{\infty}\frac{\cos a(\varphi-r)}{\varphi}\partial\varphi-\int_0^{r}\frac{\cos a(\varphi-r)}{\varphi}\partial\varphi\\
&-\int_0^{\infty}\frac{\cos a(r+\varphi)}{\varphi}\partial\varphi-\int_r^{0}\frac{\cos a(r-\varphi)}{\varphi}\partial\varphi.\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

Nach der Theorie der bestimmten Integrale ist aber

$$\begin{aligned}\int_r^{\infty}\frac{\cos a(r-\varphi)}{\varphi}\partial\varphi&=-\int_0^{r}\frac{\cos a(r-\varphi)}{\varphi}\partial\varphi\\
&=-\int_0^{r}\frac{\cos a(\varphi-r)}{\varphi}\partial\varphi.\end{aligned}$$

Daher

$$\begin{aligned}&\int_0^{\infty}\frac{\cos a(\varphi-r)}{\varphi}\partial\varphi-\int_0^{r}\frac{\cos a(\varphi-r)}{\varphi}\partial\varphi\\
&-\int_0^{\infty}\frac{\cos a(r+\varphi)}{\varphi}\partial\varphi+\int_0^{r}\frac{\cos a(\varphi-r)}{\varphi}\partial\varphi\\
&=\int_0^{\infty}\frac{\cos a(\varphi-r)}{\varphi}\partial\varphi-\int_0^{\infty}\frac{\cos a(r+\varphi)}{\varphi}\partial\varphi.\end{aligned}$$

Die letzten Integrale lassen sich aber wegen der gleichen Integrationsgränzen zusammenziehen, wodurch sich ergibt:

$$\int_0^\infty \frac{\cos a(\varphi-r)}{\varphi}\partial\varphi - \int_0^\infty \frac{\cos a(r+\varphi)}{\varphi}\partial\varphi$$

$$=\int_0^\infty \frac{\cos a(\varphi-r)-\cos a(r+\varphi)}{\varphi}\partial\varphi = \int_0^\infty \frac{2\sin ar \,.\, \sin a\varphi}{\varphi}\partial\varphi$$

$$=2.\sin ar \int_0^\infty \frac{\sin a\varphi}{\varphi}\partial\varphi.$$

Bekanntlich ist aber:

$$\int_0^\infty \frac{\sin a\varphi}{\varphi}\partial\varphi = \frac{\pi}{2},$$

daher nach Gleichung (4)

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{r+x}\partial x + \int_0^\infty \frac{\cos ax}{r-x}\partial x = 2\cdot\frac{\pi}{2}.\sin ar,$$

und endlich nach Gleichung (1):

$$\int_0^\infty \cos ax \frac{r\partial x}{r^2-x^2} = \frac{\pi}{2}\sin ar.$$

Der Werth des zweiten Integrals

$$\int_0^\infty \sin ax \frac{x\partial x}{r^2-x^2}$$

kann auf ganz ähnliche Weise erhalten werden, weshalb ich die wirkliche Herleitung nicht beifüge. Man gelangt dazu kürzer durch Differentiation des so eben bestimmten Integrals nach a, wodurch sich ergibt:

$$\int_0^\infty \sin ax \frac{x\partial x}{r^2-x^2} = -\frac{\pi}{2}\cos ar.$$

2.

Bei dieser Gelegenheit will ich auf einen Weg aufmerksam machen, auf dem man sehr leicht zu dem Werthe des merkwürdigen Integrals

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\frac{\cos x}{\sin x}\partial x,$$

welches von Euler herrührt, gelangen kann.

Zu diesem Zwecke will ich das unbestimmte Integral

$$\int \frac{\partial x}{1+a^2\operatorname{tg}x^2}$$

entwickeln.

Offenbar ist $\frac{1}{1+a^2 \operatorname{tg} x^2} = \frac{1}{1-a^2} \cdot \frac{1-a^2}{1+a^2 \operatorname{tg} x^2}$, und durch eine einmalige Division ergibt sich sofort:

$$\frac{1}{1+a^2 \operatorname{tg} x^2} = \frac{1}{1-a^2}\left\{1 - \frac{a^2(1+\operatorname{tg} x^2)}{1+a^2 \operatorname{tg} x^2}\right\}.$$

Daher ist:

$$\int \frac{\partial x}{1+a^2 \operatorname{tg} x^2} = \frac{1}{1-a^2}\left\{\int \partial x - a^2 \int \frac{1+\operatorname{tg} x^2}{1+a^2 \operatorname{tg} x^2}\partial x\right\}$$

$$= \frac{1}{1-a^2}\left\{\int \partial x - a^2 \int \frac{\frac{\partial x}{\cos x^2}}{1+a^2 \operatorname{tg} x^2}\partial x\right\}.$$

Nach dieser Umgestaltung des Nenners in unserm Integral ergibt sich aber mit Rücksicht auf die bekannte Formel

$$\int \frac{\partial X}{1+X^2} = \operatorname{arctg} X,$$

$$\int \frac{\partial x}{1+a^2 \operatorname{tg} x^2} = \frac{1}{1-a^2}\{x - a \operatorname{arctg}(a \operatorname{tg} x)\}.$$

Wenn wir jetzt das Integral zwischen den Gränzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ nehmen, so folgt ganz einfach:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial x}{1+a^2 \operatorname{tg} x^2} = \frac{1}{1-a^2}\left(\frac{\pi}{2} - a\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\frac{1-a}{1-a^2} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{1+a}.$$

Multipliciren wir jetzt auf beiden Seiten mit ∂a und integriren zwischen den Gränzen 0 und a, so erhalten wir:

$$\int_0^a \partial a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial x}{1+a^2 \operatorname{tg} x^2} = \frac{\pi}{2}\int_0^a \frac{\partial a}{1+a} = \frac{\pi}{2} l(1+a).$$

Kehren wir die Reihenfolge der Integrationen um, so ist:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \partial x \int_0^a \frac{\partial a}{1+a^2 \operatorname{tg} x^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\operatorname{tg} x} \operatorname{arctg}(a \operatorname{tg} x)\,\partial x = \frac{\pi}{2} l(1+a).$$

Sobald wir aber dem a den Werth 1 geben, erhalten wir unmittelbar das fragliche Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\partial x}{\operatorname{tg} x} = \frac{\pi}{2} l(2),$$

oder, was dasselbe ist:

4. $$\int_0^1 \frac{\partial x}{l\frac{1}{x}}\left[\frac{1}{1-x}-\frac{nx^{n-1}}{1-x^n}+(na-\frac{n}{2}-\tfrac{1}{2})\,x^{n-1}+1-na\right]$$

$$=\frac{n-1}{2}\,l(2\pi)+(\tfrac{1}{2}-na)\,ln.$$

5. $$\int_0^1 \frac{\partial x}{l\frac{1}{x}}\left[\frac{x^{a-1}}{1-x}-\frac{x^{na-1}}{1-x^n}-\frac{(n-1)\,x^{n-1}}{1-x^n}-\frac{n-1}{2}\,x^{n-1}\right]$$

$$=\frac{n-1}{2}\,l(2\pi)+(\tfrac{1}{2}-na)\,ln.$$

XLVIII.

Miscellen.

Johann Caramuel von Lobkowitz, Bischof von Vigerano, gest. 1682, von dem gemeldet wird, dass er 30000 Ketzer bekehrt habe, stellte in der von ihm herausgegebenen „Mathesis audax" die Behauptung auf, dass man alle theologischen Streitfragen, insonderheit die in der Lehre de gratia et libero arbitrio, einzig und allein durch Lineal und Zirkel lösen könne.

Druckfehler

in Thl. X. Heft I. Nr. X.

Seite 104, von oben Zeile 11 muss heissen

$$\cot(2k-1)\frac{M\pi}{2N}=\operatorname{tg}(M\frac{\pi}{2}-(2k-1)\frac{M\pi}{2N}).$$
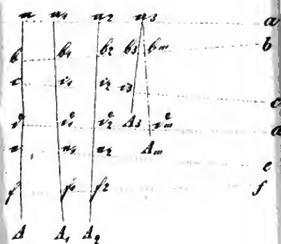
„ 105, von oben Zeile 7 muss heissen $\left(\frac{a}{p}\right)=(-1)^{\mu}$.

„ 105, „ „ „ 10 „ „ welche statt welcher.

„ 105, von unten „ 1 „ „ $\left(\frac{a}{p}\right)=(-1)^{T}$.

Thl. X. Heft 3. S. 316. Z. 13 statt Ferm s. m. Form.

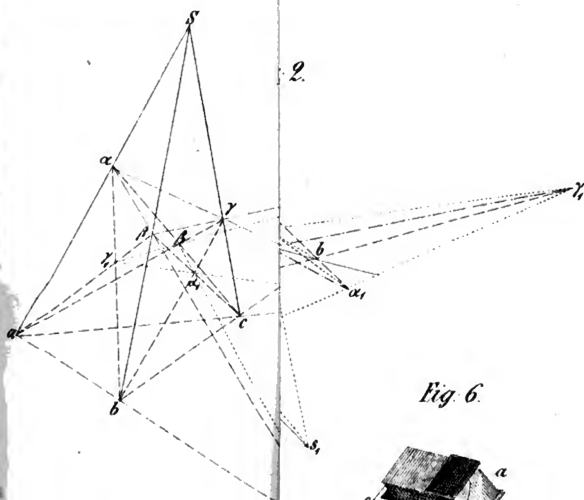
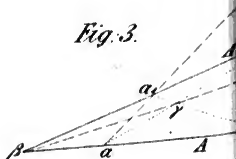

S
2.
α
γ
γ,
β,
β
b
α,
a
c
b
s,
γ,


Fig. 4
a
b
c
d
e
f
A
A,
A2


Fig. 3.
A
a,
γ
β
a
A

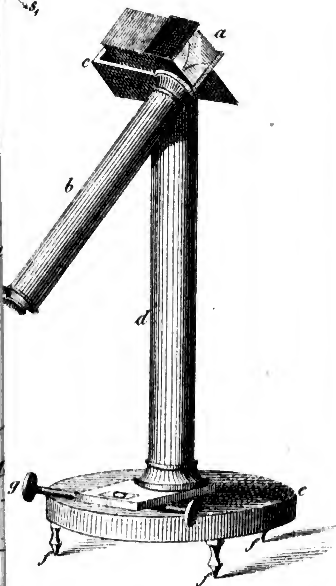

Fig. 6.
a
c
b
d
g
e
f
f
f

Fig. 1.

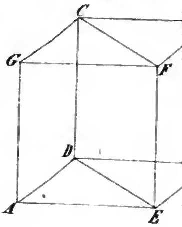


Fig. 3.

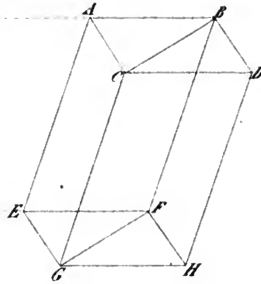


Fig. 4.

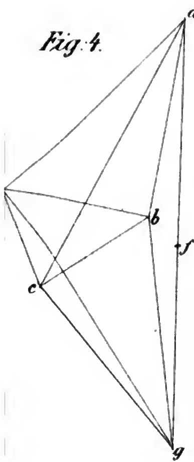


Fig. 7.

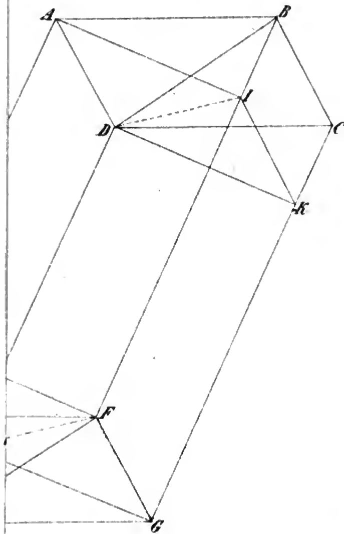


Fig: 1.

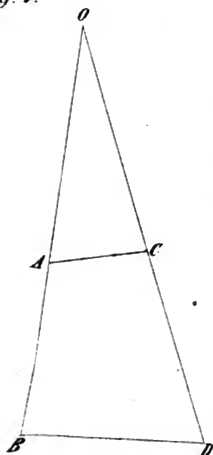


Fig: 3.

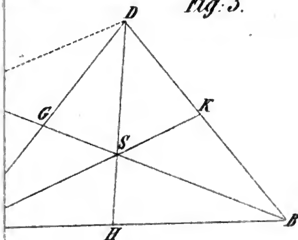


Fig: 4.

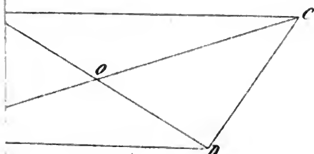


Fig: 5.

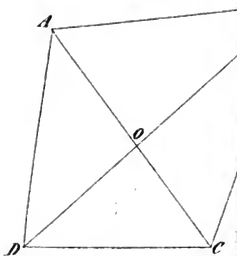


Fig: 9.

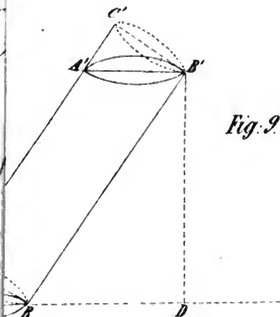
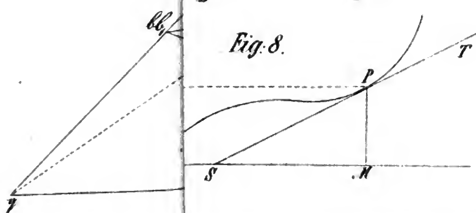
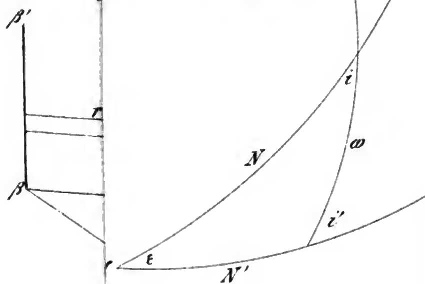
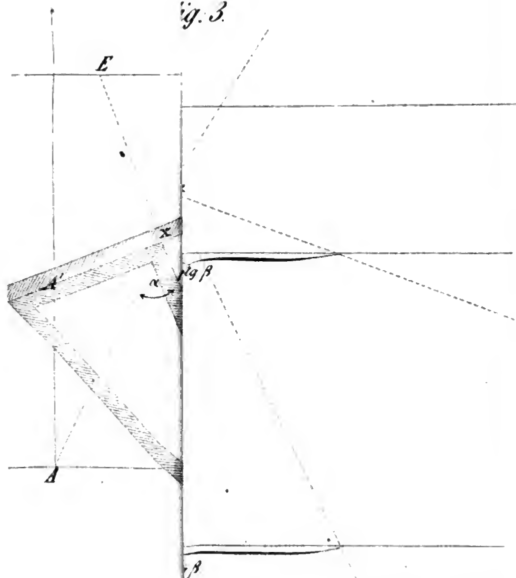


Fig: 8.




Fig. 5.
β'
β
i
ω
N
i'
ε
N'

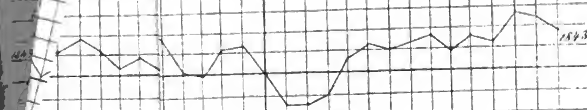

ig. 3.
E
x
A'
α
tg β
A



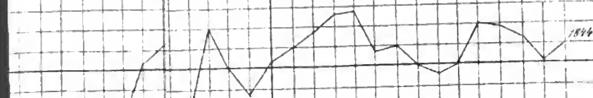
Nov. März

28 5 10 15

1842 - 1



VIII. 1843 - 1



ad IX.

1845. Mz Mz 23

16



IX 1844 - 1